EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1963, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1963. № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1963.4.03

ПОСТРОЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

М. ЛЕВИН

В настоящей заметке продолжается решение экстремальных задач для квадратурной формулы, содержащей значения подинтегральной функции и ее производных на концах отрезка интегрирования. Некоторые из таких задач для этой формулы рассматривались автором раньше [3].

§ 1. Экстремальная задача для множества $L_2^{(n)}(M)$

Множество $L_2^{(n)}(M)$ состоит из всех функций $f(x)$, имеющих на отрезке [0,1] абсолютно-непрерывную производную порядка $n-1$ и удовлетворяющих условию

$$\left[\int_0^1 |f^{(n)}(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant M. \tag{1}$$

Требуется для этого множества функций среди формул вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[f^{(k)}(x)\,p_n{}^{(n-k-1)}(x)\right]_{x=0}^{1} + R_n(f), \tag{2}$$

где $p_n(x)$ — многочлен степени n со старшим членом x^n, выбрать наилучшую, т. е. ту, для которой величина

$$R_n = \sup_{f\in L_2^{(n)}(M)} |R_n(f)|$$

принимает наименьшее значение.

Так как

$$R_n(f) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 f^{(n)}(x)\,p_n(x)\,dx, \tag{3}$$

то, применяя неравенство Гёльдера, в силу (1) имеем

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M}{n!}\left[\int_0^1 |p_n(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4}$$

Функция

$$\varphi(x)=\frac{M}{\left[\int\limits_0^1 |p_n(x)|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}}\int\limits_0^x\int\limits_0^{x_1}\ldots\int\limits_0^{x_{n-1}} p_n(x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n$$

принадлежит множеству $L_2^{(n)}(M)$ и для нее (4) превращается в равенство. Поэтому

$$R_n=\frac{M}{n!}\left[\int\limits_0^1 |p_n(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что величина R_n принимает наименьшее значение, когда $p_n(x)$ есть многочлен Лежандра, приведенный к отрезку [0,1]

$$p_n(x)=\frac{n!}{(2n)!}\,\frac{d^n}{dx^n}[x(1-x)]^n. \qquad (6)$$

Формула (2), соответствующая этому многочлену, и есть наилучшая среди формул вида (2) для функций множества $L_2^{(n)}(M)$ и имеет вид

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\frac{n!}{(2n)!}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-k-1)!}{(n-k-1)!(k+1)!}[f^{(k)}(0)+(-1)^k f^{(k)}(1)]+R_n(f). \quad (7)$$

Она была построена из других соображений в [6], [2] и обладает тем свойством, что имеет наивысшую алгебраическую степень точности среди формул вида (2).

По (5) интегрированием по частям с учетом (6) получаем значение верхней грани ошибки формулы (7) для множества $L_2^{(n)}(M)$

$$R_n=\frac{Mn!}{(2n)!\sqrt{2n+1}}.$$

§ 2. Экстремальная задача для множества $V_n(M)$

Будем считать, что функция $f(x)$ принадлежит множеству $V_n(M)$, если выполнено условие

$$\operatorname*{var}_{[-1,1]} f^{(n-1)}(x)\leqslant M.$$

Требуется для функций этого множества среди формул вида

$$\int\limits_{-1}^1 f(x)\,dx=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\Big[f^{(k)}(x)\,p_n^{(n-k-1)}(x)\Big]_{x=-1}^1+R_n(f), \qquad (8)$$

где

$$R_n(f)=\frac{(-1)^n}{n!}\int\limits_{-1}^1 p_n(x)\,df^{(n-1)}(x), \qquad (9)$$

выбрать ту, для которой величина

$$R_n = \sup_{f \in V_n(M)} |R_n(f)|$$

имеет наименьшее значение среди возможных.

По (9) мы имеем

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M}{n!} \max_{[-1,1]} |p_n(x)|. \tag{10}$$

Пусть функция $\psi(x)$ такая, что

$$\psi^{(n-1)}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, x_0) \\ M \operatorname{sign} p_n(x_0), & x \in [x_0, 1], \end{cases}$$

где x_0 — точка, в которой $|p_n(x)|$ принимает наибольшее на отрезке $[-1, 1]$ значение*. Функция $\psi(x) \in V_n(M)$ и для нее неравенство (10) превращается в равенство.

Поэтому

$$R_n = \frac{M}{n!} \max_{[-1,1]} |p_n(x)|. \tag{11}$$

По (11) следует, что величина R_n принимает наименьшее значение, когда $p_n(x)$ есть многочлен Чебышева первого рода

$$p_n(x) = \frac{\cos n \arccos x}{2^{n-1}}. \tag{12}$$

Теперь построим формулу, соответствующую этому многочлену. Пусть $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ многочлен Якоби, нормированный условием

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}. \tag{13}$$

Старший коэффициент его равен [5]

$$2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} \tag{14}$$

и поэтому

$$p_n(x) = \frac{2^n}{\binom{2n-1}{n}} P_n^{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}(x). \tag{15}$$

Используя (13) и свойства многочленов Якоби [5]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n},$$

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x),$$

находим по (15)

---

* Если $x_0 = -1$, то считаем $\psi^{(n-1)}(x_0) = 0$, $\psi^{(n-1)}(x) = M \operatorname{sign} p_n(x_0)$ при $x \neq x_0$.

$$p_n^{(n-k-1)}(1) = \frac{2^{k+1} n!\ (2n-k-2)!}{(2n-1)!} \binom{n-\frac{1}{2}}{k+1},$$

$$p_n^{(n-k-1)}(-1) = (-1)^{k+1} p_n^{(n-k-1)}(1)$$

$$(k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Таким образом, наилучшая для множества $V_n(M)$ формула (8) имеет вид

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k [f^{(k)}(1) + (-1)^k f^{(k)}(-1)] + R_n(f), \tag{16}$$

где

$$c_k = (-1)^k 2^{k+1} \frac{(2n-k-2)!}{(2n-1)!} \binom{n-\frac{1}{2}}{k+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Так как наибольшее значение многочлена Чебышева (12) равно 2^{1-n}, то по (11) имеем верхнюю грань ошибки наилучшей формулы (16)

$$R_n = \frac{M}{2^{n-1} n!}.$$

§ 3. Увеличение алгебраической степени точности формулы и связанная с этим экстремальная задача на множестве функций $L_2^{(n+r)}(M)$

Алгебраическая степень точности формулы (2) (максимальная степень произвольного многочлена, для которого остаток равен нулю) не меньше числа $n-1$. Увеличение ее проведем путем выделения из остатка (3) дополнительных слагаемых.

Введем в рассмотрение многочлены

$$p_{k,\,n+k}(x) = \underbrace{\int_0^x \ldots \int_0^x}_{k} p_n(x) \underbrace{dx \ldots dx}_{k}. \tag{17}$$

Использование этих многочленов и интегрирование по частям выражения (3) приводит к формуле

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \Big[f^{(k)}(x)\, p_n^{(n-k-1)}(x) \Big]_{x=0}^{1} +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i f^{(n+i)}(1)\, p_{i+1,\,n+i+1}(1) + R_{n,\,n+r}(f), \tag{18}$$

где

$$R_{n,\,n+r}(f) = \frac{(-1)^{n+r}}{n!} \int_0^1 f^{(n+r)}(x)\, p_{r,\,n+r}(x)\,dx. \tag{19}$$

Алгебраическая степень точности этой формулы, как это видно из (19), не меньше числа $n+r-1$.

Рассмотрим один частный случай при $n=r$. Выберем многочлен $p_n(x)$ таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$p_{k,\, n+k}(1)=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

По (17) имеем систему уравнений для нахождения коэффициентов этого многочлена

$$\int_0^1\int_0^{x_1} \ldots \int_0^{x_{k-1}} p_n(x_k)\,dx_1\ldots dx_k=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{21}$$

Уравнения (21) можно записать в виде [4]

$$\int_0^1 (1-x)^{k-1}p_n(x)\,dx=0 \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

откуда следует, что многочлен $p_n(x)$ ортогонален по весу 1 на отрезке [0, 1] к 1, $x, \ldots, x^{n-1}$, т. е. $p_n(x)$ есть многочлен Лежандра, приведенный к отрезку [0, 1]. Учитывая это и равенство (20), видим, что в рассматриваемом частном случае формула (18) превращается в формулу (7) с алгебраической степенью точности $2n-1$.

Теперь для формулы (18) и множества $L_2^{(n+r)}(M)$ решим экстремальную задачу: выбрать многочлен $p_n(x)$ так, чтобы величина

$$R_{n,\, n+r}=\sup_{f\in L_2^{(n+r)}(M)} |R_{n,\, n+r}(f)| \tag{22}$$

приняла наименьшее среди возможных значение.

Аналогично, как в § 1, имеем

$$R_{n,\, n+r}=\frac{M}{n!}\left[\int_0^1 |p_{r,\, n+r}(x)|^2dx\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{22'}$$

Найдем многочлен $p_{r,\, n+r}(x)$, минимизирующий интеграл

$$I=\int_0^1 [p_{r,\, n+r}(x)]^2dx, \tag{23}$$

для чего этот интеграл запишем в виде

$$I=\left[\frac{n!}{(n+r)!}\right]^2\int_0^1 x^{2r}q_n^2(x)\,dx, \tag{24}$$

где

$$q_n(x)=\frac{(n+r)!}{n!}\cdot\frac{p_{r,\, n+r}(x)}{x^r} \tag{25}$$

— многочлен степени n со старшим коэффициентом, равным единице.

По (24) видно, что интеграл I минимизируется многочленом степени n со старшим коэффициентом, равным единице, ортогональным на отрезке [0,1] по весу x^{2r} к произвольному многочлену степени $\leqslant n-1$.

Поэтому, приведя многочлен Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]$$

со старшим коэффициентом (14) к отрезку [0, 1], получим многочлен

$$q_n(x) = \frac{(-1)^n}{\binom{2n+2r}{n}} P_n^{(2r,0)}(1-2x),$$

минимизирующий интеграл (24).

По (25) находим соответствующий многочлен $p_{r,\,n+r}(x)$, минимизирующий интеграл (23),

$$p_{r,\,n+r}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+r)!\binom{2n+2r}{n}} x^r P_n^{(2r,0)}(1-2x), \tag{26}$$

при помощи которого по (17) получаем, что исходный многочлен $p_n(x)$ в формуле (18), для которого величина $R_{n,\,n+r}$ достигает наименьшего значения, имеет вид

$$p_n(x) = \frac{(-1)^n n!}{\binom{2n+2r}{n}(n+r)!}\frac{d^r}{dx^r}[x^r P_n^{(2r,0)}(1-2x)]. \tag{27}$$

Теперь построим наилучшую формулу, т. е. ту, которая соответствует многочлену **(27)**.

Для этого используем формулу (она получается, если в формуле (4.21.2) у Г. Сеге [5] взять $\alpha = 2r$, $\beta = 0$ и x заменить $1-2x$)

$$x^r P_n^{(2r,0)}(1-2x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i(2n+r+i)!}{(2r+i)!(n-i)!\,i!}x^{r+i}. \tag{28}$$

По (17) имеем

$$p_{r,\,n+r}(x) = \underbrace{\int_0^x \ldots \int_0^x}_{r-k} p_{k,\,n+k}(x)\underbrace{dx\ldots dx}_{r-k} \qquad (k=0,\,1,\,\ldots,\,r-1),$$

откуда

$$p_{k,\,n+k}(x) = \frac{d^{r-k}}{dx^{r-k}}p_{r,\,n+r}(x) \qquad (k=0,\,1,\,\ldots,\,r-1). \tag{29}$$

Подставляя (28) в (26) и полученное — в (29), имеем

$$p_{k,\,n+k}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(n+r)!\binom{2n+2r}{n}}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i(2r+n+i)!}{(2r+i)!(n-i)!\,i!}\frac{d^{r-k}}{dx^{r-k}}x^{r+i},$$

откуда следует

$$p_{k,\,n+k}(1) = (-1)^{k+n} n!\, C_k^{(r)} \qquad (k=0,\,1,\,\ldots,\,r-1),$$

где

$$C_k^{(r)} = \frac{(-1)^k(r-k)!}{(n+r)!\binom{2r+2n}{n}}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{2r+n+i}{n}\binom{n}{i}\binom{r+i}{k+i} \tag{30}$$

$$(k=0,\,1,\,\ldots,\,r-1).$$

Аналогично по (27) и (28) находим

$$p_n^{(n-k-1)}(1)=(-1)^k n! A_k^{(r)},$$

$$p_n^{(n-k-1)}(0)=(-1)^{k+1} n! B_k^{(r)} \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_k^{(r)} &= \frac{(-1)^{k+n}(r+n-k-1)!}{(n+r)!\binom{2n+2r}{n}} \sum_{i=n-k-1}^{n} (-1)^i \binom{2r+n+i}{n}\binom{n}{i}\binom{r+i}{r+n-k-1} \\ B_k^{(r)} &= \frac{\binom{2r+2n-k-1}{n}\binom{r+n-k-1}{r}}{\binom{2n+2r}{n}\binom{n+r}{n}(k+1)!}, \qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Таким образом, для множества функций $L_2^{(n+r)}(M)$ мы получим наилучшую формулу среди формул вида (18)

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\left[A_i^{(r)} f^{(i)}(1) + B_i^{(r)} f^{(i)}(0)\right] +$$

$$+\sum_{i=0}^{r-1} C_i^{(r)} f^{(n+i)}(1) + R_{n,\,n+r}(f), \qquad (32)$$

где множители $A_i^{(r)}$, $B_i^{(r)}$ и $C_i^{(r)}$ определены в (31) и (30).

Найдем теперь точную верхнюю границу модуля ошибки полученной наилучшей формулы. Для этого используем формулу [1]

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\,\Gamma(n+\alpha+1)\,\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}. \qquad (33)$$

По (22′), учитывая (26), находим

$$R_{n,\,n+r} = \frac{M}{(n+r)!\binom{2n+2r}{n}}\left\{\int_0^1 x^{2r}\left[P_n^{2r,0}(1-2x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда, используя (33), получаем

$$R_{n,\,n+r} = \frac{M}{\binom{2n+2r}{n}(n+r)!\sqrt{2n+2r+1}}.$$

Замечание. Формулы (7) и (16) являются наилучшими среди формул вида

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\alpha_k f^{(k)}(b) + \beta_k f^{(k)}(a)\right] + R_n(f),$$

где $R_n(p_{n-1})=0$ (это ограничение необходимо для существования на заданных множествах функций величины R_n) соответственно для множеств $L_2^{(n)}(M)$ $(a=b-1=0)$ и $V_n(M)$ $(a=-b=-1)$.

Это следует из того, что если

$$p_n(x)=(-1)^n n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \beta_{n-i-1}(x-a)^i, \quad \beta_{-1}=1,$$

то

$$\frac{(-1)^k}{n!} p_n^{(n-k-1)}(b)=\alpha_k, \quad \frac{(-1)^{k+1}}{n!} p_n^{(n-k-1)}(a)=\beta_k$$

$$(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Так же среди формул вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_k f^{(k)}(1)+\beta_k f^{(k)}(0)] + \sum_{k=0}^{r-1} \gamma_k f^{(n+k)}(1),$$

точных для многочленов степени $n+r-1$, наилучшей на множестве $L_2^{(n+r)}(M)$ является формула (32).

Аналогичное замечание справедливо и для § 1 предыдущей статьи [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов. М., 1959.
2. К. Ланцош, Практические методы прикладного анализа. М., 1961.
3. М. Левин, Об экстремальных задачах, связанных с одной квадратурной формулой, Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1963, 1, 44—56.
4. Ш. Е. Микеладзе, Численные методы математического анализа. М., 1953.
5. Г. Сеге, Ортогональные многочлены. М., 1962.
6. N. Obreschkoff, Abhandl. der Preuss. Acad. der Wiss., 1940, 4, 2—20.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22. V 1963

MÕNEDE PARIMATE KVADRATUURVALEMITE LEIDMINE

M. Levin

Resümee

Artiklis leitakse kaks parimat valemit, (7) ja (16), neist esimene klassi (2) puhul funktsioonide hulgale $L_2^{(n)}(M)$ ja teine klassi (8) puhul funktsioonide hulgale $V_n(M)$.

Käsitletakse valemi (2) täpsuse algebralise astme suurendamise küsimust ja sellega seotud ekstremaalülesannet.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
22. V 1963

THE CONSTRUCTION OF SOME BEST QUADRATURE FORMULAS

M. Levin

Summary

Extreme problems are solved for the formula (2) in the class $L_2^{(n)}(M)$ and for the formula (8) in the class $V_n(M)$. The solutions are given by formulas (7) and (16).

An analogous problem is solved for the formula (18).

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Cybernetics

Received
May 22nd, 1963