EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 3

С. УЛЬМ

АЛГОРИФМЫ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА СТЕФФЕНСЕНА

Для приближенного решения нелинейных операторных уравнений общеизвестен метод Ньютона-Канторовича [1], обладающий скоростью сходимости второго порядка. Однако применение метода Ньютона-Канторовича оказывается часто неудобным, так как на каждом шагу итерационного процесса требуется вычисление значения производной оператора. Поэтому представляет большой интерес построение и исследование таких итерационных методов, при применении которых требуется только вычисление значений оператора.

Одним возможным способом построения таких методов является использование понятия разделенных разностей для оператора [2]. Так, в 1961 г. А. Сергеев [3] и Й. Шмидт [4] обобщили на операторные уравнения метод хорд, имеющий порядок скорости сходимости $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}618$. Автором [5] был предложен новый метод * такого типа для решения нелинейных операторных уравнений, являющийся обобщением известного метода Стеффенсена [6, 7] решения нелинейных алгебраических и трансцендентных уравнений. По сравнению с методом хорд метод Стеффенсена имеет некоторые преимущества:

а) нет надобности выбирать два начальных приближения;

б) более высокая скорость сходимости (именно второго порядка как и при методе Ньютона);

в) более широкая область сходимости.

Для решения нелинейного операторного уравнения

$$F(x) \equiv x - \Phi(x) = 0 \tag{1}$$

в банаховом пространстве обобщенный метод Стеффенсена имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - [F(x_k, \Phi(x_k))]^{-1} F(x_k) \tag{2}$$

или более подробно

$$x_{k+1} = x_k + [E - \Phi(x_k, \Phi(x_k))]^{-1} (\Phi(x_k) - x_k), \tag{3}$$

где $F(x', x'')$, $\Phi(x', x'')$ — разделенные разности соответственно операторов F и Φ; E — единичный оператор.

В данной статье строятся алгорифмы обобщенного метода Стеффенсена для решения конкретных типов операторных уравнений. Даются и общие соображения для построения итерационных методов при помощи интерполяционной формулы Ньютона с итерациями оператора $\Phi(x)$ в качестве «интерполяционных узлов».

---

* Как стало известно автору после представления рукописи статьи в редакцию, метод Стеффенсена был обобщен на операторные уравнения и в работе Chen Kuo-Wang, Comment. math. Univ. Carolinae, 5, № 2, 47—77 (1964). Там же дается применение метода для систем алгебраических и трансцендентных уравнений и для интегральных уравнений.

1. Пусть дана краевая задача

$$\begin{cases} L[x] = \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x) \text{ в области } B; \\ U_\mu[x] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \text{ на границе } \Gamma_\mu \text{ области } B, \end{cases} \tag{4}$$

где $L[x]$ и $U_\mu(x)$ — линейные дифференциальные выражения (в частных или обыкновенных производных) относительно функции $x = x(t_1, \ldots, t_n)$.

Рассмотрим множество таких функций $x = x(t_1, \ldots, t_n)$, которые удовлетворяют однородным краевым условиям $U_\mu[x] = 0$. На этом множестве определим оператор $y = \Phi(x)$ следующим образом (ср. [8]):

$$\begin{cases} L[y] = \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x) \text{ в области } B; \\ U_\mu[y] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \text{ на границе } \Gamma_\mu. \end{cases} \tag{5}$$

Соотношения $y_1 = \Phi(x_1)$ и $y_2 = \Phi(x_2)$ имеют соответственно следующий смысл:

$$\begin{cases} L[y_1] = \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1) \\ U_\mu[y_1] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \end{cases} \tag{6}$$

и

$$\begin{cases} L[y_2] = \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_2) \\ U_\mu[y_2] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{7}$$

Соотношение $y_1 - y_2 = \Phi(x_1) - \Phi(x_2)$ можно тогда представить в виде

$$\begin{cases} L[y_1 - y_2] = \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1) - \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_2) \\ U_\mu[y_1 - y_2] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{8}$$

Определим разделенную разность $z = \Phi(x_1, x_2)h$ оператора $\Phi(x)$ следующими соотношениями:

$$\begin{cases} L[z] = \dfrac{\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_1) - \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_2)}{x_1 - x_2} h \\ U_\mu[z] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{9}$$

В частности, на основании (8) и (9) получается

$$\Phi(x_1, x_2)(x_1 - x_2) = \Phi(x_1) - \Phi(x_2) = y_1 - y_2. \tag{10}$$

Обозначим $x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$ (11)

и

$$\Phi(x_k) = y_k. \tag{12}$$

По обобщенному методу Стеффенсена (3)

$$\Phi(x_k, y_k)\,\Delta x_k = \Delta x_k - y_k + x_k \tag{13}$$

или

$$\begin{cases} L[\Delta x_k - y_k + x_k] = \dfrac{\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_k) - \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, y_k)}{x_k - y_k} \Delta x_k \\ U_\mu[\Delta x_k - y_k + x_k] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m). \end{cases} \tag{14}$$

Итак, для решения задачи (4) получается следующий алгорифм:

а) на каждом итерационном шаге $(k = 0, 1, \ldots)$ решаем линейную краевую задачу

$$\begin{cases} L[\Delta x_k] = \dfrac{\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_k) - \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, y_k)}{x_k - y_k} \Delta x_k + \\ \quad + L[y_k - x_k] \\ U_\mu[\Delta x_k] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \end{cases} \tag{15}$$

причем y_k определяется как решение линейной краевой задачи

$$\begin{cases} L[y_k] = \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n, x_k) \\ U_\mu[y_k] = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m); \end{cases} \tag{16}$$

б) новое приближение x_{k+1} определяется по правилу

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{17}$$

причем $x_0 = x_0(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ — начальное приближение к решению x^* задачи (4).

2. В частности, при решении задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \tag{18}$$

получается алгорифм:

а) $$\frac{d\,\Delta x_k}{dt} = \frac{f(t, x_k) - f(t, y_k)}{x_k - y_k} \Delta x_k + f(t, x_k) - \frac{dx_k}{dt}$$

$$\Delta x_k(t_0) = 0, \tag{19}$$

причем
$$y_k = \int_{t_0}^{t} f(s, x_k(s))\,ds. \tag{20}$$

б) $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k$; $x_0 = x_0(t)$ — начальное приближение к решению x^* задачи (18).

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -x^3 + t^2 \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Если выбрать $x_0(t) \equiv 0$, то $y_0 = \int_0^t s^2 ds = \frac{t^3}{3}$ и уравнение (19) примет вид

$$\frac{d\,\Delta x_0}{dt} + \frac{t^6}{9} \Delta x - t^2 = 0, \tag{22}$$

откуда
$$x_1(t) = \Delta x_0(t) \approx \frac{t^3}{3} - \frac{t^{10}}{270} + \frac{t^{17}}{270 \cdot 153}. \tag{23}$$

Отметим, что в данном конкретном примере получилось совпадение с односторонним приближением метода С. Чаплыгина (ср. [9]).

3. Рассмотрим нелинейное интегральное уравнение

$$x(s) = \int_0^1 K(s, t, x(t))\,dt, \tag{24}$$

которое можно представить в виде операторного уравнения $x = \Phi(x)$, если принять

$$\Phi(x) = \int_0^1 K(s, t, x(t))\,dt. \tag{25}$$

Определим разделенную разность оператора $\Phi(x)$ при помощи формулы

$$\Phi(x, y)h = \int_0^1 \frac{K(s, t, x(t)) - K(s, t, y(t))}{x(t) - y(t)}\,h(t)\,dt. \tag{26}$$

Легко проверить, что выполнено соотношение

$$\Phi(x, y)(x - y) = \Phi(x) - \Phi(y). \tag{27}$$

Обозначим
$$y_k = \Phi(x_k) = \int_0^1 K(s, t, x_k(t))\,dt \tag{28}$$

и
$$\Delta x_k(s) = x_{k+1}(s) - x_k(s). \tag{29}$$

Используя метод (3) в виде

$$[E - \Phi(x_k, y_k)]\,\Delta x_k = y_k - x_k, \tag{30}$$

получим для приближенного решения уравнения (24) следующий итерационный метод:

а) на каждом итерационном шагу ($k = 0, 1, \ldots$) решаем линейное интегральное уравнение

$$\Delta x_k(s) - \int_0^1 \frac{K(s, t, x_k(t)) - K(s, t, y_k(t))}{x_k(t) - y_k(t)}\,\Delta x_k(t)\,dt = y_k(s) - x_k(s), \tag{31}$$

где
$$y_k(s) = \int_0^1 K(s, t, x_k(t))\,dt; \tag{32}$$

б) новое приближение x_{k+1} определяется по формуле

$$x_{k+1}(s) = x_k(s) + \Delta x_k(s), \tag{33}$$

причем $x_0 = x_0(s)$ — начальное приближение к решению $x^* = x^*(s)$ уравнения (24).

Пример 2. Решим уравнение

$$x(s) = 0{,}05s\int_0^1 t x^2(t)\,dt + 3 + 0{,}6625s. \tag{34}$$

Выбирая $x_0(s) \equiv 4$, получим

$$x_1(s) = 0{,}9997s + 3. \tag{35}$$

Отметим, что методом Ньютона-Канторовича получается $x_1(s) = 0{,}9952s + 3$, причем в данном случае $x^*(s) = s + 3$.

4. Пусть необходимо найти решение нелинейного интегро-дифференциального уравнения

$$x(s) - \int_a^b K(s,t) f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))\,dt = g(s). \tag{36}$$

Положим

$$\Phi(x) = \int_a^b K(s,t) f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))\,dt - g(s) \tag{37}$$

и

$$\Phi\,(x, y)h =$$
$$= \int_a^b K(s,t) \left[\frac{f(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) - f(t, y(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t))}{x(t) - y(t)}\, h(t) + \right.$$
$$+ \frac{f(t, y(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)) - f(t, y(t), y'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t))}{x'(t) - y'(t)}\, h'(t) + \ldots$$
$$\left. + \frac{f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t), x^{(n)}(t)) - f(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t))}{x^{(n)}(t) - y^{(n)}(t)}\, h^{(n)}(t) \right] dt. \tag{38}$$

Алгорифм обобщенного метода Стеффенсена получается в виде:

а) на каждом шагу $(k = 0, 1, \ldots)$ решаем относительно поправки $\Delta x_k(s)$ линейное интегро-дифференциальное уравнение

$$\Delta x_k(s) -$$
$$- \int_a^b K(s,t) \left[\frac{f(t, x_k(t), x_k'(t), \ldots, x_k^{(n)}(t)) - f(t, y_k(t), x_k'(t), \ldots, x_k^{(n)}(t))}{x_k(t) - y_k(t)}\, \Delta x_k(t) + \right.$$
$$+ \frac{f(t, y_k(t), x_k'(t), \ldots, x_k^{(n)}(t)) - f(t, y_k(t), y_k'(t), x_k''(t), \ldots, x_k^{(n)}(t))}{x_k'(t) - y_k'(t)}\, \Delta x'_k(t) + \ldots$$
$$\left. + \frac{f(t, y_k(t), y_k'(t), \ldots, y_k^{(n-1)}(t), x_k^{(n)}(t)) - f(t, y_k(t), y_k'(t), \ldots, y_k^{(n)}(t))}{x_k^{(n)}(t) - y_k^{(n)}(t)}\, \Delta x_k^{(n)}(t) \right] dt =$$
$$= y_k(s) - x_k(s), \tag{39}$$

где $$y_k(s) = \int_a^b K(s,t) f(t, x_k(t), x'_k(t), \ldots, x_k^{(n)}(t))\,dt + g(s); \tag{40}$$

б) новое приближение — $x_{k+1}(s) = x_k(s) + \Delta x_k(s)$ $(k = 0, 1, \ldots)$; $x_0(s)$ — начальное приближение.

5. Для решения трансцендентных (или алгебраических) систем из n уравнений

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{41}$$

алгорифм метода (3) выражается в виде:

а) на каждом итерационном шаге $(k = 0, 1, \ldots)$ решаем относительно поправки

$$\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} = (\Delta x_1{}^{(k)}, \Delta x_2{}^{(k)}, \ldots, \Delta x_n{}^{(k)}) =$$
$$= (x_1{}^{(k+1)} - x_1{}^{(k)}, x_2{}^{(k+1)} - x_2{}^{(k)}, \ldots, x_n{}^{(k+1)} - x_n{}^{(k)})$$

систему линейных уравнений

$$(E - \Phi(x^{(k)}, y^{(k)}))\, \Delta x^{(k)} = y^{(k)} - x^{(k)}, \tag{42}$$

где E — единичная матрица n-го порядка;

$$\Phi(x^{(k)}, y^{(k)}) = (a_{ij}{}^{(k)}) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_i(y_1{}^{(k)}, \ldots, y_{j-1}{}^{(k)}, x_j{}^{(k)}, \ldots, x_n{}^{(k)}) - \varphi_i(y_1{}^{(k)}, \ldots, y_j{}^{(k)}, x_{j+1}{}^{(k)}, \ldots, x_n{}^{(k)})}{x_j{}^{(k)} - y_j{}^{(k)}}\right) \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix} \tag{43}$$

или

$$\Phi(x^{(k)}, y^{(k)}) = (b_{ij}{}^{(k)}) =$$

$$= \left(\frac{\varphi_i(x_1{}^{(k)}, \ldots, x_{j-1}{}^{(k)}, y_j{}^{(k)}, \ldots, y_n{}^{(k)}) - \varphi_i(x_1{}^{(k)}, \ldots, x_j{}^{(k)}, y_{j+1}{}^{(k)}, \ldots, y_n{}^{(k)})}{y_j{}^{(k)} - x_j{}^{(k)}}\right) \begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ j = 1, 2, \ldots, n, \end{matrix} \tag{44}$$

причем

$$\begin{aligned} y^{(k)} &= (\varphi_1(x_1{}^{(k)}, \ldots, x_n{}^{(k)}), \ldots, \varphi_n(x_1{}^{(k)}, \ldots, x_n{}^{(k)})) = \\ &= (y_1{}^{(k)}, y_2{}^{(k)}, \ldots, y_n{}^{(k)}); \end{aligned} \tag{45}$$

б) новое приближение найдется по формуле $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$, причем $x^{(0)} = (x_1{}^{(0)}, x_2{}^{(0)}, \ldots, x_n{}^{(0)})$ — начальное приближение к решению $x^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, \ldots, x_n{}^*)$ системы (41).

Отметим, что для случая векторной функции от векторного аргумента

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n)) \tag{46}$$

Й. Шмидт [10] показал в некоторой области справедливость оценки

$$\|\Phi(x', x'') - \Phi(x'', x''')\| \leqslant A\|x' - x''\| + B\|x' - x'''\| + B\|x'' - x'''\|, \tag{47}$$

если только частные производные второго порядка от функций φ_i в этой области ограничены.

Покажем, что если в некоторой окрестности решения x^* уравнения (1) выполнены условия

$$\|[F(x', x'')]^{-1}\| \leqslant B \tag{48}$$

$$\|\Phi(x', x'')\| \leqslant M \tag{49}$$

$$\|\Phi(x', x'') - \Phi(x'', x''')\| \leqslant K_1\|x' - x''\| + K_2\|x' - x'''\| + K_3\|x'' - x'''\|, \tag{50}$$

то и в этом случае обобщенный метод Стеффенсена имеет скорость сходимости второго порядка.

Действительно, так как (ср. [5], формула (30))

$$x^* - x_{k+1} = [F(x_k, \Phi(x_k))]^{-1}[\Phi(x^*, x_k) - \Phi(x_k, \Phi(x_k))](x^* - x_k), \tag{51}$$

то

$$\begin{aligned}\|x^* - x_{k+1}\| &\leqslant B(K_1\|x^* - x_k\| + K_2\|x^* - \Phi(x_k)\| + \\ &+ K_3\|x_k - \Phi(x_k)\|)\|x^* - x_k\| \leqslant B[K_1\|x^* - x_k\| + K_2\|\Phi(x^*) - \Phi(x_k)\| + \\ &+ K_3(\|x_k - x^*\| + \|\Phi(x^*) - \Phi(x_k)\|]\|x^* - x_k\| \leqslant \\ &\leqslant B[(K_1 + K_3)\|x^* - x_k\| + (K_2 + K_3)\|\Phi(x^*, x_k)(x^* - x_k)\|]\|x^* - x_k\| \leqslant \\ &\leqslant B[K_1 + K_3 + M(K_2 + K_3)]\|x^* - x_k\|^2 = O(\|x^* - x_k\|^2),\end{aligned} \tag{52}$$

что и требовалось доказать.

6. При решении функциональных уравнений динамического программирования при помощи аппроксимации в пространстве стратегий приходится решать функциональные уравнения в виде

$$f(x) = f[T(x, y)] + h(x, y), \tag{53}$$

где y — некоторая приближенная к оптимальной стратегия. Уравнения типа (53) Р. Беллман [11] рекомендует решать при помощи обычного метода итерации.

Если положить

$$\Phi(f) = f[T(x, y)] + h(x, y), \tag{54}$$

то разделенная разность

$$\Phi(f, g) = \frac{f[T(x, y)] - g[T(x, y)]}{f(x) - g(x)} \tag{55}$$

и алгорифм обобщенного метода Стеффенсена получается в виде

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{\{f_n[T(x, y)] + h(x, y) - f_n(x)\}^2}{f_n[T(T(x, y), y)] - 2f_n[T(x, y)] + f_n(x) - h(x, y) + h(T(x, y), y)}, \tag{56}$$

где $f_0 = f_0(x)$ — начальное приближение к решению $f^*(x)$ функционального уравнения (54). Интересно было бы подробно исследовать сходимость метода (56) к решению уравнения (53).

Отметим, например, что при решении уравнения [11]

$$f(x) = h(x) + f(bx) \tag{57}$$

первое приближение метода (56) дает точное решение, если выбирать $f_0(x) = h(x)$ и функция $h(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$h^2(b^2x) = h(bx)h(b^3x). \tag{58}$$

7. Представим еще некоторые общие соображения относительно построения итерационных методов рассматриваемого типа.

Многие итерационные методы анализа связаны с использованием формулы Тейлора. Так, например, метод Ньютона получается линеаризацией оператора $F(x)$ при помощи формулы Тейлора, методы касательных парабол [12] и касательных гипербол [13] — если в формуле Тейлора учитывать три первых члена и т. д.

Метод Стеффенсена получается линеаризацией оператора $F(x) = x - \Phi(x)$ при помощи интерполяционной формулы Ньютона, в которой в качестве «интерполяционных узлов» выбраны итерации оператора $\Phi(x)$ (т. е. $x_k, \Phi(x_k), \Phi(\Phi(x_k)), \ldots$):

$$F(x) = F(x_k) + F(x_k, \Phi(x_k))(x - x_k) + \\ + F(x_k, \Phi(x_k), \Phi(\Phi(x_k)))(x - x_k)(x - \Phi(x_k)) + \ldots, \tag{59}$$

где $F(x', x'', x''')$ — разделенная разность второго порядка для оператора $F(x)$. Действительно, заменив уравнение (1) линеаризованным уравнением

$$F(x_k) + F(x_k, \Phi(x_k))(x - x_k) = 0, \tag{60}$$

получим, решив (60)

$$x = x_k - [F(x_k, \Phi(x_k))]^{-1} F(x_k) \tag{61}$$

и, взяв найденное значение x в качестве нового приближения x_{k+1}, получим (2).

Интерполяционную формулу (59) можно использовать при построении итерационных методов более высокого порядка. Для простоты ограничимся случаем одного вещественного уравнения

$$f(x) \equiv x - \varphi(x) = 0. \tag{62}$$

Учитывая в формуле (59) три первых члена, можно построить аналогично [14] следующий класс итерационных методов:

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k, u_k) - (1+\alpha) f(x_k, u_k, v_k)(y_k - x_k) - f(x_k, u_k, v_k)(x_k - u_k)}{f(x_k, u_k) - \alpha f(x_k, u_k, v_k)(y_k - v_k)} (y_k - x_k), \tag{63}$$

где $y_k - x_k = -f(x_k)/f(x_k, u_k)$; $u_k = \varphi(x_k)$; $v_k = \varphi(u_k)$;

α — вещественный параметр.

Эти методы, являющиеся обобщениями метода Стеффенсена [6, 7], имеют уже скорость сходимости третьего порядка [15], как и соответствующие дифференциальные методы [16]. Зато применение методов класса (63) часто удобнее, так как на каждом шагу итерационного процесса требуется только вычисление трех значений функций (дифференциальные методы [16] требуют на каждом шагу вычисления $f(x_k)$, $f'(x_k)$, $f''(x_k)$).

Интерполяционную формулу Ньютона (59) можно использовать и для построения различных других итерационных методов. Например (ср. [17]), применив для решения линеаризованного уравнения (60) первый шаг метода наискорейшего спуска и взяв полученное приближение в качестве x_{k+1}, получим для решения уравнения (1) некоторую комбинацию метода наискорейшего спуска и обычного итерационного метода:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\|F^*(x_k, \Phi(x_k))F(x_k)\|^2}{\|F(x_k, \Phi(x_k))F^*(x_k, \Phi(x_k))F(x_k)\|^2} F^*(x_k, \Phi(x_k))F(x_k), \qquad (64)$$

где $F^*(x_k, \Phi(x_k))$ — сопряженный к линейному оператору $F(x_k, \Phi(x_k))$ оператор.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Тр. Матем. ин-та АН СССР, **28**, 104—144 (1949).
2. Schröder J., Arch. Math., **7**, Nr. 6, 471—484 (1956).
3. Сергеев А. С., Сибирск. матем. ж., **11**, № 2, 282—289 (1961).
4. Schmidt J. W., Z. angew. Math. u. Mech., **41**, Sonderheft, 61—63 (1961).
5. Ульм С. Ю., Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **4**, № 6, 1093—1097 (1964).
6. Steffensen J. F., Skand. Aktuar. Tidskr., **16**, 64—72 (1933).
7. Островский А. М., Решение уравнений и систем уравнений, М., 1963.
8. Collatz, L., The Numerical Treatment of Differential Equations, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960.
9. Чаплыгин С. А., Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М.-Л., 1950.
10. Schmidt J. W., Z. angew. Math. u. Mech., **43**, № 3, 97—110 (1963).
11. Bellman R., Adaptive Control Processes: A Guided Tour, Princeton University Press, 1961.
12. Мираков В. Е., Усп. матем. наук, **11**, № 3, 171—174 (1956).
13. Мертвецова М. А., ДАН СССР, **88**, № 4, 611—614 (1953).
14. Ульм С. Ю., ДАН СССР, **158**, № 1, 56—58 (1964).
15. Ульм С., Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 4 (1965). (В печати).
16. Ludvig R., Z. angew. Math. u. Mech., **34**, 6, 210—225 (1954).
17. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б., ДАН СССР, **141**, № 4, 785—788 (1961).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
16/III 1965

S. ULM

ÜLDISTATUD STEFFENSENI MEETODI ALGORITMID

Artiklis esitatakse üldistatud Steffenseni meetodi (2) algoritmid mittelineaarsete diferentsiaalvõrrandite alg- ja rajaväärtusülesannete, integraalvõrrandite, integro-diferentsiaalvõrrandite, mittelineaarsete transtsendentsete võrrandisüsteemide ja dünaamilise programmeerimise funktsionaalvõrrandite lahendamiseks. Lisaks antakse üldised printsiibid iteratsioonimeetodite tuletamiseks operaatorvõrrandi $F(x) \equiv x - \Phi(x) = 0$ jaoks Newtoni interpolatsioonivalemi abil, milles «interpolatsioonisõlmedena» kasutatakse operaatori $\Phi(x)$ iteratsioone.

S. ULM

DIE ALGORITHMEN DES VERALLGEMEINERTEN VERFAHRENS VON STEFFENSEN

Es werden die Algorithmen des verallgemeinerten Verfahrens von Steffensen (2) für die angenäherte Lösung der Anfangswert- und Randwertaufgaben der nichtlinearen Differentialgleichungen, der Integralgleichungen, der Integrodifferentialgleichungen, der nichtlinearen Systeme von der transzendenten Gleichungen und der Funktionalgleichungen von der dynamischen Programmierung gegeben. Es werden zusätzlich die allgemeinen Prinzipien für die Konstruktion der Iterationsverfahren für die nichtlineare Operatorgleichung $F(x) \equiv x - \Phi(x) = 0$ mittels der Newtonschen Interpolationsformel mit den Iterationen des Operators $\Phi(x)$ als «Knotenpunkte» behandelt.