EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. IX KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1960, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ IX
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1960, № 4

О ПОСТРОЕНИИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ГРУПП

И. ПЕТЕРСЕН

Назовем группу G косым произведением двух своих подгрупп A и B и обозначим $G = A \circ B$, если всякий элемент g группы G может быть однозначно представлен в виде $g = ab$, где $a \in A$, $b \in B$. Из этого определения следует $AB = BA$ и $A \cap B = e$. Г. Саппа показал [1], что всякое косое произведение $A \circ B$ можно представить как множество всех пар $[a, b]$ с операцией

$$[a_1, b_1][a_2, b_2] = [a_1 a_2^{b_1}, b_1^{a_2} b_2], \tag{1}$$

где элементы $a_2^{b_1} \in A$ и $b_1^{a_2} \in B$ однозначно определены элементами a_2 и b_1 и соответствия $a_2 \longleftrightarrow a_2^{b_1}$ и $b_1 \longleftrightarrow b_1^{a_2}$ являются взаимно однозначными.

Условия

$$(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_2 b_1}, \qquad (b^{a_1})^{a_2} = b^{a_1 a_2}, \tag{2}$$

$$(a_1 a_2)^b = a_1^b a_2^{b^{a_1}}, \ (b_1 b_2)^a = b_1^{a^{b_2}} b_2^a \tag{3}$$

необходимы и достаточны, чтобы операция (1) была групповой.

В настоящей заметке исследуется построение всех таких косых произведений двух групп A и B, один множитель (например B) которых не содержит нетривиального нормального делителя произведения. Построение таких произведений сводится к построению изоморфных одному множителю (B) подгрупп определенного типа группы всех взаимно однозначных отображений другого множителя (A).

Назовем взаимно однозначное отображение φ группы A на себя *е*-отображением, если оно оставляет единицу e группы A на месте: $e\varphi = e$. Если φ e-отображение и $a \in A$, то и отображение, переводящее элемент $x \in A$ в элемент $(a\varphi)^{-1}\ (ax)\varphi$, является e-отображением. Назовем это отображение, следуя Дугласу [2], *трансляцией* отображения φ элементом a и обозначим φT_a, так что

$$x \varphi T_a = (a\varphi)^{-1}\ (ax)\varphi. \tag{4}$$

Очевидно, автоморфизмы группы A и только они остаются на месте при трансляции всеми элементами группы A.

Имеют место равенства

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)\varphi = a_1\varphi \cdot a_2\varphi T_{a_1} \cdots a_n\varphi T_{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}, \tag{5}$$

$$(\varphi_1 \varphi_2 \cdots \varphi_n) T_a = \varphi_1 T_a \cdot \varphi_2 T_{a\varphi_1} \cdots \varphi_n T_{a\varphi_1\varphi_2 \cdots \varphi_{n-1}}, \tag{6}$$

$$(\varphi T_{a_1}) T_{a_2} = \varphi T_{a_1 a_2}. \tag{7}$$

Действительно, если в (4) взять $a = a_1$, $x = a_2$, то имеем $(a_1 a_2)\varphi = a_1\varphi \cdot a_2\varphi T_a$, откуда по индукции получим (5). Если же в (4) взять $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, то

$$x(\varphi_1\varphi_2)T_a = (a\varphi_1\varphi_2)^{-1}(ax)\varphi_1\varphi_2 = (a\varphi_1\varphi_2)^{-1}(a\varphi_1(a\varphi_1)^{-1}(ax)\varphi_1)\varphi_2 =$$
$$= ((a\varphi_1)\varphi_2)^{-1}(a\varphi_1((a\varphi_1)^{-1}(ax)\varphi_1))\varphi_2 = x\varphi_1 T_a \cdot \varphi_2 T_{a\varphi_1},$$

или $(\varphi_1\varphi_2)T_a = \varphi_1 T_a \cdot \varphi_2 T_{a\varphi_1}$, откуда по индукции получим и (6).

Наконец, по (4)

$$(x\varphi T_{a_1})T_{a_2} = ((a_1\varphi)^{-1}(a_1 x)\varphi)T_{a_2} = ((a_1\varphi)^{-1}(a_1 a_2)\varphi)^{-1}(a_1\varphi)^{-1}(a_1 a_2 x)\varphi =$$
$$= ((a_1 a_2)\varphi)^{-1}(a_1 a_2 x)\varphi = x\varphi T_{a_1 a_2},$$

т. е. и (7) имеет место.

Назовем группу e-отображений группы A, отображающую в себя при транслировании всеми элементами группы A, T-замкнутой группой отображений группы A. Очевидно, группа всех e-отображений и все подгруппы группы автоморфизмов группы A являются ее T-замкнутыми группами отображений. Менее тривиальные примеры T-замкнутых групп отображений приведены в следующих предложениях.

Если A конечная группа нечетного порядка, то знакопеременная подгруппа симметрической группы всех e-отображений группы A T-замкнута.

Действительно, трансляция e-отображения φ, т. е. отображение $x \longleftrightarrow (a\varphi)^{-1}(ax)\varphi$ можно рассматривать как произведение трех подстановок $x \longleftrightarrow ax$, $x \longleftrightarrow x\varphi$ и $x \longleftrightarrow (a\varphi)^{-1}x$ множества всех элементов группы A. Так как порядок любого элемента a группы нечетного порядка есть число нечетное, то подстановка $x \longleftrightarrow ax$ четная, потому что ее можно разложить на произведение независимых циклов нечетного порядка $(y, ay, \ldots, a^{n-1}y)$. По той же причине $x \longleftrightarrow (a\varphi)^{-1}x$ является четной подстановкой. Если и φ — четная подстановка, то φT_a как произведение трех четных подстановок сама четная.

Множество всех e-отображений группы A, которые отображают смежные классы группы A по нормальному делителю H в себя, является T-замкнутой группой отображений группы A.

Действительно, множество Φ всех таких e-отображений образует группу. Если $\varphi \in \Phi$, то $(ax)\varphi \in axH$, $a\varphi \in aH$ и $(a\varphi)^{-1} \in Ha^{-1}$. Следовательно, $x\varphi T_a = (a\varphi)^{-1}(ax)\varphi \in a^{-1} \cdot axH = xH$, т. е. $\varphi T_a \in \Phi$.

Теорема. *Все косые произведения двух групп, одним множителем которых является данная группа A и второй множитель которых не содержит нетривиального нормального делителя произведения, получаются, если для каждой T-замкнутой группы отображений Φ группы A составить множество всех пар (a, φ), где $a \in A$ и $\varphi \in \Phi$, и определить на этом множестве операцию равенством*

$$(a_1, \varphi_1)(a_2, \varphi_2) = (a_1 \cdot a_2\varphi_1^{-1}, (\varphi_1^{-1} T_{a_2})^{-1}\varphi_2). \tag{8}$$

Доказательство. Докажем, что операция (8) определяет группу. Так как соответствия $a_2 \longleftrightarrow a_2\varphi_1^{-1}$ и $\varphi_1 \longleftrightarrow (\varphi_1^{-1}T_{a_2})^{-1}$ взаимно однозначны, то для этого достаточно доказать, что выполнены (2) и (3), где $a^b = a\varphi^{-1}$ и $b^a = (\varphi^{-1}T_a)^{-1}$. Имеем

$$(a^{b_1})^{b_2} = (a\varphi_2^{-1})\varphi_2^{-1} = a(\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}) = a(\varphi_2\varphi_1)^{-1} = a^{b_2b_1}$$

и, пользуясь (7),

$$(b^{a_1})^{a_2} = (((\varphi^{-1}T_{a_1})^{-1})^{-1}T_{a_2})^{-1} = ((\varphi^{-1}T_{a_1})T_{a_2})^{-1} =$$
$$= (\varphi^{-1}T_{a_1a_2})^{-1} = b^{a_1a_2},$$

дальше по (4)

$$(a_1a_2)^b = (a_1a_2)\varphi^{-1} = a_1\varphi^{-1}(a_1\varphi^{-1})^{-1}(a_1a_2)\varphi^{-1} =$$
$$= a_1\varphi^{-1}\cdot a_2\varphi^{-1}T_{a_1} = a_1\varphi^{-1}\cdot a_2((\varphi^{-1}T_{a_1})^{-1})^{-1} = a_1^b a_2^{b^{a_1}}$$

и по (6) —

$$(b_1b_2)^a = ((\varphi_1\varphi_2)^{-1}T_a)^{-1} = ((\varphi_2^{-1}\varphi_1^{-1})T_a)^{-1} = (\varphi_2^{-1}T_a\cdot\varphi_1^{-1}T_{a\varphi_2^{-1}})^{-1} =$$
$$= (\varphi_1^{-1}T_{a\varphi_2^{-1}})^{-1}(\varphi_2^{-1}T_a)^{-1} = b_1^{a^{b_2}}b_2^a,$$

так, что (2) и (3) выполнены.

Определенная операцией (8) группа G является, очевидно, косым произведением своих подгрупп $\bar{A}$ и $\bar{\Phi}$, образованных всеми парами вида (a, ε) и (e, φ) (ε — единица группы Φ) соответственно. Подгруппа $\bar{A}$ изоморфна группе A. Подгруппа $\bar{\Phi}$ не содержит нетривиального нормального делителя группы G, так как совокупность всех таких $\varphi \in \bar{\Phi}$, для которых $a^b = a\varphi^{-1} = a$ при любом $a \in A$, является, по [3], максимальным нормальным делителем G, содержащимся в $\bar{\Phi}$, а в рассматриваемом случае эта совокупность состоит только из единицы группы Φ.

Пусть теперь $A\circ B$ — некоторое косое произведение, в котором множитель B не содержит нетривиального нормального делителя произведения. Тогда можно $A\circ B$ рассматривать как множество пар $[a, b]$, на котором определена операция равенством (1), причем выполнены (2) и (3). Обозначим $a^b = a\varphi$. Тогда φ является e-отображением группы A. Действительно, φ взаимно однозначно и если в (2) взять $a_1 = a$, $a_2 = e$, то $a^b = a^b e^{b^a}$, откуда $e^{b^a} = e$, или $e\varphi = e$, так как b^a пробегает вместе с b всю группу B. Соответствие $b \to \varphi$ отображает вследствие (2) группу B антигомоморфно на некоторую подгруппу Φ группы всех e-отображений группы A. Ядро этого гомоморфизма, как максимальный нормальный делитель группы $A\circ B$, содержащийся в B (по [3]), равно, по нашему условию, единице. Таким образом, B изоморфна Φ. Покажем, что Φ T-замкнута. Действительно, если $x\varphi = x^b$, то, по (3), имеем

$$x\varphi T_a = (a\varphi)^{-1}(ax)\varphi = (a^b)^{-1}(ax)^b = (a^b)^{-1}a^b x^{b^a} = x^{b^a},$$

так что φT_a как образ элемента b^a при соответствии $b \to \varphi$ содержится в Φ при любом $a \in A$.

Образуем теперь множество G всех пар (a, φ), где $a \in A$ и $\varphi \in \Phi$ и определим на этом множестве операцию равенством (8). Соответствие $[a, b] \to (a, \varphi^{-1})$ отображает $A\circ B$ изоморфно на G. Действительно, это соответствие взаимно однозначно, и произведению $[a_1, b_1][a_2, b_2] = [a_1 a_2^{b_1}, b_1^{a_2} b_2]$ соответствует пара $g = (a_1 \cdot a_2\varphi_1, (\varphi_1 T_{a_2})^{-1}\varphi_2^{-1})$, так как $a_2^{b_1} = a_2\varphi_1$ и по (2) и (4)

$$a^{b_1^{a_2} b_2} = (a^{b_2})^{b_1^{a_2}} = (a_2^{b_1})^{-1}(a_2^{b_1}(a^{b_2})^{b_1^{a_2}}) = (a_2^{b_1})^{-1}(a_2 a^{b_2})^{b_1} =$$
$$= (a_2\varphi_1)^{-1}(a_2 \cdot a\varphi_2)\varphi_1 = a\varphi_2(\varphi_1 T_{a_2}).$$

Но по (8) $(a_1, \varphi_1^{-1})(a_2, \varphi_2^{-1}) = (a_1 \cdot a_2\varphi_1, (\varphi_1 T_{a_2})^{-1}\varphi_2^{-1}) = g$. Теорема доказана.

Если Φ и Ψ две T-замкнутые группы отображений группы A и найдется такой автоморфизм α группы A, что $\Psi = \alpha^{-1}\Phi\alpha$, то соответствующие косые произведения, построенные по теореме, изоморфны.

Действительно, соответствие $(a, \varphi) \to (a\alpha, \psi) = (a\alpha, \alpha^{-1}\varphi\alpha)$ является изоморфизмом между $A \circ \Phi$ и $A \circ \Psi$, так как по (8), (6) и вследствие того, что α и α^{-1} как автоморфизмы группы A оставляются на месте при трансляции,

$$(a_1\alpha, \alpha^{-1}\varphi_1\alpha)(a_2\alpha, \alpha^{-1}\varphi_2\alpha) = (a_1\alpha \cdot a_2\alpha\alpha^{-1}\varphi_1^{-1}\alpha, ((\alpha^{-1}\varphi_1^{-1}\alpha)T_{a_2\alpha})^{-1}\alpha^{-1}\varphi_2\alpha) =$$
$$= (a_1\alpha \cdot a_2\varphi_1^{-1}\alpha, (\alpha^{-1} \cdot \varphi_1^{-1} T_{a_2\alpha\alpha^{-1}} \cdot \alpha)^{-1}\alpha^{-1}\varphi_2\alpha) =$$
$$= ((a_1 \cdot a_2\varphi_1^{-1})\alpha, \alpha^{-1}(\varphi_1^{-1} T_{a_2})^{-1}\varphi_2\alpha).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Zappa, Atti secondo Congresso Un. Mat. Ital. Bologna 1940, Roma, 1942, 119—125.
2. J. Douglas, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 37, 1951, 604—610.
3. J. Szép, Comment. Math. Helv., 22, 1948, 31—33.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29 XII 1959

KAHE VAHETATAVA RÜHMA KORRUTISTE KONSTRUKTSIOONIST

I. Petersen

Resümee

Artiklis käsitletakse kahe vahetatava rühma A ja B selliseid korrutisi $(G = A \circ B)$, milles iga elementi võib esitada üheselt kujul $g = ab$ ning mille tegur B ei sisalda korrutise mittetriviaalset normaaljagajat. Tõestatakse, et iga niisugust korrutist võib antud esimese teguri A puhul konstrueerida paaride (a, φ) hulgana, millel operatsioon on defineeritud võrdusega (8), kus $a \in A$, $\varphi \in \Phi$ ja Φ on rühma A kõigi üks-üheste ühikut paigale jätvate iseeneselekujutuste rühma alarühm, mis on kinnine kõigi võrdusega (4) defineeritud operatsioonide T_a $(a \in A)$ suhtes.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
29. XII 1959

ÜBER DIE KONSTRUKTION DER PRODUKTE ZWEIER VERTAUSCHBARER GRUPPEN

I. Petersen

Zusammenfassung

In der Abhandlung werden solche Produkte $G = A \circ B$ vertauschbarer Gruppen A und B betrachtet, bei denen jedes Element eindeutig in der Form $g = ab$ darstellbar ist und deren Teiler B keinen nichttriviellen Normalteiler des Produktes enthält. Es wird nachgewiesen, dass jedes Produkt dieser Art mit gegebenem erstem Teiler A sich als eine Menge von Paren (a, φ) durch die Operation (8) konstruieren lässt, wo $a \in A$, $\varphi \in \Phi$ und Φ eine Untergruppe der Gruppe aller ein-eindeutigen Abbildungen der Gruppe A an sich ist, die das Einzelelement invariant lassen, wobei Φ bezüglich aller durch (4) definierten Operationen T_a $(a \in A)$ abgeschlossen ist.

Institut für Kybernetik
der Akademie der Wissenschaften der Estnischen SSR

Eingegangen
am 29. Dez. 1959