

А. ЭПШТЕЙН

### О ВЛИЯНИИ ТЕРМИЧЕСКОЙ СТРАТИФИКАЦИИ И ДИНАМИЧЕСКОЙ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ПОПЕРЕЧНОГО ПОТОКА НА ТРАЕКТОРИЮ КРУГЛОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ \*

Решение задачи о траектории турбулентной круглой струи в равномерном горизонтальном потоке было предложено в работе [1]. В ряде практических случаев, однако, приходится считаться с изменением скорости и температуры потока по высоте, т. е. с динамической и термической неравномерностью потока. В таких условиях, в частности, развивается дымовая струя в атмосфере.

В настоящей работе делается попытка приближенного учета указанных факторов, причем предлагаемое ниже решение является дальнейшим развитием метода, изложенного в [1]. Принятые там принципиальные допущения остаются прежними. Здесь будет рассматриваться лишь случай истечения струи перпендикулярно потоку, имеющий наибольшее практическое значение. При этом имеется в виду проблема развития дымовых факелов в атмосфере.

Условие равновесия элемента струи (рис. 1) в проекции на нормаль к ее оси под действием сил центробежной, гравитационной и давления поперечного потока:

$$\frac{q_v v^2 F}{r} = - \frac{c_n}{2} q_w \omega^2 b \sin^2 \alpha + g \Delta q F \cos \alpha, \quad (1)$$

где  $v, q_v$  — средняя скорость и плотность струи в данном сечении соответственно;

$\omega, q_w$  — переменные по высоте скорость и плотность поперечного потока соответственно;

$F$  — площадь данного поперечного сечения струи;

$r$  — радиус кривизны оси струи в данном сечении;

$\alpha$  — местный угол наклона оси струи к горизонтали;

$c_n$  — коэффициент профильного сопротивления струи;

$\Delta q = q_v - q_w$  — избыточная плотность струи в данном сечении;

$b$  — поперечная ширина струи в данном сечении.

Условие изменения вертикальной составляющей количества движения струи:

$$q_v v^2 F \sin \alpha = q_v V^2 F_0 + \int_0^l g \Delta q F dl, \quad (2)$$

\* Работа выполнена под руководством доктора технических наук Ю. Иванова.

где  $V, \rho_v$  — начальная скорость и плотность струи соответственно;  
 $F_0$  — площадь начального поперечного сечения струи;  
 $l$  — расстояние вдоль криволинейной оси струи.

Условие равенства горизонтальной составляющей скорости струи и скорости поперечного потока:

$$v_x = v \cos \alpha = w. \quad (3)$$

Условие изменения избыточного теплосодержания струи:

$$d(\rho_v F v \Delta \Theta') = M_n \Delta \Theta_a dl, \quad (4)$$

где  $\Delta \Theta' = \Theta_v - \Theta_w$ ,  $\Delta \Theta_a = \Theta_w - \Theta_w$ ;

$\Theta_v$  — средняя потенциальная температура струи в данном сечении;

$\Theta_w, \Theta_w$  — потенциальная температура поперечного потока на произвольной высоте и на высоте источника соответственно;

$M_n$  — секундная масса присоединенного к струе воздуха на единицу длины струи.

Условие изменения массы струи

$$d(\rho_v F v) = M_n dl. \quad (5)$$

С помощью (5) приводим равенство (4) к виду

$$d(\rho_v F v \Delta \Theta) = -\rho_v F v d\Theta_w \quad (6)$$

или, после интегрирования,

$$\rho_v F v \Delta \Theta = \rho_v F_0 V \Delta \Theta_0 - \int_{\Theta_w}^{\Theta_w} \rho_v F v d\Theta_w, \quad (7)$$

где  $\Delta \Theta = \Theta_v - \Theta_w$ ;

$\Delta \Theta_0 = \Theta_v - \Theta_w$ ;

$\Theta_v$  — начальная потенциальная температура струи.

Уравнение газового состояния

$$\frac{\rho_v}{\rho_w} = \frac{\Theta_w}{\Theta_v}, \quad \frac{\rho_v}{\rho_w} = \frac{\Theta_w}{\Theta_v} \quad (8)$$

позволяет преобразовать (7) к виду

$$\Theta_w \Delta \rho F v = \Theta_w \Delta \rho_0 F_0 V + \int_{\rho_w}^{\rho_w} \frac{\rho_v}{\rho_w} F v d(\Theta_w \Delta \rho_a), \quad (9)$$

где  $\Delta \rho_a = \rho_w - \rho_w$ ;

$\rho_w$  — плотность поперечного потока на уровне источника.

Упрощение (9) возможно в предположении, что разность плотностей струи и поперечного потока не влияет на величину интеграла в правой части (9), т. е. при  $\Delta \rho \neq 0$ ,  $\rho_v / \rho_w \approx 1$ . Вносимая этим погрешность не будет очень значительной при умеренных значениях  $\Delta \Theta_0$  (или  $\Delta \rho_0$ ), так как уже вблизи источника величина  $\rho_v / \rho_w$  быстро приближается к единице.



Для простоты будем рассматривать лишь случай линейной стратификации окружающей среды, т. е.  $\frac{d\rho_w}{dy} = \text{const}$ . В этом случае

$$\rho_w = \rho_w + \left( \frac{d\rho_w}{dy} \right) y. \quad (10)$$

С учетом сказанного выше, а также имея в виду, что  $\Theta_w \approx \Theta_w$ , получим окончательно условие изменения плавучести струи:

$$\Delta \rho F v = \Delta \rho_0 F_0 V + \left( \frac{d\rho_w}{dy} \right) \int_0^y F v dy. \quad (11)$$

Если под поперечным потоком имеется в виду ветер в атмосфере, то профиль скорости потока удобно задать степенной зависимостью [2]

$$w = W \left( \frac{H+y}{H} \right)^\mu, \quad (12)$$

где  $W$  — скорость ветра на уровне источника (среза дымовой трубы);

$H$  — высота источника над поверхностью.

Величина  $\mu$  зависит от стратификации поперечного потока ( $0 \leq \mu < 1$ ). В формуле (12) предполагается  $H \gg y_0$  (рис. 1).

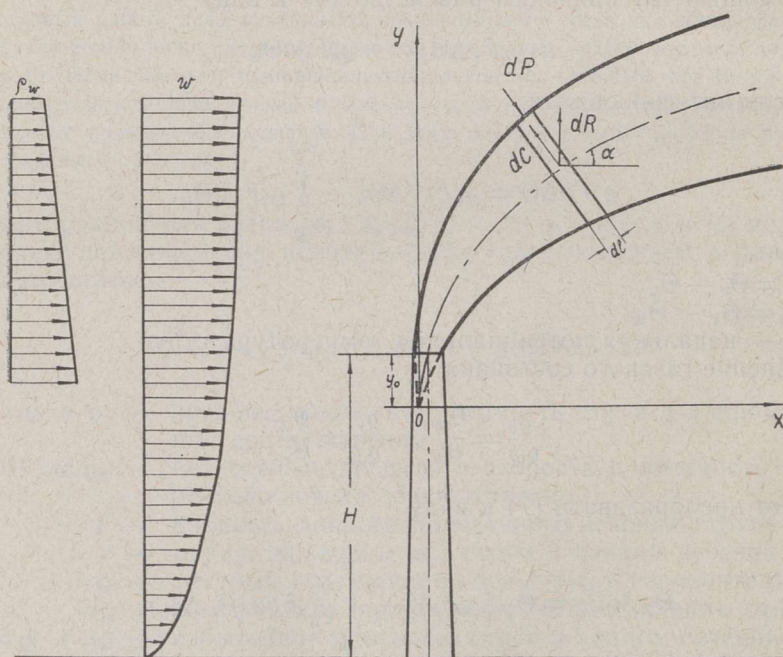


Рис. 1. Схема струй в поперечном потоке.

С помощью (2), (3), (11), (12) можно в результате преобразования равенства (1) получить следующее интегрально-дифференциальное уравнение изогнутой оси струи, выраженное через безразмерные переменные  $\xi = x/D_0$ ,  $\eta = y/D_0$ ,  $\beta = b/D_0$  (с началом координат в полюсе струи):



$$\begin{aligned} & \frac{1}{\eta'^2} \left[ \frac{J\kappa}{(\kappa + \eta)^\mu} + \frac{4G}{\pi(\kappa + \eta)^\mu} \int_0^\eta f_y(\kappa + \eta)^\mu d\eta \right] - \\ & - \frac{\eta''}{\eta'^3} \left[ I + J\kappa \int_0^\xi \frac{d\xi}{(\kappa + \eta)^\mu} + \frac{4G}{\pi} \int_0^\xi \frac{d\xi}{(\kappa + \eta)^\mu} \int_0^\eta f_y(\kappa + \eta)^\mu d\eta \right] = \\ & = \frac{2c_n\kappa}{\pi} (1 + G_1\eta) (\kappa + \eta)^{2\mu} \beta, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} I &= \frac{\varrho_V V^2}{\varrho_W W^2} = \frac{\Theta_W V^2}{\Theta_V W^2}; \quad J = \frac{gD_0 V \Delta \varrho_0}{W^3 \varrho_W} = \frac{gD_0 V \Delta \Theta_0}{W^3 \Theta_V}; \\ G &= Fr G_1; \quad G_1 = \frac{D_0}{\varrho_W} \left( \frac{d\varrho_w}{dy} \right); \quad Fr = \frac{gD_0}{W^2}; \\ \kappa &= H/D_0; \quad f_y = F_y/D_0^2; \end{aligned}$$

$D_0$  — начальный диаметр струи, равный диаметру выходного сечения источника.

Безразмерные комплексы  $G$  и  $G_1$  отражают влияние стратификации поперечного потока через изменение плавучести струи и изменение по высоте динамического напора поперечного потока соответственно.

Между градиентами плотности и температуры существует следующая связь:

$$\frac{1}{\varrho_w} \left( \frac{d\varrho_w}{dy} \right) = - \frac{\Theta_w}{\Theta_w^2} \left( \frac{d\Theta_w}{dy} \right) \approx - \frac{1}{\Theta_w} \left( \frac{d\Theta_w}{dy} \right) = - \frac{1}{T_w} \left( \frac{dT_w}{dy} + \Gamma \right), \quad (14)$$

где  $\Gamma$  — сухоадиабатический градиент температуры, связанный с гидростатическим изменением атмосферного давления по высоте ( $\Gamma = 0,01$  град/м).

Связь между потенциальной и абсолютной температурами:

$$\Theta = T + \Gamma(H + y). \quad (15)$$

Если закон изменения ширины струи  $\beta$ , а также вертикальной проекции площади поперечного сечения струи  $f_y$  известны, то из решения уравнения (13) при соответствующих граничных условиях получается уравнение траектории струи.

Численное интегрирование (13), в принципе возможно, например, с помощью электронно-вычислительной машины.

Рассмотрим случаи, когда решение уравнения (13) получается в квадратурах.

При достаточно большой высоте источника  $H$  изменение скорости поперечного потока становится незначительным и ее можно принять за постоянную величину, равную  $W$ . Как явствует из (12),  $w = W$  при  $\mu = 0$ .

Величина  $G_1\eta$  в правой части уравнения (13) при обычных размерах дымовых труб, высотах подъема струи и стратификации окружающей среды имеет порядок менее  $10^{-2}$ , т. е. можно считать  $G_1\eta \ll 1$ .

Будем также считать, что и в стратифицированной среде ширина струи изменяется по линейному закону, принятому в [1]:



$$\beta = c\eta, \quad (16)$$

где  $c$  — коэффициент пропорциональности.

Заметного отклонения от этой закономерности можно ожидать на значительных расстояниях от источника, но вопрос о границах, в которых возможна такая аппроксимация, нуждается в дополнительной проверке.

Если считать, что и вертикальный поперечный размер струи изменяется по тому же закону, т. е.

$$\beta' = c'\eta, \quad (17)$$

то

$$f_y = \lambda\beta\beta' = \lambda cc'\eta^2, \quad (18)$$

где  $\lambda$  и  $c'$  — коэффициенты пропорциональности.

С учетом сказанного выше можно привести уравнение (13) к следующему виду:

$$\frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{\eta} \left( I + J\xi + \frac{4\lambda cc'}{3\pi} G \int_0^\xi \eta^3 d\xi \right) \right] = \frac{2c_n c}{\pi} \eta. \quad (19)$$

Начальные условия:

$$\text{при } \xi = 0, \quad \eta(0) = 0, \quad \eta'(0) \rightarrow \infty. \quad (20)$$

После интегрирования (19) по  $\eta$  и умножения обеих частей полученного равенства на  $\eta'$  к условиям (20) добавляется еще одно:

$$\frac{c_n c}{\pi} \eta^2(0) \eta'(0) = I. \quad (21)$$

В результате последующего дифференцирования по  $\xi$  и замены переменной  $\eta'^2 = \zeta(\eta)$  получаем линейное дифференциальное уравнение:

$$\zeta' + \frac{4}{\eta} \zeta = \frac{2k^3 J}{3\eta^2} + \frac{2}{3} k^3 k_1 G \eta, \quad (22)$$

которое решается известными методами. Здесь

$$k = (3\pi/c_n c)^{1/2}, \quad k_1 = 4\lambda cc'/3\pi. \quad (23)$$

Окончательно получаем уравнение траектории струи в стратифицированной среде в следующем виде:

а) при  $G < 0$  (устойчивая стратификация)

$$\xi = \frac{1}{k\sqrt{-kk_1 G}} \left( \arcsin \frac{J}{\sqrt{J^2 - k^3 k_1 G I^2}} - \arcsin \frac{k_1 G \eta^3 + J}{\sqrt{J^2 - k^3 k_1 G I^2}} \right); \quad (24)$$

б) при  $G > 0$  (неустойчивая стратификация)

$$\xi = \frac{1}{k\sqrt{kk_1 G}} \ln \frac{k_1 G \eta^3 + J + \sqrt{k_1 G (G \eta^6 + 2J \eta^3 + k^3 I^2)}}{J + k I \sqrt{kk_1 G}}; \quad (25)$$

в) при  $G = 0$  (нейтральная стратификация) действительно полученное в [1] уравнение

$$\eta = k \sqrt[3]{I \xi + 1/2 J \xi^2}. \quad (26)$$

Для случая однородного поперечного потока ( $G=0$ ) сравнение расчета [1] с опытными данными [3] дало величину  $k=1,25$ . Если на основании тех же опытных данных принять отношение вертикального поперечного размера струи к горизонтальному как приблизительно постоянную величину (т. е.  $l/l'=\beta/\beta'=c/c'=\text{const}$ ), равную, в среднем, 1,15, а также считать, что вертикальное поперечное сечение струи имеет форму эллипса (т. е.  $\lambda=\pi/4$ ), то при  $c=1,1$ ,  $k_1=0,35$ . За отсутствием соответствующих данных можно принимать при стратификации окружающей среды, отличной от нейтральной, значения опытных коэффициентов, а также координат полюса струи  $\xi_0$  и  $\eta_0$  такими же, как при  $G=0$  [1].

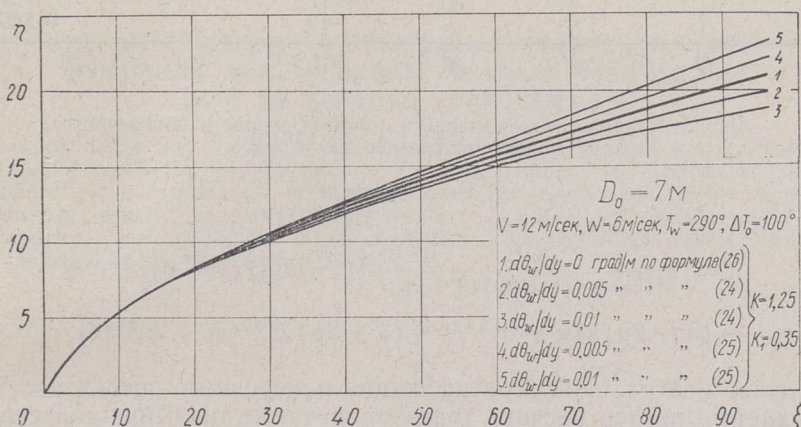


Рис. 2. Влияние термической стратификации поперечного потока на траекторию струи.

Из рис. 2 явствует, что влияние стратификации поперечного потока на траекторию струи становится существенным на определенном удалении от источника.

Как видно из формулы (24), при  $G < 0$  струя имеет предельную высоту подъема, определяемую из условия

$$\frac{k_1 G \eta_{\max}^3 + J}{\sqrt{J^2 - k^3 k_1 G I^2}} = -1, \quad (27)$$

откуда

$$\eta_{\max} = \sqrt[3]{-\frac{J}{k_1 G} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{k^3 k_1 G I^2}{J^2}} \right)}. \quad (28)$$

Влияние изменения скорости поперечного потока по высоте рассмотрим на примере чисто динамической струи. В этом случае исходное уравнение (13) при  $J = G = G_1 = 0$  с учетом (16) приобретает вид

$$\xi'' = \frac{2c_n c \kappa^\mu}{\pi I} \eta (\kappa + \eta)^{2\mu}. \quad (29)$$

Двухкратное интегрирование (29) при начальных условиях (20) дает в итоге



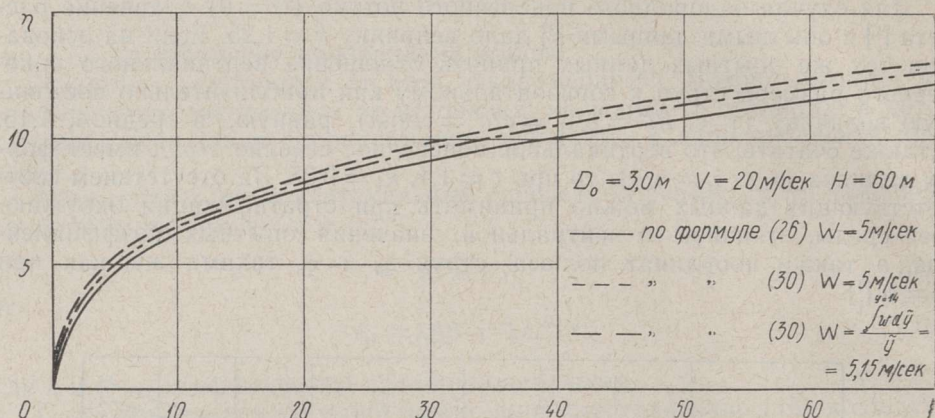


Рис. 3. Влияние неравномерного профиля скорости поперечного потока на траекторию струи.

$$\xi = \frac{3\kappa^\mu}{k^3(1+\mu)(1+2\mu)(3+2\mu)I} [(1+2\mu)(\kappa+\eta)^{3+2\mu} - (3+2\mu)\kappa(\kappa+\eta)^{2+2\mu} + (3+2\mu)\kappa^{2+2\mu}\eta + 2\kappa^{3+2\mu}]. \quad (30)$$

В случае нейтральной стратификации поперечного потока  $\mu = 1/7$ . На рис. 3 дается пример расчета траектории чисто динамической струи по формуле (30) (при  $\mu = 1/7$ ) и по формуле (26) с учетом изменения по высоте скорости поперечного потока путем последовательных приближений, причем средняя скорость поперечного потока в интервале высот, в котором развивается струя, определяется как

$$W_{cp} = \frac{\int_0^\eta w d\eta}{\eta} = \frac{W(\kappa+\eta)^{1+\mu}}{(1+\mu)\kappa^\mu\eta}. \quad (31)$$

Как видно из графиков, уже второе приближение дает расхождение с расчетом по (30), не превышающее 6%. Это говорит о том, что в большинстве случаев, по-видимому, можно ограничиваться учетом переменной по высоте скорости поперечного потока путем последовательных приближений указанным выше путем.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Эпштейн А., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **15**, № 2, 196—206 (1966).
2. Сэттон О. Г., Микрометеорология, М., 1958.
3. Иванов Ю., Эпштейн А., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 4, 588—595 (1965).

Институт термодинамики  
и электрофизики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
18/1 1966

A. EPSTEIN

**TERMILISE STRATIFIKATSIOONI JA RISTVOOLUSE  
DÜNAAMILISE EBAÜHTLUSE MÖJUST ÜMARA TURBULENTSE  
JOA TRAJEKTOORILE**

Artiklis käsitletakse vooluse termilise ja dünaamilise ebaühtluse mõju ristvooluses leviva ümara turbulentse joa trajektoore. On saadud analüütilised valemid ujuva joa jaoks termiliselt stratifitseeritud (stabiilses või ebastabiilses) ristvooluses lineaarse tiheduse või potentsiaalse temperatuuri gradiendi korral, kuid ühtlase kiiruste välja tingimustes ja puhtdünaamilise joa levimise kohta paraboolse kiiruste profiiliga ristvooluses. Lahendus põhineb samadel printsiipidel mis [1].

A. EPSTEIN

**ON THE INFLUENCE OF THERMAL STRATIFICATION AND  
DYNAMICAL NONUNIFORMITY OF CROSS-WIND ON THE  
PATH OF A ROUND TURBULENT JET**

The paper deals with the problem of the influence of dynamical and thermal nonuniformity of the cross-wind on the path of a round turbulent jet. Analytical expressions are obtained for a buoyant jet in thermally stratified cross-wind (stable or unstable) with constant density or potential temperature gradient but uniform wind velocity profile and for a pure dynamical jet in cross-wind with parabolical velocity profile. The solution is based on the same principles as in [1].