

А. МЯННИЛЬ

## ПРОГРАММА МЕТОДА ТРЕХМЕРНЫХ СЕТОК ДЛЯ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНОГО ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ ПЛИТЫ

При импульсных нагрузках в технических приложениях представляет интерес изучение начала движения плиты на основе уравнений теории упругости. Поскольку эти уравнения не поддаются аналитическому решению, заслуживает внимания использование конечно-разностных методов. В связи с этим в работе [1], помещенной в настоящем выпуске, предлагается алгоритм метода трехмерных сеток и приводятся некоторые результаты его применения. Данная заметка затрагивает вопросы реализации этого алгоритма на электронной вычислительной машине (ЭВМ).

Задача сформулирована в работе [1]. Рассматривается переходный волновой процесс изгиба плиты, зависящий от безразмерной (деленной на полутолщину плиты  $h$ ), продольной координаты  $\xi$ , безразмерной (деленной на  $h$ ) нормальной координаты  $\zeta$  и безразмерного времени  $\tau = c_2 t h^{-1}$  (здесь  $t$  — время,  $c_2$  — скорость распространения волн сдвига). Предполагается, что волновой процесс возбужден импульсной нагрузкой, действующей в поперечном сечении  $\xi = 0$ . Поскольку напряженное состояние изгиба является антисимметричным относительно срединной поверхности плиты  $\zeta = 0$ , ограничимся рассмотрением верхней половины плиты. Итак, область изменения  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\tau$  ограничена условиями

$$\xi \geq 0, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \tau \geq 0.$$

Расчет ведется по слоям  $\tau = \text{const}$ , причем на каждом слое учитываются краевые условия при  $\xi = 0$ , фронтные условия при  $\xi = \tau k^{-1}$ , условия антисимметрии при  $\zeta = 0$ , условия отсутствия нормальных напряжений ( $\sigma_{33}$ ) и тангенциальных напряжений ( $\sigma_{13}$ ) при  $\zeta = 1$  (здесь  $k = c_2/c_1$  — соотношение скоростей распространения волны сдвига и сжатия). Расчетные формулы для перемещений  $u$ ,  $w$  даны там же [1]. При их программировании пришлось преодолеть следующие затруднения:

1. Условия  $\sigma_{33} = \sigma_{13} = 0$  в точках сетки, где  $\zeta = 1$ , образуют систему уравнений, причем число уравнений растет с увеличением  $\tau$  и достигает в конкретных задачах весьма больших значений. В последнем слое, вычисленном для примера работы [1], оно дошло до 504. Чтобы избежать итеративного решения таких больших систем уравнений и повысить точность расчета, решение было построено в виде рекуррентных формул.

2. Объем оперативной памяти ЭВМ составляет обычно 2048 или 4096 слов. Однако при решении прикладных задач методом трехмерных сеток оказывается необходимым сохранить больше информации (например, на последнем этапе решения рассмотренной задачи [1] — около 30 000 слов). Поэтому слои  $\tau = \text{const}$  были разбиты на области (см. рис. 1) так, чтобы в пределах каждой области расчет можно было провести с применением только оперативной памяти. При переходе от одной области к другой имеет место обмен информации между оперативной и внешней памятью.

### 1. Схема расчета.

В областях  $m = 2, 3, \dots$ ,  $M - 2$  расчет проводится одинаково (см. блок-схему I, рис. 2); область  $m = 1$  отличается тем, что при  $\xi = 0$  учитываются краевые условия; область  $m = M - 1$  отличается

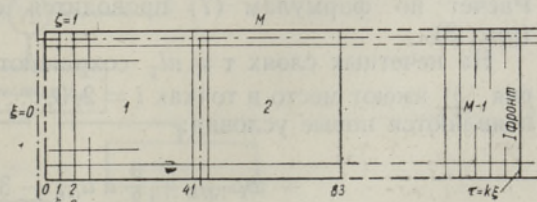


Рис. 1.

тем, что в прифронтных точках применяются основные и дополнительные фронтные условия. Расчетные формулы даны в [1].



Область  $m = M$ . На четных слоях  $\tau = nl_\tau$  имеем следующие условия (см. формулы (1.24) — (1.26) работы [1]):

$$\text{при } i = 0: \quad \omega_{0Jn} = 0, \quad u_{0Jn} = -\frac{2}{3} A l_\xi + \frac{4}{3} u_{1Jn} - \frac{1}{3} u_{2Jn} \quad (1)$$

$$\text{при } i = 1: \quad \left. \begin{aligned} au_{1Jn} + \omega_{2Jn} &= A_{12} \\ -\frac{4}{3} u_{1Jn} + b\omega_{1Jn} + \frac{4}{3} u_{2Jn} &= A_{11} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\text{при } i = 2, 3, \dots, \frac{n}{2} - 1: \quad \left. \begin{aligned} -\omega_{i-1, Jn} + au_{iJn} + \omega_{i+1, Jn} &= A_{i2} \\ -u_{i-1, Jn} + b\omega_{iJn} + u_{i+1, Jn} &= A_{i1} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\text{при } i = \frac{n}{2}: \quad u_{iJn} = 0, \quad \omega_{iJn} = 0, \quad (4)$$

$$\text{где } A_{11} = \frac{b}{3} (4\omega_{1, J-1, n} - \omega_{1, J-2, n}) - \frac{2(1-2\nu)}{3(1-\nu)^2} l_\xi, \quad (5)$$

$$A_{11} = \frac{b}{3} (4\omega_{i, J-1, n} - \omega_{i, J-2, n}), \quad \text{если } i \geq 2$$

$$A_{i2} = \frac{a}{3} (4u_{i, J-1, n} - u_{i, J-2, n}), \quad \text{если } i \geq 1$$

$$a = 3 \frac{l_\xi}{l_c}, \quad b = 3 \frac{1-\nu}{\nu} \frac{l_\xi}{l_c}. \quad (6)$$

Условия (2) и (3) образуют систему из  $n - 2$  уравнений. Преобразованием матрицы к нижнетреугольной форме было получено решение в виде следующих рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} u_{iJn} &= B_{i2} + r_{i2} \omega_{i-1, Jn}, & \omega_{iJn} &= B_{i1} + r_{i1} u_{i-1, Jn} \\ \omega_{0Jn} &= 0, & \omega_{1Jn} &= B_{11} + \frac{4}{3} r_{11} u_{1Jn}, \end{aligned} \quad (7)$$

где использовались обозначения

$$\begin{aligned} B_{i2} &= r_{i2} (A_{i2} - B_{i+1, 1}), & B_{i1} &= r_{i1} (A_{i1} - B_{i+1, 2}) \\ B_{11} &= r_{11} (A_{11} - \frac{4}{3} B_{22}), & B_{\frac{n}{2}, 2} &= B_{\frac{n}{2}, 1} = 0 \\ r_{i2} &= \frac{1}{a + r_{i+1, 1}}, & r_{i1} &= \frac{1}{b + r_{i+1, 2}}, & r_{11} &= \frac{1}{b + \frac{4}{3} r_{22}}, & r_{\frac{n}{2}, 2} &= r_{\frac{n}{2}, 1} = 0. \end{aligned}$$

Расчет по формулам (7) проводится с применением блок-схемы II (рис. 3).

На нечетных слоях  $\tau = nl_\tau$  сохраняют силу условия (1) и (2); условия (3) имеют место в точках  $i = 2, 3, \dots, \frac{1}{2}(n - 3)$ ; в точке  $i = \frac{1}{2}(n - 1)$  появляются новые условия:

$$\begin{aligned} -\omega_{i-1, Jn} + \frac{3}{2} a u_{iJn} - 3\omega_{iJn} &= \frac{3}{2} A_{i2} \\ -u_{i-1, Jn} + \frac{3}{2} b \omega_{iJn} - 3u_{iJn} &= \frac{3}{2} A_{i1}, \end{aligned} \quad (8)$$

а при  $i = \frac{1}{2}(n + 1)$  имеют место условия (4).

Условия (2), (3) и (8) образуют систему из  $n - 1$  уравнений. При построении решения в виде рекуррентных формул оказалось (в отличие от предыдущего случая) целесообразным привести матрицу к верхнетреугольной форме. Были получены следующие расчетные формулы:

$$\left. \begin{aligned} u_{iJn} &= B_{i2} - r_{i2} \omega_{i+1, Jn} - C_{i2} \\ \omega_{iJn} &= B_{i1} - r_{i1} u_{i+1, Jn} - C_{i1} \end{aligned} \right\} \quad i \leq \frac{n-3}{2} \quad (9)$$

$u_{iJn} = B_{i2} + 3r_{i2}\omega_{iJn} - C_{i2}$ ,  $u_{i+1, Jn} = 0$ ,  $\omega_{i+1, Jn} = 0$ ,  $i = \frac{1}{2}(n-1)$ , где

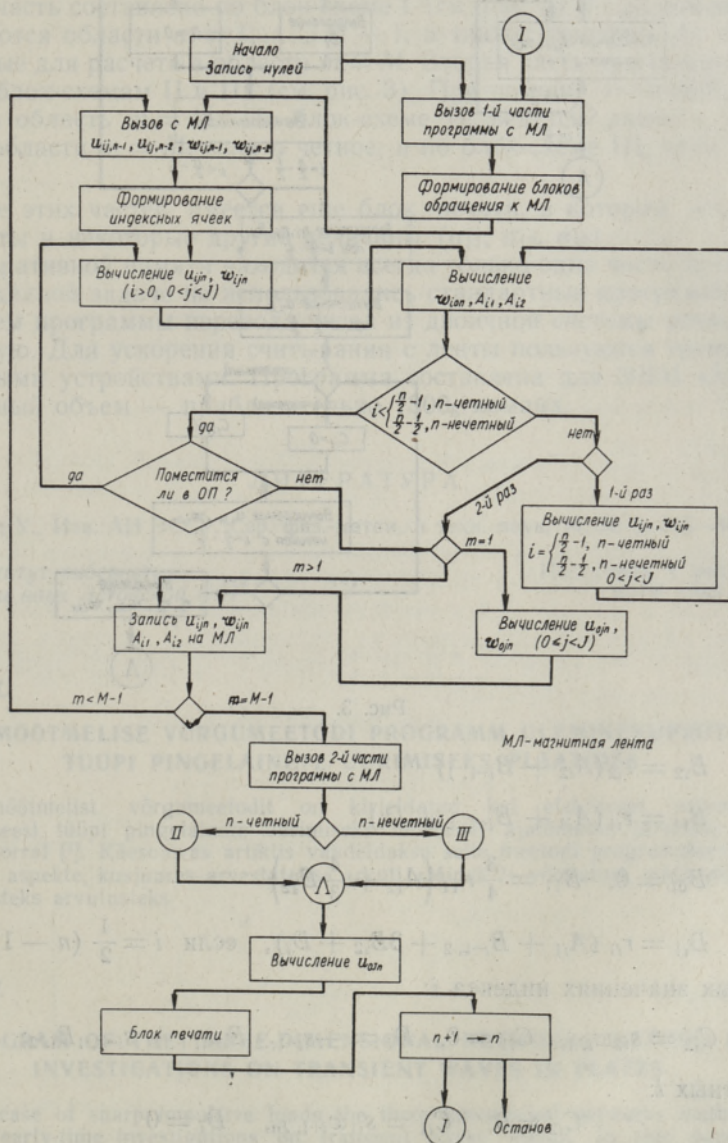


Рис. 2.



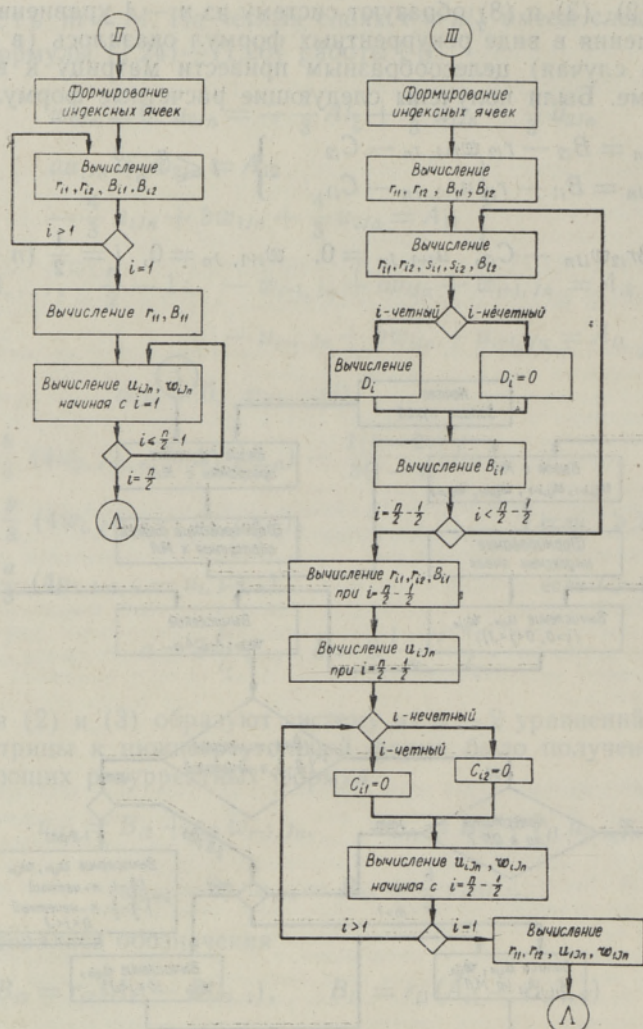


Рис. 3.

$$B_{i2} = r_{i2} (A_{i2} + B_{i-1, 1})$$

$$B_{i1} = r_{i1} (A_{i1} + B_{i-1, 2} + D_i)$$

$$B_{01} = 0, \quad B_{11} = \frac{3}{4} r_{11} \left( A_{11} + \frac{4}{3} B_{12} \right)$$

$$B_{i1} = r_{i1} (A_{i1} + B_{i-1, 2} + 3B_{i2} + D_i), \quad \text{если } i = \frac{1}{2} (n - 1);$$

при четных значениях индекса  $i$ :

$$C_{i2} = s_{i2} w_{i1n}, \quad C_{i1} = 0, \quad D_i = -s_{i-1, 2} B_{i-1, 1} + s_{i-1, 1} B_{i, 2};$$

при нечетных  $i$ :

$$C_{i2} = 0, \quad C_{i1} = s_{i1} w_{i+1, 1n}, \quad D_i = 0$$

$$r_{i2} = \frac{1}{a + r_{i-1, 1}}, \quad r_{i1} = \frac{1}{b + r_{i-1, 2}}, \quad r_{12} = \frac{1}{a}, \quad r_{11} = \frac{4}{3b}$$

$$\left. \begin{aligned} r_{i2} &= \frac{1}{\frac{3}{2}a + r_{i-1,1}} \\ r_{i1} &= \frac{1}{\frac{3}{2}a + r_{i-1,2} + 3r_{i2}[-3 + (-1)^i s_{i-1,1}]} \end{aligned} \right\} i = \frac{1}{2}(n-1)$$

$$s_{i1} = s_{i2}r_{i1}, \quad s_{i2} = s_{i-1,1}r_{i2}, \quad s_{i2} = r_{i2}.$$

Расчет по формулам (9) проводится с применением блок-схемы III.

**2. Блок-схема программы.** Программа состоит из двух частей. Первая часть составлена по блок-схеме I (см. рис. 2) и с ее помощью рассчитываются области  $m = 1, \dots, M-1$ , а также величины  $A_{i1}$  и  $A_{i2}$ , необходимые для расчета в области  $m = M$ . Вторая часть программы составлена по блок-схемам II и III (см. рис. 3). При помощи этой части рассчитывается область  $m = M$ . По блок-схеме II ведутся расчеты на слое  $\tau = n\tau$  области  $m = M$ , если  $n$  четное, и по блок-схеме III, если  $n$  — нечетное.

Кроме этих частей имеется еще блок печати, в котором печатаются результаты и некоторые другие величины ( $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{33}$ ).

В оперативной памяти находится всегда только одна часть программы.

При данной задаче не использовались стандартные программы, за исключением программы перевода чисел из двоичной системы исчисления в десятичную. Для ускорения считывания с ленты пользуются тремя лентопротяжными устройствами. Программа составлена для ЭВМ «Минск-2» и ее полный объем — приблизительно 1300<sub>8</sub> команд.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нигул У., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 3, 345—384 (1965).

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
16/IV 1965

A. MÄNNIL

#### KOLMEMÕOTMELISE VÕRGUMEETODI PROGRAMM ÜLEMINEKUPROTSESSI TÕUPI PINGELAINETE UURIMISEKS PLAATIDES

Kolmemõotmelist võrgumeetodit on kirjeldatud kui efektiivset vahendit üleminekuprotsessi tüüpi pingelainete uurimiseks lühikestel ajaloikudel järskude impulsskoormiste korral [1]. Käesolevas artiklis vaadeldakse selle meetodi programmeerimisprobleemi üldisi aspekte, kusjuures arvestatakse arvuti «Minsk-2» võimalusi, mida autor kasutas praktilisteks arvutusteks.

A. MÄNNIL

#### A PROGRAM OF THE THREE-DIMENSIONAL NETWORKS METHOD FOR INVESTIGATIONS ON TRANSIENT WAVES IN PLATES

In the case of sharp impulsive loads the three-dimensional networks method [1] is efficient in early-time investigations on transient stress waves. In this paper some general aspects of the programming problem of this method are discussed, taking into consideration the possibilities of the computer "Minsk-2" used by the author in the practical computations.