EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XII KÕIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1963, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1963, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1963.4.04

ОБ ИТЕРАТИВНЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ, ОСНОВАННОГО НА ЛИНЕАРИЗАЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ФОРМУЛЫ НЬЮТОНА

С. УЛЬМ,

кандидат физико-математических наук

1. М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий доказали [3] некоторые общие теоремы о сходимости приближенных методов решения нелинейного операторного уравнения

$$P(x)=0, \tag{1}$$

основанных на линеаризации уравнения (1) при помощи формулы Тэйлора.

В данной статье мы исследуем вопрос о сходимости приближенных методов решения уравнения (1), основанных на линеаризации при помощи интерполяционной формулы Ньютона. В дальнейшем допустим, что оператор P действует из банахового пространства X в линейное нормированное пространство $У$.

Пусть x_{n-1} и x_n некоторые приближения к решению x^* уравнения (1). Вместо уравнения (1) рассмотрим линеаризованное уравнение

$$P(x_n)+P(x_n, x_{n-1})\,(x-x_n)=0, \tag{2}$$

где $P(x_n, x_{n-1})$ — аналог разделенных разностей первого порядка для оператора $P(x)$ [4, 6].

Пусть для приближенного решения линейного уравнения

$$Ax=b \tag{3}$$

имеется некоторый метод

$$\bar{x}_1=V(\bar{x}_0;\ A,\ b), \tag{4}$$

где оператор V в общем нелинейный; $\bar{x}_0$ — начальное приближение к решению $\bar{x}$ уравнения (3), а элемент $\bar{x}_1$ аппроксимирует точное решение $\bar{x}$ в некотором смысле лучше, чем $\bar{x}_0$.

Если метод (4) применять последовательно для приближенного решения линеаризованных уравнений (2), мы получим для решения уравнения (1), исходя из начальных приближений x_0 и x_{-1}, следующий итеративный метод:

$$x_{n+1}=V(x_n;\ P(x_n, x_{n-1}),\ P(x_n, x_{n-1})\,x_n-P(x_n)) \tag{5}$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Установим нижеследующие условия:

1° для метода (4) известна оценка погрешности в виде

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}\| \leqslant q \, \|\bar{x}_0 - \bar{x}\|, \; q < 1, \tag{6}$$

которая применима для уравнения (2).

2° для каждого x', x'', x''' из некоторой замкнутой сферы S существуют $P(x'', x''')$, $[P(x', x'')]^{-1} = \Lambda(x', x'')$ и справедлива оценка

$$\| E - \Lambda(x', x'') P(x'', x''') \| \leqslant K \| x' - x''' \|, \tag{7}$$

где E — тождественный оператор пространства X.

3° оператор $P(x)$ и $\Lambda(x', x'')$ являются непрерывными в сфере S.

4° $\| \Lambda(x_0, x_{-1}) P(x_0) \| \leqslant \eta_0;$ (8)

5° $\| x_0 - x_{-1} \| \leqslant (1+q)\gamma.$ (9)

Введем обозначения:

$$\eta_n = \| \Lambda(x_n, x_{n-1}) P(x_n) \|; \tag{10}$$

$$d_0 = q + K(1+q)(\eta_0 + \gamma); \tag{11}$$

$$d_n = q + K(1+q)(\eta_n + \eta_{n-1}) \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{12}$$

$$d = \max\{d_0;\ d_1\}; \tag{13}$$

$$D = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{k} d_i \right) = 1 + d_0 + d_0 d_1 + d_0 d_1 d_2 + \ldots ; \tag{14}$$

Теорема 1: *Если выполнены условия* 1°—5°, *причем в качестве* S *выбрана сфера*

$$\| x - x_0 \| \leqslant (1+q) \cdot \max\{\gamma;\ D\eta_0\} \tag{15}$$

и $d < 1$, *то уравнение* (1) *имеет в сфере* (15) *единственное решение* x^*, *к которому последовательность* (5) *сходится со скоростью*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant (1+q)\eta_0 \cdot \sum_{k=n-1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{k} d_i \right) < \frac{1+q}{1-d} d^n \eta_0, \tag{16}$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство: Обозначим точные решения уравнений (2) через $\overset{*}{x}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Используя условия 1° и 4°, получим

$$\| x_1 - x_0 \| \leqslant \| x_1 - \overset{*}{x}_0 \| + \| \overset{*}{x}_0 - x_0 \| \leqslant q \| \overset{*}{x}_0 - x_0 \| + \| \overset{*}{x}_0 - x_0 \| \leqslant$$
$$\leqslant (1+q) \| \overset{*}{x}_0 - x_0 \| = (1+q) \| \Lambda(x_0, x_{-1}) P(x_0) \| = (1+q)\eta_0. \tag{17}$$

На основании определения аналога разделенных разностей [4]

$$P(x_1) = P(x_0) + P(x_1, x_0)(x_1 - x_0) + P(x_0, x_{-1})(\overset{*}{x}_0 - x_0) -$$
$$- P(x_0, x_{-1})(\overset{*}{x}_0 - x_0) =$$
$$= P(x_1, x_0)(x_1 - \overset{*}{x}_0) + [P(x_1, x_0) - P(x_0, x_{-1})](\overset{*}{x}_0 - x_0). \tag{18}$$

Поскольку теперь

$$\Lambda(x_1, x_0)P(x_1) = x_1 - x_0^* + [E - \Lambda(x_1, x_0)P(x_0, x_{-1})](x_0^* - x_0), \qquad (19)$$

то используя условия 1°, 2°, 4° и 5° и оценку (17), получим

$$\begin{aligned} \eta_1 &\leqslant q \| x_0 - x_0^* \| + K \| x_1 - x_{-1} \| \| x_0 - x_0^* \| \leqslant \\ &\leqslant [q + K(\| x_1 - x_0 \| + \| x_0 - x_{-1} \|)] \| x_0 - x_0^* \| \leqslant \\ &\leqslant [q + K(1 + q)(\eta_0 + \gamma)]\eta_0 = d_0\eta_0. \end{aligned} \qquad (20)$$

Вообще получим для $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - x_n \| &\leqslant \| x_{n+1} - x_n^* \| + \| x_n^* - x_n \| \leqslant \\ &\leqslant q \| x_n^* - x_n \| + \| x_n^* - x_n \| \leqslant \\ &\leqslant (1 + q) \| x_n^* - x_n \| = (1 + q) \| \Lambda(x_n, x_{n-1}) P(x_n) \| = (1 + q)\eta_n; \end{aligned} \qquad (21)$$

$$\begin{aligned} P(x_{n+1}) &= P(x_n) + P(x_{n+1}, x_n)(x_{n+1} - x_n) + \\ &+ P(x_n, x_{n-1})(x_n^* - x_n) - P(x_n, x_{n-1})(x_n^* - x_n) = \\ &= P(x_{n+1}, x_n)(x_{n+1} - x_n^*) + [P(x_{n+1}, x_n) - P(x_n, x_{n-1})](x_n^* - x_n); \end{aligned} \qquad (22)$$

$$\Lambda(x_{n+1}, x_n) P(x_{n+1}) = x_{n+1} - x_n^* + [E - \Lambda(x_{n+1}, x_n) P(x_n, x_{n-1})](x_n^* - x_n); \qquad (23)$$

$$\begin{aligned} \eta_{n+1} &\leqslant q \| x_n^* - x_n \| + K \| x_{n+1} - x_{n-1} \| \| x_n^* - x_n \| \leqslant \\ &\leqslant [q + K(\| x_{n+1} - x_n \| + \| x_n - x_{n-1} \|)] \| x_n^* - x_n \| \leqslant \\ &\leqslant [q + K(1 + q)(\eta_n + \eta_{n-1})]\eta_n = d_n\eta_n. \end{aligned} \qquad (24)$$

Так как по условию теоремы

$$d = \max\{d_0; d_1\} < 1,$$

то поочередно для $n = 2, 3, \ldots$ получим, что

$$d_n = q + K(1 + q)(\eta_n + \eta_{n-1}) < q + K(1 + q)(\eta_1 + \eta_0) = d_1 < 1 \qquad (25)$$

и $\eta_{n+1} < \eta_n$.

Итак, справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} &\eta_1 \leqslant d_0\eta_0 \leqslant d\eta_0 \\ &\eta_2 \leqslant d_1\eta_1 \leqslant d_0d_1\eta_0 \leqslant d^2\eta_0 \\ &\quad \cdots \\ &\eta_{n+1} \leqslant d_n\eta_n \leqslant d_0d_1\ldots d_n\eta_0 < d^{n+1}\eta_0. \\ &\quad \cdots \end{aligned} \qquad (26)$$

Так как

$$\begin{aligned} \| x_{n+p} - x_n \| &\leqslant \| x_{n+p} - x_{n+p-1} \| + \ldots + \| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \\ &\leqslant (1 + q)(\eta_{n+p-1} + \ldots + \eta_n) \leqslant \\ &\leqslant (1 + q)d_0d_1\ldots d_{n-1}(1 + d_n + d_nd_{n-1} + \ldots + d_n\ldots d_{n+p-2})\eta_0 \leqslant \\ &\leqslant (1 + q)d^n(1 + d + d^2 + \ldots + d^{p-1})\eta_0, \end{aligned} \qquad (27)$$

то последовательность (5) является фундаментальной. Итак, существует $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$. Переходя к пределу ($p \to \infty$) в неравенствах (25) получим оценки (16).

Покажем, что x^* является решением уравнения (1). Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = \lim_{n\to\infty} \| \Lambda(x_n, x_{n-1})\ P(x_n) \| = 0, \tag{28}$$

то $\Lambda(x^*, x^*) P(x^*) = 0$. Применив слева к последнему равенству оператор $P(x^*, x^*) = P'(x^*)$, мы получим: $P(x^*) = 0$, т. е. x^* является решением уравнения (1).

Выше мы использовали принадлежность элементов x_{-1}, x_0, ..., x_n, ... , x^* к сфере (15). Это обстоятельство вытекает из неравенств:

$$\| x_{-1} - x_0 \| \leqslant (1+q)\gamma; \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \| x_n - x_0 \| &\leqslant \| x_n - x_{n-1} \| + \ldots + \| x_1 - x_0 \| \leqslant \\ &\leqslant (1+q)(\eta_{n-1} + \ldots + \eta_0) \leqslant \\ &\leqslant (1+q)(1 + d_0 + d_0 d_1 + \ldots + d_0 d_1 \ldots d_{n-1})\eta_0 \leqslant (1+q) D\eta_0. \end{aligned} \tag{30}$$

Переходя к пределу ($n \to \infty$) в (29) убедимся, что и $x^* \in S$.

Покажем единственность решения уравнения (1) в сфере (16). Допустив, что в сфере (16) существует два различных решений x^* и x^{**}, получим:

$$0 = P(x^*) - P(x^{**}) = P(x^*, x^{**})(x^* - x^{**}). \tag{31}$$

Применив слева к последнему равенству оператор $\Lambda(x^*, x^{**})$, получим противоречие: $x^* = x^{**}$.

Теорема доказана.

Рассмотрим случай, когда условие 1° заменено условием 1°′: для метода (4) известна оценка погрешности в виде

$$\| \bar{x}_1 - \bar{x} \| \leqslant \varrho \| \bar{x}_1 - \bar{x}_0 \|, \ \varrho < \tfrac{1}{2}, \tag{32}$$

которая применима для уравнений (2),
и условие 5° условием 5°′:

$$\| x_0 - x_{-1} \| \leqslant \frac{\gamma}{1-\varrho}. \tag{33}$$

Введем обозначения:

$$\delta_0 = \frac{\varrho + K(\eta_0 + \gamma)}{1-\varrho}; \tag{34}$$

$$\delta_n = \frac{\varrho + K(\eta_n + \eta_{n-1})}{1-\varrho} \qquad (n = 1, 2, \ldots); \tag{35}$$

$$\delta = \max\{\delta_0, \delta_1\}; \tag{36}$$

$$\Delta = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\prod_{i=0}^{k} \delta_i\right) = 1 + \delta_0 + \delta_0\delta_1 + \delta_0\delta_1\delta_2 + \ldots . \tag{37}$$

Теорема 2: *Если выполнены условия 1°′, 2°, 3°, 4° и 5°′, причем в качестве S выбрана сфера*

$$\| x - x_0 \| \leqslant (1-\varrho)^{-1} \cdot \max\{\gamma; \Delta\eta_0\} \tag{38}$$

и $\delta < 1$, то уравнение (1) имеет в сфере (38) единственное решение x^*, к которому последовательность (5) сходится со скоростью:

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{\eta_0}{1-\varrho} \sum_{k=n-1}^{\infty} \left(\prod_{i=0}^{k} \delta_i \right) < \frac{\delta^n}{(1-\varrho)(1-\delta)} \eta_0, \tag{39}$$

где $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство: Используя условия $1^{\circ\prime}$ и 4°, получим

$$\| x_1 - x_0 \| \leqslant \| x_1 - \overset{*}{x}_0 \| + \| \overset{*}{x}_0 - x_0 \| \leqslant \varrho \| x_1 - x_0 \| + \eta_0, \tag{40}$$

откуда

$$\| x_1 - x_0 \| \leqslant \frac{\eta_0}{1-\varrho}. \tag{41}$$

На основании полученной оценки и формулы (19)

$$\begin{aligned} \eta_1 = \| \Lambda(x_1, x_0) P(x_1) \| \leqslant \varrho \| x_1 - x_0 \| + K \| x_1 - x_{-1} \| \| \overset{*}{x}_0 - x_0 \| \leqslant \\ \leqslant \frac{\varrho}{1-\delta} \eta_0 + K(\| x_1 - x_0 \| + \| x_0 - x_{-1} \|) \| \overset{*}{x}_0 - x_0 \| \leqslant \\ \leqslant \frac{\varrho + K(\eta_0 + \gamma)}{1-\varrho} \eta_0 = \delta_0 \eta_0. \end{aligned} \tag{42}$$

Вообще получим для $n = 1, 2, \ldots$, оценки

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \frac{\eta_n}{1-\varrho} \tag{43}$$

и

$$\eta_{n+1} = \| \Lambda(x_{n+1}, x_n) P(x_{n+1}) \| \leqslant \delta_n \eta_n. \tag{44}$$

Теперь легко убедиться в правильности нашей теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 1: При решении уравнения (3) методами класса (4) часто потребуется от оператора A самосопряженность. В связи с этим отметим, что теоремы 1 и 2 остаются справедливыми, если вместо уравнений (2) рассматривать уравнения

$$P^*(x_n, x_{n-1}) P(x_n) + P^*(x_n, x_{n-1}) P(x_n, x_{n-1}) (x - x_n) = 0 \tag{2'}$$

с самосопряженными операторами $P^*(x_n, x_{n-1}) P(x_n, x_{n-1})$, причем через $P^*(x_n, x_{n-1})$ обозначен оператор, сопряженный к линейному оператору $P(x_n, x_{n-1})$.

Метод (5) имеет в этом случае вид:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = V(x_n; P^*(x_n, x_{n-1}) P(x_n, x_{n-1}); P^*(x_n, x_{n-1}) P(x_n, x_{n-1}) x_n - \\ - P^*(x_n, x_{n-1}) P(x_n)) \\ (n = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{5'}$$

Замечание 2: Теоремы 1 и 2 остаются в силе, если условие 2° заменить условием $2^{\circ\prime}$: для каждого x', x'', x''' из замкнутой сферы S справедлива оценка

$$\| \Lambda(x', x'') P(x', x'', x''') \| \leqslant K,$$

где $P(x', x'', x''')$ — аналог разделенных разностей второго порядка оператора $P(x)$ (см. [4, 5]).

Действительно, если выполнено 2°′, то

$$\|E - \Lambda(x', x'')P(x'', x''')\| = \|\Lambda(x', x'')[P(x', x'') - P(x'', x''')]\| =$$
$$= \|\Lambda(x', x'')P(x', x'', x''')(x' - x''')\| \leqslant$$
$$\leqslant \|\Lambda(x', x'')P(x', x'', x''')\| \, \|x' - x'''\| \leqslant K \|x' - x'''\|,$$

т. е. выполнено и условие 2°.

В качестве примера рассмотрим применение метода наискорейшего спуска [1] для решения уравнений (2′). Метод (5′) в этом случае принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|P^*(x_n, x_{n-1})\,P(x_n)\|^2}{\|P(x_n, x_{n-1})\,P^*(x_n, x_{n-1})P(x_n)\|^2}\,P^*(x_n, x_{n-1})P(x_n) \qquad (45)$$
$$(n = 0, 1, \ldots)$$

т. е. совпадает с методом минимальных невязок в классе итерационных методов $x_{n+1} = x_n - \varepsilon_n P^*(x_n, x_{n-1})P(x_n)$ (см. [6]).

Пусть для каждого $h \in X$ и $x', x'', x''' \in S$ справедливы оценки

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\|h\| \leqslant \|P(x', x'')h\| \leqslant \sqrt{K}\|h\|, \qquad (46)$$

$$\|P(x', x'') - P(x'', x''')\| \leqslant L\|x' - x'''\|, \qquad (47)$$

и

$$\|\Lambda(x_0, x_{-1})P(x_0)\| \leqslant \eta_0, \qquad (48)$$

$$\|x_0 - x_{-1}\| \leqslant (1 + q)\gamma. \qquad (49)$$

Применяя теорему 1, можно взять [2]

$$q = \frac{1-\mu}{t_0 + \mu^3}\sqrt{\frac{t_0(t_0 + \mu^4)}{t_0 + 1}}, \qquad (50)$$

где

$$\mu = \frac{1}{MK} \qquad (51)$$

и t_0 — положительный корень уравнения

$$t^3 - \mu^3(1 - 2\mu)t^2 - \mu^3(2 - \mu)t - \mu^7 = 0. \qquad (52)$$

На основании теоремы 1 условие сходимости метода (45) выражается в виде

$$\max\{d_0, q + \sqrt{M}L(1 + q)(1 + d_0)\eta_0\} < 1, \qquad (53)$$

где

$$d_0 = q + \sqrt{M}L(1 + q)(\eta_0 + \gamma). \qquad (54)$$

Условие (53) несколько более ограничивающее, чем соответствующее условие в теореме, полученной прямым путем (см. [6], теорема 5), но зато не требуется знания оценки снизу для $\|P^*(x', x'')h\|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович, Функциональный анализ и прикладная математика, УМН, 1948, вып. 6(28), 3, 89—185.
2. В. Н. Костарчук и Б. П. Пугачев, Точная оценка уменьшения погрешности на одном шаге метода наискорейшего спуска, Тр. Семинара по функц. анализу Воронежского ун-та, 1956, вып. 2, 25—30.

3. М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий, О некоторых приближенных методах решения нелинейных операторных уравнений, основанных на линеаризации, ДАН, 1961, **141**, 785—788.
4. А. С. Сергеев, О методе хорд, Сибирский матем. журнал, 1961, 2, 2, 282—289.
5. С. Ульм, Об интерполяционных методах решения нелинейных уравнений в пространстве Банаха, Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1963, 1, 24—30.
6. С. Ульм, Об одном классе итерационных методов в пространстве Гильберта, Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1963, 2, 132—140.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
27. IV 1963

NEWTONI INTERPOLATSIOONIVALEMIGA LINEARISEERIMISEL PÕHINEVATEST MITTELINEAARSE VÕRRANDI LAHENDAMISE ITERATSIOONIMEETODITEST

S. Ulm,
füüsika-matemaatikateaduste kandidaat

Resümee

Vaadeldakse mittelineaarse operaatorvõrrandi (1) lahendamise iteratsioonimeetodeid, mis saadakse igal sammul võrrandi (1) lineariseerimisel Newtoni interpolatsioonivalemiga, kusjuures saadud (lineaarsed) võrrandid lahendatakse mingi meetodiga ligikaudselt. Tõestatakse kaks üldist koonduvusteoreemi ja tuuakse näide saadud teoreemide rakendamisest.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
27. IV 1963

ÜBER ITERATIONSMETHODEN FÜR DIE LÖSUNG NICHTLINEARER GLEICHUNG, WELCHE AUF DER LINEARISIERUNG MITTELS DER NEWTONSCHEN INTERPOLATIONSFORMEL FUSSEN

S. Ulm

Zusammenfassung

Es werden Iterationsmethoden für die angenäherte Lösung der Operatorgleichung (1) untersucht, die allenfalls auf der Linearisierung der Gleichung (1) mittels der Newtonschen Interpolationsformel und, weiter, auf der Anwendung angenäherter Methoden für die Lösung linearer Operatorgleichungen fussen. Es werden zwei allgemeine Konvergenztheoreme abgeleitet und ein Beispiel ihrer Anwendung betrachtet.

Institut für Kybernetik
der Akademie der Wissenschaften der Estnischen SSR

Eingegangen
am 27. April 1963