EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XI KÖIDE
FOOSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1962, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XI
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1962, № 4

# О ДВУХ ТЕОРЕМАХ ЧЖОУ И ИХ ОБОБЩЕНИЯХ НА ДВОЙНЫЕ РЯДЫ

С. БАРОН,

кандидат физико-математических наук

Э. ПАЛЛУМ

М. ПЕТЕРСОН

## § 1. Введение

В практике часто приходится иметь дело с рядами, которые не суммируемы методами Чезаро. Оказывается, что и для таких рядов можно найти некоторые типы множителей суммируемости. Для этой цели вводим вспомогательную последовательность положительных чисел при помощи следующих определений.

Ряд *

$$\Sigma u_n \tag{1}$$

называем $|C_\varphi^\alpha|$-суммируемым, если ряд $\Sigma\, \varphi_n u'_n$, где

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k A_{n-k}^{\alpha-1}}{n A_n^\alpha} u_k ,$$

абсолютно сходится.

Последовательность $\{U_n\}$ называем $C_\varphi^\alpha$-ограниченной ($C_\varphi^\alpha$-суммируемой), если последовательность $\{\varphi_n U'_n\}$, где

$$U'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} U_k ,$$

ограничена (сходится).

В 1952 г. Чжоу [2] доказал следующие две теоремы.

Теорема I. *Пусть* $\{\varphi_n\}$ *такая последовательность положительных чисел, что* $n^{-1}\varphi_n$ *не возрастает и* $\alpha, \beta \geqslant 0$. *Для того, чтобы из* $|C_\varphi^\alpha|$*-суммируемости ряда* (1) *всегда следовала* $|C^\beta|$*-суммируемость ряда*

* Если не оговорено противное, то в § 1—3 сохраняем определения и обозначения статьи [4], а в § 4 и 5 — определения и обозначения статей [5, 6].

$$\sum \varepsilon_n u_n, \tag{2}$$

*необходимы и достаточны условия*

$$\varepsilon_n = O(n^{\beta-\alpha}\varphi_n), \tag{D}$$

$$\varepsilon_n = O(\varphi_n) \tag{D'}$$

$$\Delta^\alpha(n^{-1}\varepsilon_n) = O(n^{-\alpha-1}\varphi_n). \tag{J'}$$

Теорема II. *Пусть* $\varphi_n = (n+1)^{-p}$, $\alpha, \beta, p \geqslant 0$. *Для того, чтобы из* $C_\varphi^\alpha$ *-ограниченности последовательности*

$$\{n u_n\} \tag{3}$$

*всегда следовала* $|C^\beta|$*-суммируемость ряда* (2), *необходимы и достаточны условия*

$$\sum (n+1)^{\alpha-1-\beta+p}|\varepsilon_n| < \infty,$$

$$\sum (n+1)^{-1+p}|\varepsilon_n| < \infty,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+p}|\Delta^\alpha(n^{-1}\varepsilon_n)| < \infty. \tag{B'}$$

В 1956 г. Бозанкет и Чжоу (см. [1], стр. 77) показали, что в теореме I, если $\varphi_n$ не возрастает, условие (J') можно заменить условием

$$\Delta^\alpha \varepsilon_n = O(n^{-\alpha}\varphi_n), \tag{J}$$

а в теореме II условие (B') условием

$$\sum (n+1)^{\alpha-1+p}|\Delta^\alpha \varepsilon_n| < \infty.$$

В настоящей статье мы дадим новые, более простые доказательства теорем I и II в формулировке статьи [1] (причем в более общем виде), а затем обобщим их на двойные ряды. Для доказательства применим метод статьи [4].

Итак, целью настоящей статьи является доказательство следующих теорем и их обобщение на двойные ряды.

Теорема 1. *Пусть** $\{\varphi_n\}$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел*, $\alpha \geqslant 0$, $\beta > -1$. *Для того, чтобы из* $|C_\varphi^\alpha|$*-суммируемости ряда* (1) *всегда следовала* $C^\beta$*-суммируемость (или* $|C^\beta|$*-суммируемость) ряда* (2), *необходимы и достаточны условия* (D), (D') *и* (J).

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_n\}$ — *невозрастающая последовательность положительных чисел*, $\alpha \geqslant -1$, $\beta > -1$. *Для того, чтобы из*** $C_\varphi^{\alpha+1}$-

* При $\varphi_n = 1$ теорема 1 переходит в теорему 1 статьи [4] (если $\beta \geqslant 0$) и теорему 1 статьи [7] (если $-1 < \beta < 0$).

** Уже после сдачи в печать настоящей статьи авторам стали известны работы [12–15], в которых показывается, что условия теоремы 2 необходимы и достаточны для того, чтобы из $C_\varphi^\alpha$-ограниченности частичных сумм ряда (1) всегда следовала $|C^\beta|$-суммируемость ряда (2). Однако достаточность этих условий, доказательство чего больше всего занимает место в [12–15], следует из теоремы 2 при помощи формулы (6.1.4) книги [10] (ср. [1], стр. 82).

*ограниченности (или $C_\varphi^{\alpha+1}$-суммируемости) последовательности* (3) *всегда следовала* $|C^\beta|$*-суммируемость ряда* (2), *необходимы и достаточны условия*

$$\Sigma (n+1)^{\alpha-\beta} \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n| < \infty, \tag{M}$$

$$\Sigma (n+1)^{-1} \varphi_n^{-1} |\varepsilon_n| < \infty, \tag{M'}$$

$$\Sigma (n+1)^{\alpha} \varphi_n^{-1} |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n| < \infty. \tag{B}$$

Замечание 1. *Если* $-1 < \beta \leqslant 0$, *то в теореме* 1 *можем опустить условия* (J) *и* (D'), *а в теореме* 2 — *условия* (B) *и* (M').

## § 2. Доказательство теоремы 1

Необходимость. Аналогично, как на стр. 50 статьи [4], можно доказать:

*Для того, чтобы из* $|C_\varphi^\alpha|$*-суммируемости ряда* (1) *всегда следовала* $C^\beta$*-суммируемость ряда* (2), *необходимо условие*

$$\nu A_\nu^\alpha \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} \frac{A_{n-k}^\beta}{A_n^\beta} \frac{\varepsilon_k}{k} = O(\varphi_\nu) \quad (n \geqslant \nu). \tag{4}$$

Положив $\nu = n$ в условии (4), получаем необходимость условия (D).

Положив $\alpha = 0$ в условии (4) и переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, в силу включения $|C^0| \subset |C^\alpha|$, сразу получаем необходимость условия (D'), откуда, так как $\varphi_n$ не возрастает, в свою очередь, вытекает условие

$$\varepsilon_n = O(1). \tag{A}$$

Учитывая необходимость условия (A), мы можем в условии (4) перейти к пределу при $n \to \infty$, вследствие чего получаем необходимость условия (J'). Наконец, из условий (A) и (J') следует условие (J) (см., например, [1], стр. 79).

Достаточность. Как показал Чжоу ([2], стр. 465)

*Для того, чтобы из* $|C_\varphi^\alpha|$*-суммируемости ряда* (1) *всегда следовала* $|C^\beta|$*-суммируемость ряда* (2), *необходимо и достаточно условие*

$$\sum_{n=\nu}^{\infty} \frac{1}{n A_n^\beta} \left| \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-1} A_{n-k}^{\beta-1} \varepsilon_k \right| = O(\nu^{-\alpha-1}\varphi_\nu). \tag{5}$$

В случае $-1 < \beta < 0$ условие (5) выводится непосредственно из условия (D).

Пусть теперь $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$. Для этого случая остается доказать, что из условий (D), (D') и (J) следует условие (5). Для доказательства последнего можно применять рассуждения, аналогичные приведенным на стр. 50—54 статьи [4], заменяя лемму 2 этой статьи леммой 13 из статьи [2].

Случай $\beta > \alpha$ очевиден в силу включения $|C^\alpha| \subset |C^\beta|$.

## § 3. Доказательство теоремы 2

Аналогично, как на стр. 60 статьи [3], можно доказать:

*Для того, чтобы из $C_\varphi^{\alpha+1}$-ограниченности (или $C_\varphi^{\alpha+1}$-суммируемости) последовательности* (3) *всегда следовала $|C^\beta|$-суммируемость ряда* (2), *необходимо и достаточно условие*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_\nu} A_\nu^{\alpha+1} \Big| \sum_{n \in \mathfrak{N}} \frac{1}{n A_n^\beta} \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} A_{n-k}^{\beta-1} \varepsilon_k \Big| \leqslant K, \tag{6}$$

*где $\mathfrak{N}$ — всевозможные конечные подмножества последовательности натуральных чисел, а $K$ не зависит от $\mathfrak{N}$.*

Необходимость. Положив $n = \nu$ в условии (6), что допустимо по теореме 1 статьи [3], получаем необходимость условия (M).

Положив $\alpha = -1$ в условии (6), в силу включения $C^0 \subset C^{\alpha+1}$, получаем необходимость условия

$$\lim_p \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\varphi_\nu} |\varepsilon_\nu| \Big| \sum_{n=\nu}^{p} \frac{1}{n A_n^\beta} A_{n-\nu}^{\beta-1} \Big| \leqslant K \quad (l = 1, 2, \ldots), \tag{7}$$

равносильное условию (M').

Далее, из условия (6), в силу условия * (M'), выводим

$$\begin{aligned} \lim_p \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\varphi_\nu} A_\nu^{\alpha+1} \Big| \sum_{n=\nu}^{p} \frac{1}{n A_n^\beta} \sum_{k=\nu}^{n} A_{k-\nu}^{-\alpha-2} A_{n-k}^{\beta-1} \varepsilon_k \Big| = \\ = \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{\varphi_\nu} A_\nu^{\alpha+1} \Big| \Delta^{\alpha+1} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu} \Big| \leqslant M \quad (l = 1, 2, \ldots), \end{aligned} \tag{8}$$

откуда, ввиду включения $C^\alpha \subset C^{\alpha+1}$ $(\alpha > -1)$ и вытекающего из леммы 1 статьи [1] соотношения **

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_\nu} \nu^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_\nu| = O(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_\nu} \nu^{\alpha+1} \Big| \Delta^{\alpha+1} \frac{\varepsilon_\nu}{\nu} \Big| + (\alpha+1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi_\nu} \nu^\alpha \Big| \Delta^\alpha \frac{\varepsilon_\nu}{\nu} \Big| \leqslant M,$$

заключаем необходимость условия (B).

Достаточность. В случае $-1 < \beta < 0$ условие (6) выводится непосредственно из условия (M).

Пусть $0 \leqslant \beta \leqslant \alpha + 1$. Для этого случая остается доказать, что из условий (M), (M') и (B) следует условие (6). Доказательство последнего аналогично доказательству достаточности теоремы 4 статьи [4], однако намного проще его, так как в нашем случае вовсе не надо отдельно рассматривать выражения, соответствующие суммам $P$, $Q$, $T$ и

* Условие (M') гарантирует существование предела и законность перестановки порядка суммирования в (8).

** См. [1], стр. 80. При $-1 < \alpha < 0$ сходимость крайнего ряда справа обеспечено условием (M') (ср. [1], лемма 5).

$V$ (см. [4], стр. 63 и 66). В нашем доказательстве при $\alpha \geqslant 0$ нам нужны лемма 7 статьи [4] и следующая *

Лемма 1. *Из условий* (A) *и* (B) *следует*

$$\Sigma (n+1)^{\sigma-1} \varphi_n^{-1} |\Delta^\sigma \varepsilon_n| \leqslant \Sigma (n+1)^\alpha \varphi_n^{-1} |\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n| \quad (1 \leqslant \sigma \leqslant \alpha + 1).$$

Доказательство см. [11], стр. 194—195.

Случай $\beta > \alpha + 1$ очевиден в силу включения $|C^{\alpha+1}| \subset |C^\beta|$.

Замечание 2. Положив в теореме 2 $\varphi_n = 1$ и пользуясь формулой (6.1.6) в книге [10], получаем более простое доказательство достаточности условий теоремы 4 статьи [4]. В частности, отсюда получаем обобщения последней теоремы и теоремы 2 статьи [7] и для $\alpha > -1$, так как необходимость их условий при $-1 < \alpha < 0$ вытекает из условия (24) статьи [4] (без применения условия (A)).

## § 4. Обобщение теорем 1 и 2 на двойные ряды

Двойной ряд

$$\sum_{m,n} u_{mn} \tag{9}$$

называем $l$-$C_\psi^{\alpha,\beta}$-суммируемым, если двойной ряд $\sum\limits_{m,n} \psi_{mn} u'_{mn}$,

где

$$u'_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \frac{kl}{mn} \frac{A_{m-k}^{\alpha-1} A_{n-l}^{\beta-1}}{A_m^\alpha A_n^\beta} u_{kl},$$

абсолютно сходится.

Двойную последовательность $\{U_{mn}\}$ называем $C_\psi^{\alpha,\beta}$-ограниченной ($b$-$C_\psi^{\alpha,\beta}$-суммируемой, $r$-$C_\psi^{\alpha,\beta}$-суммируемой), если последовательность $\{\psi_{mn} U'_{mn}\}$, где

$$U'_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \frac{A_{m-k}^{\alpha-1} A_{n-l}^{\beta-1}}{A_m^\alpha A_n^\beta} U_{kl},$$

ограничена ($b$-сходится, $r$-сходится).

Соответственно теоремам 1 и 2 в случае двойных рядов имеют место следующие теоремы.

Теорема 3. *Пусть*** $\{\Psi_{mn}\}$ — *невозрастающая двойная последовательность положительных чисел,* $\alpha, \beta \geqslant 0$, $\gamma, \delta > -1$. *Если* $\gamma, \delta \leqslant \alpha, \beta$, *то для того, чтобы из* $l$-$C_\psi^{\alpha,\beta}$-*суммируемости ряда* (9) *всегда*

---

* При $-1 \leqslant \alpha < 0$ названные леммы не используются, $a = -1$, $b = 0$, а соотношение $\Delta \varepsilon_n = \Delta^{-\alpha} (\Delta^{\alpha+1} \varepsilon_n)$ (для преобразования суммы $F'$) следует из условия (M').

** При $\psi_{mn} = 1$ теорема 3 переходит в теорему 3 статьи [5] (если $\gamma, \delta \geqslant 0$) и теорему 3 статьи [7] (если $\gamma < 0$ или $\delta < 0$).

*следовала* $C^{\gamma,\delta}$*-суммируемость* ($C_b^{\gamma,\delta}$*-суммируемость,* $C_r^{\gamma,\delta}$*-суммируемость или* $C_l^{\gamma,\delta}$*-суммируемость) ряда*

$$\sum_{m,n} \varepsilon_{mn} u_{mn}, \tag{10}$$

*необходимы и достаточны условия*

$$\varepsilon_{mn} = O\left[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{\delta-\beta}\psi_{mn}\right],$$

$$\Delta_m^{\alpha} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha}(n+1)^{\delta-\beta}\psi_{mn}], \tag{K$_1$}$$

$$\Delta_n^{\beta} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha}(n+1)^{-\beta}\psi_{mn}]. \tag{K$_2$}$$

$$\Delta_{mn}^{\alpha\beta} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\alpha}(n+1)^{-\beta}\psi_{mn}]. \tag{J}$$

*Если* $\delta > \beta$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\delta = \beta$.

*Если* $\gamma > \alpha$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\gamma = \alpha$.

Теорема 4. *Пусть* $\{\psi_{mn}\}$ *— невозрастающая двойная последовательность положительных чисел,* $\alpha, \beta \geqslant -1$, $\gamma, \delta > -1$. *Если* $\gamma, \delta \leqslant \alpha+1, \beta+1$, *то для того, чтобы из* $C_\psi^{\alpha+1,\beta+1}$*-ограниченности (или* $b$-$C_\psi^{\alpha+1,\beta+1}$*-суммируемости, или* $r$-$C_\psi^{\alpha+1,\beta+1}$*-суммируемости) последовательности*

$$\{mn\, u_{mn}\} \tag{11}$$

*всегда следовала* $C_l^{\gamma,\delta}$*-суммируемость ряда* (10), *необходимы и достаточны условия*

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma}(n+1)^{\beta-\delta}\psi_{mn}^{-1}\,|\varepsilon_{mn}| < \infty, \tag{M}$$

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha}(n+1)^{\beta-\delta}\psi_{mn}^{-1}\,|\Delta_m^{\alpha+1}\varepsilon_{mn}| < \infty, \tag{L$_1$}$$

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma}(n+1)^{\beta}\psi_{mn}^{-1}\,|\Delta_n^{\beta+1}\varepsilon_{mn}| < \infty, \tag{L$_2$}$$

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha}(n+1)^{\beta}\psi_{mn}^{-1}\,|\Delta_{mn}^{\alpha+1\,\beta+1}\varepsilon_{mn}| < \infty. \tag{B}$$

*Если* $\delta > \beta+1$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\delta = \beta+1$.

*Если* $\gamma > \alpha+1$, *то необходимы и достаточны те же условия, что и при* $\gamma = \alpha+1$.

Замечание 3. *Если* $-1 < \gamma \leqslant 0$, *то в теореме* 3 *можем опустить условия* (K$_1$) *и* (J), *а в теореме* 4 *— условия* (L$_1$) *и* (B). *Если* $-1 < \delta \leqslant 0$, *то в теореме* 3 *можем опустить условия* (K$_2$) *и* (J), *а в теореме* 4 *— условия* (L$_2$) *и* (B).

## § 5. Доказательство теоремы 3

Необходимость. Аналогично, как теорему 1 статьи [5], можно доказать:

*Для того, чтобы из $l$-$C_{\psi}^{\alpha,\beta}$-суммируемости ряда* (9) *всегда следовала $C^{\gamma,\delta}$-суммируемость ряда* (10), *необходимо условие*

$$\mu\nu A_{\mu}^{\alpha} A_{\nu}^{\beta} \sum_{k,l=\mu,\nu}^{m,n} A_{k-\mu}^{-\alpha-1} A_{l-\nu}^{-\beta-1} \frac{A_{m-k}^{\gamma} A_{n-l}^{\delta}}{A_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \frac{\varepsilon_{kl}}{kl} = O(\psi_{\mu\nu}). \tag{12}$$

При помощи рассуждений, приведенных в § 2 данной статьи и в § 2 статьи [5], можем из условия (12) вывести необходимость условий теоремы 3.

Достаточность. Аналогично, как теорему 2 статьи [5], можно доказать:

*Для того, чтобы из $l$-$C_{\psi}^{\alpha,\beta}$-суммируемости ряда* (9) *всегда следовала $C_l^{\gamma,\delta}$-суммируемость ряда* (10), *необходимо и достаточно условие*

$$\sum_{m,n=\mu,\nu}^{\infty} \frac{\mu\nu}{mnA_m^{\gamma} A_n^{\delta}} \left| \sum_{k,l=\mu,\nu}^{m,n} A_{k-\mu}^{-\alpha-1} A_{l-\nu}^{-\beta-1} A_{m-k}^{\gamma-1} A_{n-l}^{\delta-1} \varepsilon_{kl} \right| = O[(\mu+1)^{-\alpha} (\nu+1)^{-\beta} \psi_{\mu\nu}]. \tag{13}$$

Остается доказать, что из условий теоремы 3 следует условие (13). Последнее доказывается при помощи рассуждений, приведенных в § 4 статьи [5] и при доказательстве теоремы 3 статьи [7], заменяя леммы 5 и 6 статьи [5] следующими:

Лемма 2. *Из условий*

$$\varepsilon_{mn} = O(1) \tag{A}$$

*и* (J) *для всех* $0 < \sigma, \tau \leqslant \alpha, \beta$ *следует*

$$\Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\sigma} (n+1)^{-\tau} \psi_{mn}].$$

Лемма 3. *Из условий* (A) *и* ($K_1$) *для всех* $0 < \sigma \leqslant \alpha$ *вытекает*

$$\Delta_m^{\sigma} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{-\sigma} (n+1)^{\delta-\beta} \psi_{mn}],$$

*а из условий* (A) *и* ($K_2$) *для всех* $0 < \tau \leqslant \beta$

$$\Delta_n^{\tau} \varepsilon_{mn} = O[(m+1)^{\gamma-\alpha} (n+1)^{-\tau} \psi_{mn}].$$

Доказательства такие же, как у лемм 5 и 6 статьи [5].

## § 6. Доказательство теоремы 4

Аналогично, как теорему 1 статьи [6], можно доказать:

*Для того, чтобы из $C_{\psi}^{\alpha+1,\beta+1}$-ограниченности (или $b$-$C_{\psi}^{\alpha+1,\beta+1}$-суммируемости, или $r$-$C_{\psi}^{\alpha+1,\beta+1}$-суммируемости) последовательности* (11) *всегда следовала $C_{\lambda}^{\gamma,\delta}$-суммируемость ряда* (10), *необходимо и достаточно условие*

$$\sum_{\mu,\nu}\frac{\mu\nu}{(\mu+1)(\nu+1)}\frac{1}{\psi_{\mu\nu}}A_{\mu}^{\alpha+1}A_{\nu}^{\beta+1}\left|\sum_{m,n\in\mathfrak{M}}\frac{1}{mnA_m^{\gamma}A_n^{\delta}}\sum_{k,l=\mu,\nu}^{m,n}A_{k-\mu}^{-\alpha-2}A_{l-\nu}^{-\beta-2}A_{m-k}^{\gamma-1}A_{n-l}^{\delta-1}\varepsilon_{kl}\right|\leqslant K \tag{14}$$

для любого $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — конечное множество пар неотрицательных целых чисел, а $K$ не зависит от $\mathfrak{M}$.

Необходимость. Положив $m, n=\mu, \nu$ в условии (14) (что допустимо, ибо часть I теоремы 1 статьи [3], как видно из ее доказательства, распространяется на двойные ряды), получаем необходимость условия (M).

Положив $\alpha=-1$ и $n=\nu$ в условии (14), в силу включения* $C_r^{0,\beta}\subset C_r^{\alpha+1,\beta+1}$, получаем условие, напоминающее (7), откуда следует необходимость условия

$$\sum_{m,n}(m+1)^{-1}(n+1)^{\beta-\delta}\psi_{mn}^{-1}\,|\,\varepsilon_{mn}\,|<\infty,$$

а в силу включения $C_r^{0,0}\subset C_r^{\alpha+1,\beta+1}$, положив $\alpha=\beta=-1$ в условии (14), получаем необходимость условия

$$\sum_{m,n}(m+1)^{-1}(n+1)^{-1}\psi_{mn}^{-1}\,|\,\varepsilon_{mn}\,|<\infty. \tag{15}$$

В силу последнего условия, из (14) (положив в нем $n=\nu$) выводим условие, напоминающее (8), откуда, ввиду включения $C_r^{\alpha,\beta+1}\subset C_r^{\alpha+1,\beta+1}$ $(\alpha>-1)$, заключаем необходимость условия $(L_1)$, а положив $\beta=-1$ в (14), учитывая (7) и (8), таким же образом заключим необходимость условия

$$\sum_{m,n}(m+1)^{\alpha}(n+1)^{-1}\psi_{mn}^{-1}\,|\,\Delta_m^{\alpha+1}\varepsilon_{mn}\,|<\infty.$$

Наконец, из условия (14), в силу (15), аналогично (8) выводим

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{k,l}\frac{\mu\nu}{(\mu+1)(\nu+1)}\frac{1}{\psi_{\mu\nu}}A_{\mu}^{\alpha+1}A_{\nu}^{\beta+1}\left|\Delta_{\mu\nu}^{\alpha+1\,\beta+1}\frac{\varepsilon_{\mu\nu}}{\mu\nu}\right|\leqslant K\ \ (k,l=0,1,\ldots),$$

откуда ввиду соответствующих включений и легко доказываемого обобщения на двойные ряды лемм 1 и 5 статьи [1] заключаем необходимость условия (B).

---

* См. [8], стр. 32, теорема 6.

Необходимость остальных условий теоремы 4 доказывается аналогично.

Достаточность. Остается доказать, что из условий теоремы 4 следует условие (14). Последнее доказывается при помощи рассуждений, приведенных в § 5 статьи [6] (с соответствующими упрощениями, указанными в § 3 нашей статьи) и при доказательстве теоремы 4 статьи [7], причем в этом доказательстве нам нужны лемма 7 статьи [4], лемма 6 статьи [6] и следующие леммы.

Лемма 4. *Из условий* (A) *и* (B) *для всех* $0 < \sigma, \tau \leqslant \alpha + 1, \beta + 1$ *вытекает*

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\sigma-1}(n+1)^{\tau-1}\psi_{mn}^{-1} \,|\, \Delta_{mn}^{\sigma\tau} \varepsilon_{mn} \,| < \infty.$$

Лемма 5. *Из условий* (A) *и* ($L_1$) *для всех* $0 < \sigma \leqslant \alpha + 1$ *вытекает*

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\sigma-1}(n+1)^{\beta-\delta}\psi_{mn}^{-1} \,|\, \Delta_{m}^{\sigma} \varepsilon_{mn} \,| < \infty,$$

*а из условия* (A) *и* ($L_2$) *для всех* $0 < \tau \leqslant \beta + 1$

$$\sum_{m,n} (m+1)^{\alpha-\gamma}(n+1)^{\tau-1}\psi_{mn}^{-1} \,|\, \Delta_{n}^{\tau} \varepsilon_{mn} \,| < \infty.$$

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 13 статьи [9] и основывается на лемме 1. Лемма 5 непосредственно вытекает из леммы 1.

Замечание 4. Положив в теореме 4 $\psi_{mn} = 1$ и пользуясь формулой

$$\tau_{mn}^{\alpha+1,\beta+1} = (\alpha+1)(\beta+1)(\sigma_{mn}^{\alpha,\beta} - \sigma_{mn}^{\alpha,\beta+1} - \sigma_{mn}^{\alpha+1,\beta} + \sigma_{mn}^{\alpha+1,\beta+1}),$$

вытекающей из формул (3.9), (2.3), (2.2) и (1.4) статьи [8], получаем более простые доказательства достаточности условий теоремы 2 статьи [6] и теоремы 4 статьи [7]. В частности, отсюда получаем обобщения последних теорем и для $\alpha, \beta > -1$ при $\gamma, \delta \leqslant \alpha + 1, \beta + 1$, так как необходимость их условий для $-1 < \alpha < 0$ или $-1 < \beta < 0$ доказывается так же, как в лемме 2 статьи [6] (если вместо условия (A) использовать условие ($M^3$)).

## ЛИТЕРАТУРА


1. L. S. Bosanquet, H. C. Chow, Some remarks on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1957, **32**, 73—82.
2. H. C. Chow, Note on convergence and summability factors. J. London Math. Soc., 1954, **29**, 459—476.
3. A. Peyerimhoff, Über ein Lemma von Herrn H. C. Chow. J. London Math. Soc., 1957, **32**, 33—36.
4. С. Барон, Новые доказательства основных теорем о множителях суммируемости. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, т. IX, № 1, 1960.
5. С. Барон, Множители суммируемости и абсолютной суммируемости для двойных рядов, абсолютно суммируемых методом Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 118—134.

6. С. Барон, Множители абсолютной суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, **102**, 135—155.
7. С. Барон, Т. Таммай, О множителях суммируемости для метода Чезаро отрицательного порядка. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, т. XI, № 1, 1962.
8. И. Е. Жак, М. Ф. Тиман, О суммировании двойных рядов. Матем. сб., 1954, **35** (77), 21—56.
9. Г. Кангро, С. Барон, Множители суммируемости для Чезаро-суммируемых и Чезаро-ограниченных двойных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1959, **73**, 3—49.
10. Г. Харди, Расходящиеся ряды, М., 1951.
11. G. D. Dikshit, On the absolute summability factors of infinite series. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1959, A**25**, 191—200.
12—14. T. Pati, Z. U. Ahmad, On the absolute summability factors of infinite series (I—III). Tohoku Math. J., 2, 1960, **12**, 222—232; Indian J. Math., 1960, **2**, 29—39; Indian J. Math., 1960, 2, 73—87.
15. Z. U. Ahmad, On the absolute Cesàro summability factors of infinite series. Math. Z., 1961, **76**, 295—310.

*Тартуский государственный университет*
*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
3. VI 1961

## H. C. CHOW' KAHEST TEOREEMIST JA NENDE ÜLDISTUSTEST KAHEKORDSETELE RIDADELE

**S. Baron,**
**füüsikalis-matemaatiliste teaduste kandidaat**

**E. Pallum, M. Peterson**

*Resümee*

Olgu $\{\varphi_n\}$ mittekasvav positiivsete arvude jada, $\alpha \geqslant 0$, $\beta > -1$. Rida

$$\Sigma u_n \tag{1}$$

nimetame $|C_\varphi^\alpha|$-summeeruvaks, kui $\Sigma\varphi_n|u'_n| < \infty$, kus

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} u_k .$$

Jada $\{U_n\}$ nimetame $C_\varphi^\alpha$-tõkestatuks ($C_\varphi^\alpha$-summeeruvaks), kui jada $\{\varphi_n U'_n\}$ on tõkestatud (koonduv), kus

$$U'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} U_k .$$

Käesolevas artiklis antakse tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et

1) rea (1) $|C_\varphi^\alpha|$-summeeruvusest järelduks rea

$$\Sigma\varepsilon_n u_n \tag{2}$$

$C^\beta$- või $|C^\beta|$-summeeruvus (teoreem 1);

2) jada $\{nu_n\}$ $C_\varphi^\alpha$-tõkestatusest või $C_\varphi^\alpha$-summeeruvusest järelduks rea (2) $|C^\beta|$- summeeruvus (teoreem 2).

Teoreemid 1 ja 2 üldistatakse ka kahekordsetele ridadele (teoreemid 3 ja 4).

*Tartu Riiklik Ülikool*
*Eesti NSV Teaduste Akadeemia*
*Küberneetika Instituut*

Saabus toimetusse
3. VI 1961

## ÜBER ZWEI SÄTZE VON H. C. CHOW UND IHRE VERALLGEMEINERUNGEN AUF DOPPELREIHEN

S. Baron, E. Pallum, M. Peterson

*Zusammenfassung*

Es sei $\{\varphi_n\}$ eine nichtwachsende positive Zahlenfolge, und $\alpha \geqslant 0$, $\beta > -1$.

Wir nennen eine Reihe

$$\Sigma u_n \tag{1}$$

$|C_\varphi^\alpha|$-summierbar, wenn $\Sigma\varphi_n|u'_n| < \infty$, wo

$$u'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} u_k.$$

Wir nennen eine Folge $\{U_n\}$ $C_\varphi^\alpha$-beschränkt ($C_\varphi^\alpha$-summierbar), wenn die Folge $\{\varphi_n U'_n\}$ beschränkt (konvergent) ist, wo

$$U'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} U_k.$$

Es ist das Ziel dieser Arbeit, notwendige und hinreichende Bedingungen anzugeben, unter welchen

1) für alle $|C_\varphi^\alpha|$-summierbaren Reihen (1) die Reihe

$$\Sigma\, \varepsilon_n u_n \tag{2}$$

$C^\beta$- oder $|C^\beta|$-summierbar wäre (Theorem 1);

2) für alle $C_\varphi^\alpha$-beschränkten oder $C_\varphi^\alpha$-summierbaren Folgen $\{nu_n\}$ die Reihe (2) $|C^\beta|$-summierbar wäre (Theorem 2).

Diese Theoreme werden auch für Doppelreihen verallgemeinert (Theoreme 3 und 4).

*Staatsuniversität zu Tartu*
*Institut für Kybernetik*
*der Akademie der Wissenschaften der Estnischen SSR*

Eingegangen
am 3. Juni 1961