EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1966, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1966, № 3

Ю. ЛЕМБРА

К ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ВНЕШНЕЙ ИНЖЕКЦИИ ЧАСТИЦ В СЕКТОРНЫЙ ЦИКЛОТРОН

Проблема внешней инжекции в ускорительной технике стала актуальной в связи с получением поляризованных частиц высокой энергии. В работе [1] в целях ввода пучка в секторный циклотрон [2, 3] предложено использовать дрейф частиц вдоль границы двух областей с различными значениями однородного магнитного поля: H (в дальнейшем область 1) и $\varkappa H$ ($\varkappa < 1$, область 2). Пучок частиц инжектируется так, что равновесная орбита находится в медианной плоскости магнита. В работе [1], в частности, изложены основы линейной теории вертикальных и горизонтальных колебаний частиц вокруг равновесной орбиты. В настоящей работе мы преследуем цель дополнить линейную теорию вертикальных колебаний [1] вычислением амплитуды.

Как видно из рис. 1 (где сохранены обозначения, введенные в [1]), упомянутый дрейф можно рассматривать как частный случай движения частицы в магнитной периодической системе. В данном случае элемент периодичности магнитной системы имеет следующую структуру: область 1 (движение по дуге $P_1P_2P_3$), переход из области 1 в область 2 (в точке P_3), область 2 (движение по дуге $P_3P_4P_5$), переход из области 2 в область 1 (в точке P_5).

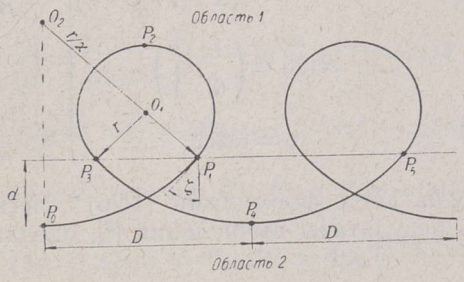

Рис. 1.

Известно [4], что амплитуда свободных колебаний частицы вокруг равновесной орбиты по существу определяется модулем функции Флоке уравнения колебаний, являясь пропорциональной ему. В связи с этим наше внимание в дальнейшем обращено на поведение модуля этой функции.

Квадрат модуля функции Флоке (в дальнейшем сокращено: к.м.ф.Ф.) удобно вычислить матричным методом [5]. Согласно этому методу для к.м.ф.Ф. $\Phi(s)$ имеет место выражение

$$\Phi(s)=\frac{\mathfrak{A}_{12}(s)}{\sin\mu}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{A}(s)$ — матрица элемента периодичности с началом в точке s (s — длина дуги равновесной орбиты), а величина μ определяется из формулы

$$\cos\mu=\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\mathfrak{A}(s)=\text{const}. \tag{2}$$

Квадрат модуля функции Флоке

Применяя технику образования матрицы элемента периодичности [6], можно написать для вертикальных колебаний:

в области 1

$$\mathfrak{A}_z(s)=P(s)B\left(-\frac{(1-\varkappa)\tau}{r}\right)P\left(\frac{(\pi-2\zeta)r}{\varkappa}\right)B\left(-\frac{(1-\varkappa)\tau}{r}\right)P((\pi+2\zeta)r-s)$$
$$0\leqslant s\leqslant(\pi+2\zeta)r$$

в области 2

$$\mathfrak{A}_z(s)=P(s)B\left(-\frac{(1-\varkappa)\tau}{r}\right)P((\pi+2\zeta)r)B\left(-\frac{(1-\varkappa)\tau}{r}\right)P\left(\frac{(\pi-2\zeta)r}{\varkappa}-s\right)$$
$$0\leqslant s\leqslant(\pi-2\zeta)\frac{r}{\varkappa}, \tag{3}$$

где введены сокращения

$$B(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$$
$$P(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{4}$$
$$\tau=\tan\zeta.$$

Сравнивая формулы (3) с формулами (I 26)*, легко убедиться, что можно использовать результаты вычислений [6], сделав в них подстановку:

$$\tau_{12}=\tau_{21}=(1-\varkappa)\tau$$
$$\nu_1=\pi+2\zeta \tag{5}$$
$$\nu_2=\pi-2\zeta.$$

С учетом (1), (5) и (I 27) можно к.м.ф.Ф. для вертикальных колебаний представить в следующем виде:

---

* Здесь I означает формулу из работы [6].

в области 1

$$\Phi_{z1}(s)=\frac{2r}{\varkappa\sin\mu_z}\left\{(1+\varkappa)\frac{\pi}{2}-(1-\varkappa)\zeta-2(1-\varkappa)\tau\left(\frac{\pi^2}{4}-\zeta^2\right)-\right.$$

$$\left.-\varkappa(1-\varkappa)\tau\left[1-\frac{(1-\varkappa)\tau}{\varkappa}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\right]\left(\pi+2\zeta-\frac{s}{r}\right)\frac{s}{r}\right\}$$

$$0\leqslant s\leqslant(\pi+2\zeta)r$$

в области 2

$$\Phi_{z2}(s)=\frac{2r}{\varkappa\sin\mu_z}\left\{(1+\varkappa)\frac{\pi}{2}-(1-\varkappa)\zeta-2(1-\varkappa)\tau\left(\frac{\pi^2}{4}-\zeta^2\right)-\right.$$

$$\left.-(1-\varkappa)\tau\left[1-(1-\varkappa)\tau\left(\frac{\pi}{2}+\zeta\right)\right]\left(\pi-2\zeta-\frac{\varkappa s}{r}\right)\frac{s}{r}\right\}$$

$$0\leqslant s\leqslant(\pi-2\zeta)\frac{r}{\varkappa}, \tag{6}$$

где для величины μ получим из (2), (5) и (I 28) уже известную в [1] формулу

$$\cos\mu_z=1-\frac{(1-\varkappa^2)\tau}{\varkappa}\left[\pi-\frac{2(1-\varkappa)\zeta}{1+\varkappa}-\frac{(1-\varkappa)\tau}{2(1+\varkappa)}(\pi^2-4\zeta^2)\right]. \tag{7}$$

Из (6) вытекает, что к.м.ф.Ф. симметричен относительно «середин» областей (точки P_2 и P_4) и имеет в этих точках экстремум. Согласно общим результатам [7], эти экстремумы являются минимумами. Таким образом, к.м.ф.Ф. вертикальных колебаний принимает в «серединах» областей минимальные значения:

$$\Phi_{z1}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\zeta\right)r\right)=\frac{2r}{\varkappa\sin\mu_z}\left\{(1+\varkappa)\frac{\pi}{2}-(1-\varkappa)\zeta-\right.$$

$$\left.-(1-\varkappa)\tau\left(\frac{\pi}{2}+\zeta\right)\left[(\varkappa+2)\frac{\pi}{2}-(2-\varkappa)\zeta-(1-\varkappa)\tau\left(\frac{\pi^2}{4}-\zeta^2\right)\right]\right\}$$

$$\Phi_{z2}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\frac{r}{\varkappa}\right)=\frac{2r}{\varkappa\sin\mu_z}\left\{(1+\varkappa)\frac{\pi}{2}-(1-\varkappa)\zeta-\right.$$

$$\left.-\frac{(1-\varkappa)\tau}{\varkappa}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\left[(2\varkappa+1)\frac{\pi}{2}+(2\varkappa-1)\zeta-(1-\varkappa)\tau\left(\frac{\pi^2}{4}-\zeta^2\right)\right]\right\}, \tag{8}$$

а в месте стыка областей (точки P_1, P_3 и P_5) — наибольшее значение:

$$\Phi_{z1}(0)=\Phi_{z1}((\pi+2\zeta)r)=\Phi_{z2}(0)=\Phi_{z2}\left(\frac{(\pi-2\zeta)r}{\varkappa}\right)=$$

$$=\frac{2r}{\varkappa\sin\mu_z}\left[(1+\varkappa)\frac{\pi}{2}-(1-\varkappa)\zeta-2(1-\varkappa)\tau\left(\frac{\pi^2}{4}-\zeta^2\right)\right]. \tag{9}$$

Результаты (8) и (9) качественно согласуются с экспериментальными данными [1].

Удобно ввести величину

$$x=\frac{\Phi_{z1}(0)-\Phi_{z1}\left(\left(\frac{\pi}{2}+\zeta\right)r\right)}{\Phi_{z2}(0)-\Phi_{z2}\left(\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)\frac{r}{\varkappa}\right)}. \tag{10}$$

Очевидно, что в случае $x > 1$ минимум к. м. ф. Ф. в области 1 лежит глубже, чем в области 2, а в случае $x < 1$ минимум к. м. ф. Ф в области 2 лежит глубже, чем в области 1.

Используя (8) и (9), найдем из (10)

$$x = \varkappa^2 \left[\frac{\frac{\pi}{2}+\zeta}{\frac{\pi}{2}-\zeta}\right]^2 \frac{1-\frac{(1-\varkappa)\tau}{\varkappa}\left(\frac{\pi}{2}-\zeta\right)}{1-(1-\varkappa)\tau\left(\frac{\pi}{2}+\zeta\right)}. \tag{11}$$

Из (11) вытекает, что для получения $x \lesseqgtr 1$ величина ζ должна удовлетворить условию

$$\zeta \lesseqgtr \frac{(1-\varkappa)\pi}{2(1+\varkappa)}. \tag{12}$$

В качестве иллюстрации к вышеизложенной теории приведем пример со значениями параметров $\varkappa = 0{,}6$ и $\xi = \varkappa\, d/r = 0{,}5$. Результаты вычисления $\varphi_z = \Phi_z/r$ изображены на рис. 2, где $\nu = s/r$ и $\varkappa s/r$ для областей 1 и 2 соответственно.

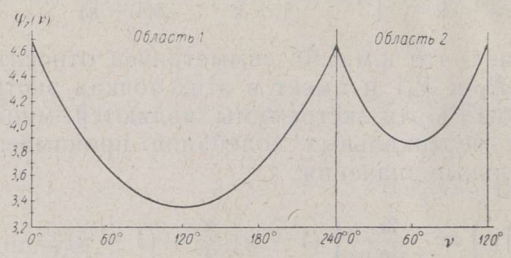

Рис. 2.

В заключение отметим, что аналогичную линейную теорию горизонтальных колебаний невозможно построить из-за факта [1], что $\cos \mu_r = 1$ (граница области устойчивости). Поэтому подробное изучение горизонтальных колебаний требует учета нелинейности действительного магнитного поля в переходной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гладышев В. А., Кацауров Л. Н., Кузнецов А. Н., Мартынова Л. П., Мороз Е. М., Атомная энергия, **18**, 213 (1965).
2. Moroz E. M., Rabinovich M. S., Proc. CERN Symp., **1**, 547 (1956).
3. Мороз Е. М., Рабинович М. С., ПТЭ, № 1, 15 (1957).
4. Коломенский А. А., Лебедев А. Н., Теория циклических ускорителей, М., 1962.
5. Лембра Ю. Я., ЖТФ, **35**, 574 (1965).
6. Лембра Ю., Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 2, 237 (1965).
7. Лембра Ю., Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **11**, № 1, 50 (1962).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 28/VI 1965

J. LEMBRA

OSAKESTE VÄLISE INJEKTSIOONI LINEAARSEST TEOORIAST SEKTORILISES TSÜKLOTRONIS

Gladõšev jt. [1] tegid ettepaneku kasutada osakeste injekteerimiseks sektorilisse tsüklotroni nende triivimist piki sirgjoont, mis kiirendaja magneti kesktasandis lahutab kaht erineva tugevusega homogeense magnetväljaga piirkonda. Käesolevas töös on arvutatud osakeste vertikaalvõnkumiste võrrandi Floquet' funktsiooni moodul sellise triivimise juhul. Arvutus näitab, et Floquet' funktsiooni moodul, seega ka vertikaalvõnkumiste amplituud, omab maksimume piirkondade äärejoone punktides (näit. punktides P_1, P_3 ja P_5 — joon. 1) ja miinimume piirkondades olevate trajektooriosade keskpunktides (näit. punktides P_2 ja P_4 — joon. 1).

J. LEMBRA

ON THE LINEAR THEORY OF THE EXTERNAL INJECTION IN THE CYCLOTRON WITH SECTIONED MAGNETIC SYSTEM

A method of particles drifting along a straight line which separates two regions with different values of a homogeneous magnetic field has been proposed by Gladyshev et al. [1] for injecting particles into the cyclotron with sectioned magnetic system. A modulus of Floquet's function for the equation of vertical oscillations in the case of above-mentioned drifting is calculated in this paper. It is shown that the modulus of Floquet's function and, consequently, the amplitude of vertical oscillations, has maximums at the points of the boundary line (e. g., points P_1, P_3, P_5 in fig. 1) and minimums at the middle points of the trajectory in respective regions (e. g. points P_2, P_4 in fig. 1).