

Х. АБЕН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ МЕТОДОМ ФОТОУПРУГОСТИ ПРИ ПОМОЩИ СКВОЗНОГО ПРОСВЕЧИВАНИЯ МОДЕЛИ

Предлагается метод для определения осесимметричного напряженного состояния при помощи сквозного просвечивания модели. Метод базируется на теории характеристических напряжений [1, 2] и применим как в случае упругих, так и неупругих деформаций.

Общие уравнения поляризациино-оптического метода. В работе [1] были выведены уравнения поляризациино-оптического метода для случая, когда деформации модели являются упругими. Приводим вывод общих уравнений поляризациино-оптического метода, которые можно использовать также в случае неупругих деформаций.

Распространение света в анизотропной неоднородной среде описывается уравнениями [1]

$$-\frac{d^2 E_1}{dz^2} = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{11} E_1 + \varepsilon_{12} E_2), \quad -\frac{d^2 E_2}{dz^2} = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_{21} E_1 + \varepsilon_{22} E_2), \quad (1)$$

где E_j — компоненты вектора электрической напряженности; ε_{ij} — диэлектрический тензор; ω — круговая частота; c — скорость света в вакууме; z — координата в направлении распространения света.

Переходя к вращающейся системе координат, совпадающей с квазиглавными направлениями, можно из уравнений (1) получить уравнения, выведенные Р. Роурком [3] и В. М. Прошко [4, 5]. Однако уравнения (1) можно значительно упростить.

Решение уравнений (1) можно представить в виде

$$E_j = A_j e^{-ikz}, \quad \left(k = \frac{\omega n}{c}\right), \quad (2)$$

где n — показатель преломления ненапряженной среды. Подставляя (2) в систему (1), имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 A_1}{dz^2} - 2ik \frac{dA_1}{dz} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{11} - k^2\right) A_1 + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{12} A_2 &= 0 \\ \frac{d^2 A_2}{dz^2} - 2ik \frac{dA_2}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{21} A_1 + \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{22} - k^2\right) A_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если среда оптически изотропна, то $A_j = \text{const}$. Так как оптическая анизотропия фотоупругой среды весьма слаба, то можно предполагать, что dA_j/dz и $d^2 A_j/dz^2$ — величины примерно одинакового порядка. Учитывая, что величина k порядка 10^5 , членами $d^2 A_j/dz^2$ в системе (3) можно пренебречь.

Дальше систему (3) можно упростить, используя следующее преобразование:

$$A_j = B_j e^{i f(z)}, \quad f(z) = \frac{1}{2} k z - \frac{\omega^2}{4kc^2} \int (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) dz. \quad (4)$$

Преобразование (4), как и преобразование (2), не изменяет ни разности фаз, ни соотношения амплитуд компонентов светового вектора.

С учетом преобразования (4) и малости членов $d^2 A_j / dz^2$ из (3) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB_1}{dz} &= -i \frac{1}{2} C (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) B_1 - i C \varepsilon_{12} B_2 \\ \frac{dB_2}{dz} &= -i C \varepsilon_{21} B_1 + i \frac{1}{2} C (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}) B_2 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

$$\text{где } C = \frac{\omega^2}{2kc^2}. \quad (6)$$

Преобразуя уравнения (5) к вращающимся квазиглавному направлениям, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB'_1}{dz} &= -i \frac{1}{2} C (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B'_1 + \frac{d\varphi}{dz} B'_2 \\ \frac{dB'_2}{dz} &= -\frac{d\varphi}{dz} B'_1 + i \frac{1}{2} C (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) B'_2 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

$$\text{где } B'_1 = B_1 \cos \varphi + B_2 \sin \varphi, \quad B'_2 = -B_1 \sin \varphi + B_2 \cos \varphi, \quad (8)$$

φ — угол между квазиглавному направлениями и координатными осями, использованными в уравнениях (5); ε_j — квазиглавные значения диэлектрического тензора.

Уравнения (5) и (7) являются общими уравнениями поляризационно-оптического метода. В зависимости от конкретной задачи более удобными могут оказаться первые или вторые из них.

Метод характеристических направлений. Решение системы (5) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} B_{10} \\ B_{20} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где U — матрицант системы (5); B_{j0} — начальные значения компонентов светового вектора.

Так как в фотоупругой среде длина светового вектора не изменяется, то матрица U унитарна и в общем случае имеет следующий вид:

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\zeta} \cos \Theta & e^{i\zeta} \sin \Theta \\ -e^{-i\zeta} \sin \Theta & e^{-i\zeta} \cos \Theta \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где параметры ξ , ζ и Θ зависят от распределения оптической анизотропии на световом луче.

Из предыдущих работ [1, 2] известно, что в случае унитарных оптических систем всегда существуют два взаимно перпендикулярных направления поляризатора, при которых выходящий из системы свет поляризован линейно. Соответствующие направления поляризации падающего и

выходящего света называются первичными и вторичными характеристическими направлениями оптической системы соответственно. Они определяются соотношениями

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\sin(\xi + \zeta) \sin 2\Theta}{\sin 2\xi \cos^2 \Theta - \sin 2\zeta \sin^2 \Theta} \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_* = \frac{\sin(\xi - \zeta) \sin 2\Theta}{\sin 2\xi \cos^2 \Theta + \sin 2\zeta \sin^2 \Theta}, \quad (12)$$

где α_0 — угол между первичными характеристическими направлениями и координатными осями уравнений (5); α_* определяет аналогично вторичные характеристические направления.

Разность фаз 2γ между вторичными характеристическими колебаниями называется характеристической разностью фаз, которая выражается соотношением

$$\cos 2\gamma = \frac{1}{2}[\cos 2\xi + \cos 2\zeta + \cos 2\Theta (\cos 2\xi - \cos 2\zeta)]. \quad (13)$$

Характеристические направления можно экспериментально определить при помощи любого полярископа, поляризатор и анализатор которого независимо поворачиваемы. Характеристическая разность фаз измеряется обычными методами поляризационной оптики.

Экспериментальное определение характеристических величин дает в общем случае у каждого светового луча три соотношения (11)—(13) для определения параметров ξ , ζ и Θ . Так как последние определяются распределением компонентов диэлектрического тензора на волновой нормали света, соотношения (11)—(13) можно использовать для вычисления последних. Зная распределение компонентов диэлектрического тензора, можно при помощи законов моделирования определить деформации и напряжения в модели.

Таким образом, экспериментальное определение характеристических величин в принципе позволяет определить напряженное состояние объемной модели.

Симметричная фотоупругая среда. Пусть объемная фотоупругая модель, напряженное состояние которой имеет плоскость симметрии xy , просвечивается в иммерсионной ванне в направлении оси z . Матрицу V , которая преобразует падающие световые колебания в колебания, выходящие из модели, можно записать в виде

$$V = U'U, \quad (14)$$

где U преобразует падающие световые колебания в плоскость симметрии xy , а U' преобразует колебания от плоскости симметрии в точку выхода света.

Преобразования U и U' отличаются лишь тем, что во втором случае та же фотоупругая среда просвечивается в обратном направлении. Из теории унитарных оптических систем известно [2, 6], что при просвечивании системы в обратном направлении матрица системы транспонируется. Следовательно,

$$U' = \bar{U}, \quad (15)$$

где тильда обозначает транспонирование матрицы. Из (14) и (15) имеем

$$V = \bar{U}U. \quad (16)$$

Легко доказать [7], что матрица V — симметричная унитарная матрица. Обозначая штрихом характеристические величины, соответствующие матрице V , получим [7]

$$\operatorname{tg} 2\alpha'_0 = \operatorname{tg} 2\alpha'_* = \operatorname{tg} 2\alpha_0 \quad (17)$$

$$\cos 2\gamma' = \cos 4\gamma. \quad (18)$$

Называем фотоупругую среду между точкой входа света и плоскостью симметрии элементарной оптической системой. Фотоупругую среду между точками входа и выхода света называем соответствующей симметричной оптической системой. Матрицы этих систем связаны соотношением (16). Из соотношений (17) и (18) следует, что первичные и вторичные характеристические направления симметричной оптической системы коллинеарны и совпадают с первичными характеристическими направлениями соответствующей элементарной оптической системы. Характеристическая разность фаз симметричной оптической системы равняется удвоенной характеристической разности фаз соответствующей элементарной оптической системы.

Первое обстоятельство значительно облегчает экспериментальное исследование симметричных фотоупругих сред, так как определение характеристических направлений ничем не отличается от определения параметра изоклины при исследовании плоских моделей. Зато исчезает одно соотношение для определения напряженного состояния, потому что в каждой точке можно в данном случае определить только две экспериментальные величины.

Отметим, что рассматриваемый здесь случай просвечивания фотоупругой среды, имеющей плоскость симметрии, в принципе аналогичен исследованию изменяющегося в направлении светового луча напряженного состояния при помощи одностороннего поляризатора [7]. В обоих случаях преобразование падающих световых колебаний в выходящие производится симметричной унитарной матрицей.

Дискретное моделирование фотоупругой среды. Разделяя фотоупругую среду перпендикулярно световому лучу на m элементарных слоев, можно матрицу U записать в виде

$$U = U_m \dots U_2 U_1, \quad (19)$$

где $U_1, U_2 \dots U_m$ — матрицанты системы (5) для отдельных элементарных слоев.

Если число m достаточно большое, то компоненты диэлектрического тензора можно считать постоянными в пределах одного слоя. В последнем случае матрицант системы (5) для слоя j имеет следующий вид:

$$U_j = \begin{pmatrix} \cos(\eta_j t_j) - i \frac{1}{S_j} \sin(\eta_j t_j) & -i \frac{R_j}{S_j} \sin(\eta_j t_j) \\ -i \frac{R_j}{S_j} \sin(\eta_j t_j) & \cos(\eta_j t_j) + i \frac{1}{S_j} \sin(\eta_j t_j) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$\text{где } \eta_j = \frac{1}{2} C(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})_j S_j, \quad S_j = \sqrt{1 + R_j^2}, \quad R_j = \frac{2(\epsilon_{12})_j}{(\epsilon_{11} - \epsilon_{22})_j} \quad (21)$$

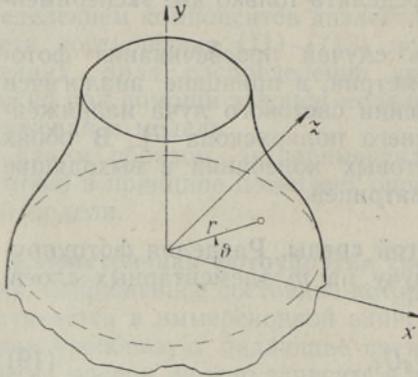
и t_j — толщина j -го слоя.

Соотношениями (19)—(21) континуальная оптически анизотропная неоднородная среда заменяется стопой двупреломляющих пластинок. Как показано в работе [2], теория характеристических направлений действительна также в последнем случае.

Для практического применения метода характеристических направлений необходимо определить соотношения между экспериментальными величинами α_0 , α_* и 2γ и параметрами ξ , ζ и Θ , которые определяются напряженным состоянием модели. В этих целях необходимо матрицант U системы (5) выражать либо в аналитическом, либо в численном виде. Из-за сложности системы (5) практически всегда необходимо использовать численные методы.

Обычные численные методы позволяют при интегрировании системы (5) определить значения B_1 и B_2 , если заданы функции ε_{11} — ε_{22} , ε_{12} и начальные значения компонентов светового вектора B_{10} и B_{20} . В данном случае этого недостаточно, так как для определения характеристических величин по формулам (11)—(13) необходимо знать матрицант U системы (5).

Здесь и оказывается полезной дискретная модель фотоупругой среды (19)—(21). Соотношения (19)—(21) позволяют вычислять матрицант системы (5) при заданном распределении оптической анизотропии на световом луче. По существу использование соотношений (19)—(21) эквивалентно численному интегрированию уравнений (5). Существенным является обстоятельство, что соотношения (19)—(21) позволяют непосредственно вычислять матрицант системы (5).



Метод определения напряженного состояния осесимметричной модели. Пусть необходимо определить напряженное состояние в некотором сечении ($y = 0$) осесимметричной модели (см. рисунок).

Во-первых, распределение фотоупругих неизвестных ε_r — ε_θ , ε_y — ε_ϕ и $\varepsilon_{r\theta}$ необходимо аппроксимировать некоторыми функциями радиальной координаты r :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r - \varepsilon_\theta &= g_1(r, A_1, A_2, \dots, A_k) \\ \varepsilon_y - \varepsilon_\phi &= g_2(r, C_1, C_2, \dots, C_l) \\ \varepsilon_{r\theta} &= g_3(r, D_1, D_2, \dots, D_s) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где A_1, A_2, \dots, D_s — постоянные, которые необходимо определить. Функции g_1, g_2 и g_3 должны удовлетворять условиям на контуре.

Модель просвечивается в иммерсионной ванне параллельно оси z . При различных значениях координаты x определяются характеристические величины α_0 и $2\gamma'$. Количество экспериментальных данных должно быть больше или равняться количеству неизвестных постоянных в выражениях (22).

При каждом значении x , при котором производятся экспериментальные измерения, на основе выражений (19)—(22) вычисляются значения элементов матрицы U для различных комбинаций значений постоянных A_1, A_2, \dots, D_s . Для этого целесообразно матрицу U выражать в виде

$$U = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_2 & -b_1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Значения параметров ξ , ζ и Θ вычисляются по формулам, которые следуют из (10) и (23):

$$\operatorname{tg} \xi = \frac{b_1}{a_1}, \quad \operatorname{tg} \zeta = \frac{b_2}{a_2}, \quad \sin \Theta = \frac{b_2}{\sin \xi}. \quad (24)$$

Теперь по формулам (11), (13) и (18) вычисляются значения a_0 и $2\gamma'$.

Описанным выше методом в численном виде определяется соотношение между постоянными A_1, A_2, \dots, D_s , которые определяют распределение оптической анизотропии в модели, и экспериментальными данными a_0 и $2\gamma'$ при различных значениях x .

Определение постоянных A_1, A_2, \dots, D_s можно осуществлять при помощи различных методов. Например, можно составить систему таблиц или номограмм, из которых эти постоянные определяются интерполированием на основе экспериментальных данных.

Более удобным для практического использования кажется выражение постоянных A_1, A_2, \dots, D_s аппроксимирующими полиномами

$$A_k = F_k[(a_0)_1, (2\gamma')_1, (a_0)_2, (2\gamma')_2, \dots], \quad (25)$$

постоянные которых определяются методом наименьших квадратов на основе численных данных, полученных вышеописанным методом. Соотношения (25) позволяют непосредственно вычислять постоянные, которые определяют распределение неизвестных (22) в исследуемом сечении модели.

При помощи законов моделирования от компонентов диэлектрического тензора (22) переходят к компонентам напряжения.

Для разделения нормальных напряжений приходится использовать численное интегрирование уравнений равновесия.

Описанный выше метод значительно отличается от метода, предложенного в работах [8, 9]. Во-первых, используя систему дифференциальных уравнений (5), учитывается влияние вращения квазиглавных направлений. Во-вторых, на каждом световом луче экспериментально определяются две величины (a_0 и $2\gamma'$) вместо одной (порядок изохром), как это предложено в названных работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абен Х. К., Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, № 4, 40—46 (1964).
2. Абен Х., Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 13, № 4, 329—343 (1964).
3. O'Rourke R. C., J. Appl. Phys., 22, No. 7, 872—878 (1951).
4. Прошко В. М., Поляризационно-оптический метод исследования напряжений, Изд. АН СССР, М., 1956, стр. 214—219.
5. Прошко В. М., Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. транспорта, № 91, 91—102 (1957).
6. Jones R. C., J. Opt. Soc. Amer., 31, No. 7, 488—493 (1941).
7. Абен Х. К., Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, № 6, 106—111 (1964).
8. O'Rourke R. C., Saenz A. W., Quart. Appl. Math., 8, No. 3, 303—311 (1950).
9. Drucker D. C., Woodward W. B., J. Appl. Phys., 25, No. 4, 510—512 (1954).

H. ABEN

TELGÜMMEETRIILISE PINGEOLUKORRA MÄÄRAMISEST FOTOELASTSUSMEETODIL MUDELI LÄBIVÄLGUSTAMISE ABIL

Fotoelastsusmeetodi üldised võrrandid tuletatakse kujus (5) ja (7), mis on kasutatavad nii elastsete kui ka mitteelastsete deformatsioonide puhul. Näidatakse, et juhul kui fotoelastne keskkond omab sümmeetriatasapinna, on fotoelastsusvõrrandite maatriksant sümmeetriline. Sellest järeldub, et vaadeldava fotoelastse keskkonna primaarsed ning sekundaarsed karakteristiklikud suunad on kollineaarsed, mis hõlbustab tunduvalt nende eksperimentaalset määramist.

Fotoelastsusvõrrandite maatriksandi numbriliseks määramiseks kasutatakse fotoelastse keskkonna modelleerimist kaksikmurdvate plaatide paketina (19), kusjuures iga kaksikmurdva plaadi maatriks on lihtsalt arvutatav seostest (20) ja (21).

Telgsummeetrilise pingelokorra määramiseks on vaja dielektrilise tensori komponendid aproksimeerida mingite funktsioonidega (22). Nendes funktsioonides esinevad konstandid määratakse mitmetel valguskiirtel mõõdetud karakteristiklike suuruste põhjal. Normaalspinge eraldamiseks tuleb kasutada tasakaaluvõrrandite numbrilist integreerimist.

H. ABEN

ON THE DETERMINATION OF AXI-SYMMETRIC STATE OF STRESS BY THE MEANS OF INTEGRAL PHOTOELASTIC MEASUREMENTS

General equations of photoelasticity are derived in forms (5) and (7) which are applicable by elastic as well as by non-elastic deformations. It is shown that if a photoelastic medium has a plane of symmetry, the solution of the equations of photoelasticity can be expressed by a symmetric matrix.

Therefore the primary and secondary characteristic directions of the photoelastic medium coincide, which considerably facilitates their experimental determination.

For numerical calculation of the matrix of the solution of the equations of photoelasticity, the photoelastic medium is considered as a pile of birefringent plates (19), where the matrix of every plate is calculated from (20) and (21).

In order to determine the axi-symmetric state of stress, the components of the dielectric tensor must be approximated by some functions (22). The constants which appear in these functions can be determined on the basis of characteristic quantities, which are measured on various rays of light. For the separation of the normal stress components, the equations of equilibrium must be used.