EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1966, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1966, № 3

И. КЕЙС

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА, ЗАКРЕПЛЕННОГО В ОДНОЙ ТОЧКЕ

Известно [1-3], что уравнения движения гиростата вокруг неподвижной точки могут быть получены из строки

$$I_1 \frac{dx_1}{dt} = (I_2 - I_3) x_2 x_3 + m_2 x_3 - m_3 x_2 + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3}, \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = x_3 \gamma_2 - x_2 \gamma_3 \tag{1}$$

циклической заменой переменных и постоянных, имеющих принятый в динамике гиростата смысл.

Относительно уравнений (1) можно сказать, что они допускают существование трех следующих интегралов [1, 3]:

$$I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2 - 2U = 2h \tag{2}$$

$$(I_1 x_1 + m_1) \gamma_1 + (I_2 x_2 + m_2) \gamma_2 + (I_3 x_3 + m_3) \gamma_3 = \sigma \tag{3}$$

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

являющихся соответственно интегралами Якоби, площадей и косинусов.

Введем переменные u, v согласно формулам [4]:

$$\gamma_1 = \frac{2u}{1 + u^2 + v^2}, \quad \gamma_2 = \frac{2v}{1 + u^2 + v^2}, \quad \gamma_3 = \frac{u^2 + v^2 - 1}{1 + u^2 + v^2}, \tag{4}$$

для которых из системы Пуассона в (1) получим уравнения

$$\frac{du}{dt} = -uvx_1 + \frac{1}{2}(1 + u^2 - v^2) x_2 + vx_3, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}(u^2 - v^2 - 1) x_1 + uvx_2 - ux_3, \tag{5}$$

соответствующие действительной и мнимой частям уравнения Дарбу-Риккати.

Поскольку величина D, равная

$$D_1 - 2u^2 v^2 = \frac{1}{4}[1 - (u^2 + v^2)^2],$$

для неплоских движений гиростата не обращается в нуль, то для x_1, x_2 из уравнений (5) получим выражения

$$Dx_1 = uvu' - \frac{1}{2}(1 + u^2 - v^2)v' - \frac{1}{2}u(1 + u^2 + v^2)x_3$$
$$Dx_2 = \frac{1}{2}(1 + v^2 - u^2)u' - uvv' - \frac{1}{2}v(1 + u^2 + v^2)x_3 \tag{6}$$
$$\left(w' = \frac{dw}{dt}\right).$$

Предполагая, что в выражении функции $U(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ переменные γ заменены по формулам (4), получим новую функцию $S(u, v)$, а для искомых проекций момента внешних сил, приложенных к гиростату, относительно точки закрепления, согласно [2] и уравнениям (5), значения

$$-uv\frac{\partial S}{\partial u} + \frac{1}{2}(u^2 - v^2 - 1)\frac{\partial S}{\partial v}, \quad \frac{1}{2}(1 + u^2 - v^2)\frac{\partial S}{\partial u} + uv\frac{\partial S}{\partial v}, \quad v\frac{\partial S}{\partial u} - u\frac{\partial S}{\partial v}. \tag{7}$$

Если допустить, что величина D_0, равная выражению

$$(1 + u^2 + v^2)\{(1 - u^2 - v^2)[\sigma + m_3 - 2(m_1u + m_2v) +$$
$$+ (\sigma - m_3)(u^2 + v^2)] + x_3[4(I_1u^2 + I_2v^2) + I_3(u^2 + v^2 - 1)^2]\},$$

не является частным интегралом уравнений (1), равным нулю, то для всех траекторий вне определяемой им поверхности в пространстве x_3, u, v нетрудно получить для dt из интеграла (3) значение

$$D_0dt = U_0du + V_0dv, \tag{8}$$

где
$$U_0 = 4v[(2I_1 - I_2)u^2 + I_2(v^2 + 1)],$$
$$V_0 = -4u[I_1(u^2 + 1) + (2I_2 - I_1)v^2].$$

Тогда из третьей строки уравнений Эйлера в (1) и интеграла (2), используя равенства (6) и (8), последовательно получим две равные нулю однородные квадратичные дифференциальные формы:

$$\left[W_1U_0^2 + D_0e_1U_0 + \frac{I_2 - I_1}{2}uv(1 + v^2 - u^2)D_0^2\right]du^2 +$$
$$+ \left[W_1V_0^2 + D_0e_2V_0 + \frac{I_2 - I_1}{2}uv(1 + u^2 - v^2)D_0^2\right]dv^2 + \tag{9}$$
$$+ [2U_0V_0W_1 + (e_1V_0 + e_2U_0)D_0 + (I_1 - I_2)D_1D_0^2]dudv +$$
$$+ I_3D_0D^2(U_0du + V_0dv)dx_3 = 0$$

$$\left\{D_0^2\left[I_1u^2v^2 + \frac{I_2}{4}(1 + v^2 - u^2)^2\right] + \left(W_2 - \frac{1 + u^2 + v^2}{8}D_0x_3\right)U_0^2\right\}du^2 +$$
$$+ \left\{D_0^2\left[I_2u^2v^2 + \frac{I_1}{4}(1 + u^2 - v^2)^2\right] + \left(W_2 - \frac{1 + u^2 + v^2}{8}D_0x_3\right)V_0^2\right\}dv^2 +$$
$$+ \left\{[(I_2 - I_1)(u^2 - v^2) - (I_1 + I_2)]uvD_0^2 + \right. \tag{10}$$
$$\left. + \left(2W_2 - \frac{1 + u^2 + v^2}{4}D_0x_3\right)U_0V_0\right\}dudv = 0,$$

в которых коэффициенты W_1, W_2, e_1 и e_2 имеют следующий смысл:

$$W_1 = D^2\left(u\frac{\partial S}{\partial v} - v\frac{\partial S}{\partial u}\right) + D\frac{m_1v - m_2u}{2}(1 + u^2 + v^2)x_3 +$$

$$+ (I_2 - I_1)\frac{uv}{4}(1 + u^2 + v^2)^2x_3^2$$

$$W_2 = \frac{1}{4}(I_1u^2 + I_2v^2)(1 + u^2 + v^2)^2x_3^2 + D^2(I_3x_3^2 - 2S - 2h)$$

$$4e_1 = 2D[2m_2uv + m_1(u^2 - v^2 - 1)] +$$

$$+ (I_1 - I_2)(1 + u^2 + v^2)(1 + 3v^2 - u^2)x_3u$$

$$4e_2 = 2D[2m_1uv + m_2(v^2 - u^2 - 1)] +$$

$$+ (I_2 - I_1)(1 + u^2 + v^2)(1 + 3u^2 - v^2)x_3v.$$

В случае, когда $x_3 = x_3(t_0)$ не является общим или частным интегралом уравнений (1), из равенств (9) и (10) можно получить делением на dx_3^2 дифференциальные уравнения, определяющие u и v как функции x_3, между тем как функцию $x_3(t)$ легко указать, исчислив квадратуру согласно формуле (8).

Если, однако, $x_3 = x_3(t_0)$ есть общий интеграл уравнений (1) или же некоторое множество траекторий принадлежит плоскости $x_3 = \text{const}$ в пространстве x_3, u, v, то для определения u, v, x_1, x_2 как функций времени на таких множествах достаточно рассмотреть формулу (10) и равенства (8) и (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra Vito, Acta math., 22, 201—368 (1898—1899).
2. Горячев Д. Н., Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела, Варшава, 1910, стр. 1—38.
3. Румянцев В. В., ПММ, 25, вып. 1, 9—16 (1961).
4. Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, Paris, 1887, vol. I, chap. 2.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/IX 1965

I. KEIS

ÜHE KINNISPUNKTIGA GÜROSTAADI LIIKUMISVÕRRANDITEST

Artiklis tõestatakse, et ühe kinnispunktiga gürostaadi kuus liikumisvõrrandit võib teatavate integraalide abil taandada spetsiaalsele kujule, kus võrrandeid on ainult kaks.

I. KEIS

ABOUT THE FORM OF EQUATIONS CORRESPONDING TO THE MOTION OF A GYROSTAT WITH A SINGLE POINT FIXED

It is proved that six equations corresponding to the motion of a gyrostat with a single point fixed could be reduced to a special system consisting of only two equations if the known integrals have been used.