

А. ТЮМАНОК

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ КОЛЕБАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ВОЗБУЖДАЕМОЕ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКОЙ

Рассматривается неустановившееся движение полубесконечной цилиндрической оболочки под действием нормального осесимметричного давления, движущегося равномерно, с докритической скоростью, от жестко закрепленного конца оболочки.

Аналогичная задача при установившемся движении рассмотрена на базе уравнений Кирхгоффа-Лява недавно [1-3]. Р. Скалак [4] поставил задачу неустановившегося движения цилиндрической оболочки с учетом инерции вращения и влияния среды, но не учитывал деформацию сдвига, которая вносит поправку такого же порядка, как и инерция вращения. Решение было выведено лишь на значительном расстоянии за фронтом волны. Неустановившееся движение по безмоментным уравнениям рассматривалось автором [5].

В настоящей работе задача неустановившегося движения цилиндрической оболочки решается уравнениями движения оболочки теории типа Тимошенко. Применяется преобразование Лапласа; обратное преобразование проводится приближенно методом разложения изображения по нисходящим степеням комплексного переменного и методом стационарной фазы.

Найдены распределения нормальных перемещений оболочки во времени и по координате при достаточно больших значениях времени. Показано, что при рассматриваемых кратковременных нагрузках главную часть решения дает безмоментное решение. Из моментной части решения наиболее существенны краевой эффект и группа волн с весьма низкой скоростью.

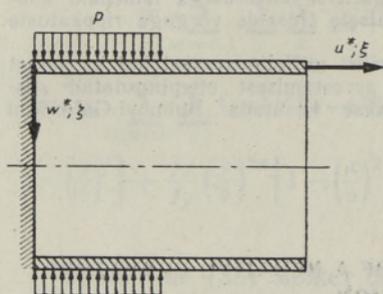


Рис. 1.

1. Пусть дана цилиндрическая оболочка радиусом R и толщиной h (рис. 1). Обозначим через $u^*(\xi, \tau, z)$, $w^*(\xi, \tau, z)$ перемещения точки оболочки по образующей и нормали. Введем безразмерные перемещения срединной поверхности $u(\xi, \tau)$, $\omega(\xi, \tau)$ и угол поворота нормали $\psi(\xi, \tau)$ по формулам

$$\omega^* = \frac{h}{\sqrt{12}} \omega(\xi, \tau) \quad (1.1)$$

$$u^* = \frac{h}{\sqrt{12}} u(\xi, \tau) - \frac{\xi}{2} \psi(\xi, \tau),$$

где ξ , ζ и τ — безразмерные координаты и время:

$$\xi = \frac{x}{R}, \quad \zeta = 1 - \frac{z}{R}, \quad \tau = \frac{c}{R} t \quad (c^2 = E/\rho(1 - \nu^2)). \quad (1.2)$$

Пусть в момент $\tau = 0$ по оболочке начинает распространяться с постоянной скоростью V равномерное осесимметричное давление P . Здесь V и P — безразмерные величины, определяемые по формулам

$$V = \frac{v}{c}, \quad P = \frac{\sqrt{12}(1-v^2)R}{Eh} p, \quad (1.3)$$

где v — скорость и p — давление нагрузки.

Тогда уравнения типа Тимошенко цилиндрической оболочки можно записать в виде (см. [6])

$$u'' - \dot{u} - v w' = 0$$

$$\psi'' - \ddot{\psi} - \frac{K^2}{\varepsilon^2} \psi - \frac{K^2}{\varepsilon} w' = 0 \quad (1.4)$$

$$-v u' - \frac{K^2}{\varepsilon} \psi' - K^2 w'' + \ddot{w} + w = \begin{cases} P & \text{при } V\tau \geq \frac{\xi}{\varepsilon} \\ 0 & \text{при } V\tau < \frac{\xi}{\varepsilon} \end{cases},$$

где $(\dots)' = \frac{\partial(\dots)}{\partial \xi}$, $(\dots)\ddot{} = \frac{\partial(\dots)}{\partial \tau}$, $\varepsilon = \frac{h}{\sqrt{12}R}$, $K^2 = \frac{1}{2} k(1-v)$.

(Здесь k — коэффициент сдвига. При $v=0,3$ $K^2=0,301$.)

Примем следующие начальные и граничные условия:

$$\text{при } \tau = 0 \quad u = \psi = w = \dot{u} = \dot{\psi} = \dot{w} = 0 \quad (1.5)$$

$$\text{при } \xi = 0 \quad u(\tau) = w(\tau) = \psi(\tau) = 0. \quad (1.6)$$

Обозначим изображения преобразования Лапласа функций u , w , ψ соответственно через U , W , Ψ

$$F(\xi, s) = \int_0^\infty f(\xi, \tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (f = u, w, \psi). \quad (1.7)$$

Преобразованная система уравнений (1.4) будет системой обыкновенных дифференциальных уравнений и имеет вид

$$U'' - s^2 U - v W' = 0$$

$$\Psi'' - \left(s^2 + \frac{K^2}{\varepsilon^2}\right) \Psi - \frac{K^2}{\varepsilon} W' = 0 \quad (1.8)$$

$$-v U' - \frac{K^2}{\varepsilon} \Psi' - K^2 W'' + (s^2 + 1) W = \frac{P}{s} e^{r_0 \xi}, \quad \left(r_0 = -\frac{s}{V}\right).$$

Решение этой системы можно выразить в виде

$$U = U_0 + \sum_{k=1}^3 U_k, \quad \Psi = \Psi_0 + \sum_{k=1}^3 \Psi_k, \quad W = W_0 + \sum_{k=1}^3 W_k \quad (1.9)$$

$$U_k = A_k e^{r_k \xi}, \quad \Psi_k = B_k e^{r_k \xi}, \quad W_k = e^{r_k \xi}, \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

где U_0 , Ψ_0 , W_0 представляют собой частное решение неоднородной системы (1.8); r_1 , r_2 , r_3 являются решениями характеристического уравнения

$$K^2 r^6 - [(1 + 2K^2)s^2 + 1 - v^2]r^4 + \left[(2 + K^2)s^4 + \frac{K^2}{s^2}(s^2 + 1 - v^2) \right] r^2 - s^2(s^2 + 1) \left(s^2 + \frac{K^2}{\varepsilon^2} \right) = 0, \quad (1.10)$$

удовлетворяющие условию $\operatorname{Re} r_k < 0$ при $\operatorname{Re} s > 0$.

Пусть r_1 — решение, связанное с безмоментным состоянием оболочки и r_2, r_3 — с моментным состоянием, причем r_2 будет характеризовать волны сдвига.

На основе (1.8) коэффициенты A_k, B_k, C_k могут быть представлены в форме:

$$A_k = v r_k \left(r_k^2 - s^2 - \frac{K^2}{\varepsilon^2} \right) \Lambda_k, \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$B_k = -\frac{K^2}{\varepsilon} r_k (r_k^2 - s^2) \Lambda_k$$

$$C_k = (r_k^2 - s^2) \left(r_k^2 - s^2 - \frac{K^2}{\varepsilon^2} \right) \Lambda_k, \quad (1.11)$$

где
$$\Lambda_0 = -P[K^2 s (r_0^2 - r_1^2)(r_0^2 - r_2^2)(r_0^2 - r_3^2)]^{-1} \quad (1.12)$$

и $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ — постоянные интегрирования системы (1.8). При краевых условиях (1.6)

$$\Lambda_1 = b_{023} C_{023} L_0, \quad \Lambda_2 = b_{103} C_{103} L_0, \quad \Lambda_3 = b_{120} C_{120} L_0, \quad (1.13)$$

где
$$b_{123} C_{123} L_0 = -\Lambda_0, \quad b_{123} = (r_1 - r_3)(r_2 - r_1)(r_3 - r_2)$$

$$C_{123} = \frac{K^2}{\varepsilon^2} [r_1 r_2 r_3 + s^2(r_1 + r_2 + r_3)] + r_1 r_2 r_3 (2s^4 + r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) + (r_1 + r_2 + r_3) s^4$$

и остальные выражения получаются заменой индексов 1, 2 или 3 индексом 0.

2. Решение системы (1.4) получается в виде интеграла Меллина

$$f(\xi, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\text{Br}} F(\xi, s) e^{s\tau} ds, \quad (F = U_k, \Psi_k, W_k), \quad (k = 0, 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

где первоначальный контур интегрирования — контур Бромвича (рис. 2). Стандартным путем может быть доказано (см. контур Γ_1 на рис. 2) существование фронтов: $H(\zeta_0)$ — фронт частного решения системы (1.4) (фронт нагрузки), $H(\zeta_1)$ — безмоментного решения и моментного с индексом 3 (фронт продольной упругой волны) и $H(\zeta_2)$ — моментного решения с индексом 2, $H(\zeta)$ — функция Хевисайда и $\zeta_0 = \tau - \xi/V$, $\zeta_1 = \tau - \xi$, $\zeta_2 = \tau - \xi/K$.

Частное решение можно найти точно путем определения вычетов в полосах

$$s_0 = 0, \quad s_{1,2} = \pm \omega_1 i, \quad s_{3,4} = \pm \omega_3 i,$$

где
$$\omega_1^2 = \frac{1 - v^2 - V^2}{1 - V^2}, \quad \omega_3^2 = \frac{V^4 K^2}{(1 - V^2)(K^2 - V^2)\varepsilon^2}, \quad (2.2)$$

и оно будет

$$\omega_0(\xi, \tau) = \frac{P}{\omega_1^2} (1 - \cos \omega_1 \xi_0) + \frac{P(1-V^2)}{V^4} \varepsilon^2 \cos \omega_3 \xi_0. \quad (2.3)$$

Остальные слагаемые в (1.9) находятся приближенно асимптотическими методами.

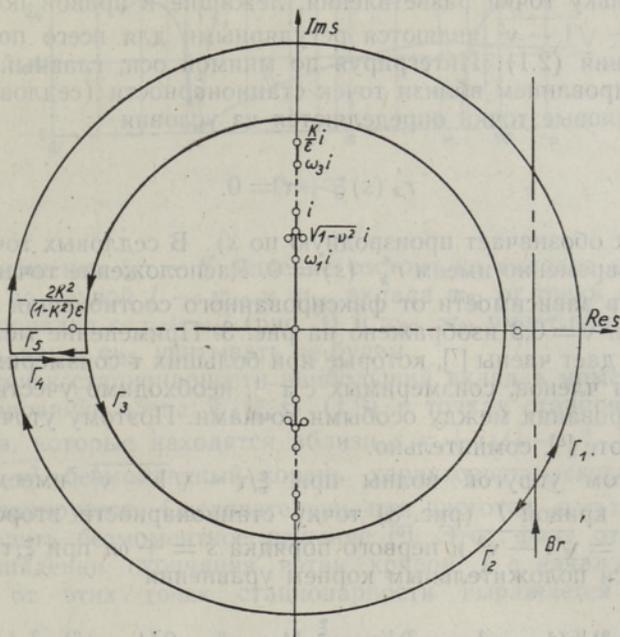


Рис. 2.

Вначале рассмотрим прифронтовые зоны. Сделаем разрез по мнимой оси между точками $+\varepsilon^{-1}Ki$ и $-\varepsilon^{-1}Ki$, малые разрезы вблизи точек $s = \pm i\sqrt{1-v^2}$ и введем в рассмотрение деформированный контур интегрирования $\Gamma_2 + \Gamma_4 + \Gamma_3 + \Gamma_5$ (рис. 2). Отметим, что нет необходимости делать разрез между точками разветвления $-2K^2/(1-K^2)\varepsilon$ и $+2K^2/(1-K^2)\varepsilon$, поскольку для подынтегрального выражения (2.1) (для суммы W_2 и W_3) эти точки будут регулярными. Оказывается, что на контуре Γ_2 выполняется лемма Жордано и по нему интегрировать не следует. Также равняется нулю интеграл по обоим берегам $\Gamma_4 + \Gamma_5$ разреза. Итак, фактически придется интегрировать по контуру Γ_3 , при котором применимо разложение подынтегральной функции по нисходящим степеням s , позволяющее почленное обращение с применением интеграла Сонина—Шлеффли. Выпишем главный член решения для нормального перемещения за фронтом упругой продольной волны

$$\omega_{11} = -\frac{4PV}{v^2(1-V^2)} \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^2 J_4(v\sqrt{2\xi\xi_1}) \quad (2.4)$$

$$\omega_{31} = -\frac{4V^2(I+KV)}{(1-V^2)(K+V)} \varepsilon^2 \left(\frac{\xi_1}{\xi}\right)^2 J_4\left(\frac{K}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2\xi\xi_1}{1-K^2}}\right). \quad (2.5)$$

Из них ω_{11} представляет безмоментное, а ω_{31} — моментное решение. Отметим, что ω_{31} имеет амплитуду порядка ϵ^2 и частоту порядка ϵ^{-1} .

3. Рассмотрим теперь применение метода стационарной фазы для анализа волнового процесса за фронтами волн при больших значениях времени. Контур интегрирования можно провести по мнимой оси с обходом полюсов и точек разветвления по малым окружностям. Это допустимо, поскольку точки разветвления, лежащие в правой полуплоскости вблизи $s = \pm \sqrt{1 - v^2}$ являются регулярными для всего подынтегрального выражения (2.1). Интегрируя по мнимой оси, главный вклад вносится интегрированием вблизи точек стационарности (седловых точек) и полюсов. Седловые точки определяются из условия

$$r'_k(s)\xi + \tau = 0. \quad (3.1)$$

(Здесь штрих обозначает производную по s). В седловых точках второго порядка одновременно имеем $r''_k(s) = 0$. Расположение точек стационарности $s = \omega i$ в зависимости от фиксированного соотношения ξ/τ для случая $\epsilon = 0,01$ и $v = 0,3$ изображено на рис. 3. Применение метода стационарной фазы дает члены [7], которые при больших τ соизмеримы с τ^0 , $\tau^{-1/2}$, ... Для учета членов, соизмеримых с τ^{-1} , необходимо учесть конечность пути интегрирования между особыми точками. Поэтому уточнение, полученное в работе [8], сомнительно.

За фронтом упругой волны при $\xi/\tau \sim \sqrt{1 - v^2}$ имеем на ветви $\omega < \sqrt{1 - v^2}$ кривой I (рис. 3) точку стационарности второго порядка $s = 0$ при $\xi/\tau = \sqrt{1 - v^2}$ и первого порядка $s = \pm \omega i$ при $\xi/\tau < \sqrt{1 - v^2}$, где ω является положительным корнем уравнения

$$(1 - \omega^2)^{1/2}(1 - v^2 - \omega^2)^{3/2} = \frac{\xi}{\tau} [1 - v^2 - 2(1 - v^2)\omega^2 + \omega^4]. \quad (3.2)$$

Вклады этих точек обозначим соответственно ω_{12} и ω_{13}

$$\omega_{12} = a \left[-\frac{1}{3} + \int_0^{-\zeta_4} \text{Ai}(x) dx \right] - \quad (3.3)$$

$$- \frac{PVv^{2/3}(1 - v^2)^{1/2}}{1 - v^2 - v^2} \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} \left(\frac{2 - v^2}{2(1 - v^2)} + \omega_1^{-2} \right) \xi^{-2/3} \frac{d}{d\zeta_4} \text{Ai}(-\zeta_4),$$

$$\text{где } a = \frac{PVv^2}{(1 - v^2 - v^2)\sqrt{1 - v^2}}, \quad \zeta_3 = \tau - \frac{\xi}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \zeta_4 = \frac{\sqrt{1 - v^2}}{\sqrt{3v^2\xi}} \zeta_3, \quad (3.4)$$

а $\text{Ai}(\zeta)$ — функция Эйри

$$\text{Ai}(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \left(\zeta x + \frac{x^3}{3} \right) dx \quad (3.5)$$

$$\omega_{13} = -a \left[1 + \sqrt{\frac{2(1 - v^2)}{\pi |r''_k(\omega i)| \xi}} \frac{\omega_1^2 \sin \left[\omega \tau + r'_k(\omega i) \xi - \frac{\pi}{4} \right]}{\omega (\omega_1^2 - \omega^2) \sqrt{(1 - \omega^2)(1 - v^2 - \omega^2)}} \right]. \quad (3.6)$$

От точки стационарности на ветви $\omega \geq 1$ кривой 1 (рис. 3) получим для ω_{14} формулу, совпадающую со вторым членом (3.6).

Кривая 2 при $\xi/\tau \sim \sqrt{1-v^2}$ точек стационарности не дает. Вклад ω_{32} от точки стационарности, определяемой кривой 3, имеет порядок $\varepsilon^2 \tau^{-1/2}$, и ввиду малости его не учитываем.

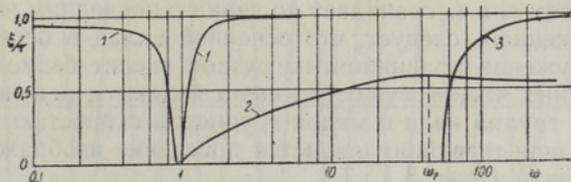


Рис. 3.

При соотношении $\xi/\tau \sim K$ решение состоит из вкладов от точек стационарности на кривой 1 — ω_{13} и ω_{14} , вклада ω_{21} от точки стационарности второго порядка $s = \pm \omega_2 i$ (рис. 3) и ω_{32} . ω_{21} имеет порядок малости $\varepsilon^{7/3} \tau^{-1/2}$, и его, как и ω_{32} , учитывать не будем.

Из всех точек стационарности наибольший вклад в моментные члены дает интегрирование члена $W_2(\xi, s)$ (1.9) в точках стационарности второго порядка, которые находятся вблизи $s = \pm i\sqrt{1-v^2}$. Около точек $s = \pm i\sqrt{1-v^2}$ безмоментный корень характеристического уравнения (1.10) не сепарируется. Следовательно, при частотах $\omega = \omega_4 = \sqrt{1-v^2}$ нельзя выделить безмоментное решение [6]. Этот факт отражается на рис. 3 в совпадении окончания ветви кривой 1 с началом кривой 2. Вклад ω_{22} от этих точек стационарности выражается следующим образом:

$$\omega_{22} = C_{21} \varepsilon^{4/3} \xi^{-1/3} \text{Ai}(\zeta_5) \cos \zeta_6, \tag{3.7}$$

где

$$\zeta_5 = C_{22} \varepsilon^{7/6} \xi^{-1/6} [\tau + r_2'(\omega_4 i) \xi], \quad \zeta_6 = \sqrt{1-v^2} \tau - |r_2(\omega_4 i)| \xi + \alpha_0$$

(C_{21}, C_{22}, α_0 — постоянные порядка единицы, которые из-за громоздкости не приводим).

Хотя ω_{22} по (3.7) представляет группу волн с амплитудой порядка $\varepsilon^{4/3} \xi^{-1/3}$, которая движется со скоростью $[-r_2'(\omega_4 i)]^{-1} = 2\sqrt{2}v\varepsilon$, она из-за малости ξ может внести заметный вклад.

Интегрирование вблизи полюсов s_1 и s_2 дает безмоментное решение на значительном расстоянии от фронта нагрузки; оно выражается при помощи интегралов Френеля

$$\begin{aligned} \omega_{13} = \frac{P}{2\omega_1^2} \{ [I + C(\zeta_7) + S(\zeta_7)] \cos \omega_1 \zeta_0 + \\ + [C(\zeta_7) - S(\zeta_7)] \sin \omega_1 \zeta_0 \}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$\zeta_7 = \frac{\tau + r_1'(s_2) \xi}{\sqrt{2} |r_1''(s_2)| \xi}. \tag{3.9}$$

Вычет вторых и третьих членов (1.9) в полюсе $s = s_0$ дает решение типа краевого эффекта

$$\omega_{20} + \omega_{30} = -(P\omega_1^{-2} - a)e^{-\xi_1} (\cos \xi_1 - \sin \xi_1), \quad (3.10)$$

$$\text{где } \xi_1 = \frac{\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{2\varepsilon}} \xi,$$

а вычет в полюсах s_3 и s_4 совпадает до знака с последним членом (2.3).

4. Из изложенного следует, что основной вклад в перемещения оболочки при нагружении подвижной нагрузкой вносит безмоментное решение. Из моментных членов существенными являются решение типа краевого эффекта и группа волн с малой групповой скоростью. В безмоментных же членах определяющим является поведение изображений (1.9) на ветви $\omega < \Gamma$ кривой I рис. 3.

Рассмотрим сказанное на частном примере. Пусть $P = 1$, $V = 0,5$, $\varepsilon = 0,01$ и $v = 0,3$. На рис. 4а, б изображены перемещения оболочки и вклад отдельных членов в момент $\tau = 100$, при котором фронт нагрузки находится в точке $\xi = 50$ (рис. 4а), а фронт упругой волны $\xi = 100$ (рис. 4б).

В нагруженной зоне составными компонентами движения оболочки являются (см. рис. 4а):

а) постоянное во времени перемещение оболочки (кривая 1), состоящее из узкой зоны краевого эффекта, вычисляемого по (3.10), и прямой $\omega = P\omega_1^{-2} - a$;

б) интенсивное колебание с амплитудой $\sim 1,1$, которое за фронтом мало изменяется, а с удалением от фронта резко спадает. Этот результат отличается от результата, полученного в работе [4], по которому амплитуда колебания за фронтом нагрузки убывает монотонно. В промежутке $10 \leq \xi \leq 50$ решение определяется формулами (2.3) и (3.6) (кривая 2) и при $0 \leq \xi \leq 10$ — формулами (2.3) и (3.8) (кривая 3);

в) за зоной интенсивных колебаний следует зона колебаний с амплитудами, монотонно убывающими от $\sim 0,25$ до нуля. В рассматриваемый момент эта зона занимает узкую полосу у края оболочки $0 \leq \xi \leq 1,5$ (кривая 3);

г) колебания, изображаемые членом ω_{14} (кривая 4);

д) вклад моментного решения ω_{22} по формуле (3.7) (кривая 5).*

Перед фронтом нагрузки движение складывается из двух компонентов (см. рис. 4б):

а) нарастающих колебаний, которые начинаются от фронта упругой волны и продолжаются на нагруженной части (группа волн пункта «г»). На фронте упругой волны перемещения определяются по ω_{11} (кривая 1 на рис. 4б), а с удалением от фронта — по ω_{14} (кривая 4 на рис. 4а и кривая 2 на рис. 4б);

б) за фронтом упругой продольной волны следует более мощная группа волн. Ее условный фронт движется с групповой скоростью $\sqrt{1-v^2}$. Перемещения в первом приближении изображены ступенчатой линией 3. Во втором приближении (первые два члена формулы (3.3)) перемещения выражаются функцией Эйри (кривая 4), что совпадает с результатом работы Скалака [4]. Если учесть последний член (3.3), то решение изображается кривой 5 и переходит в решение, вычисленное по формуле (3.6) (кривая 6).

Отметим, что работа основана на теории типа Тимошенко и не описывает всех явлений, которые охватываются трехмерной теорией.

* Кривые 4, 5 на рис. 4а вычерчены неполностью; пунктиром показаны огибающие их максимальных амплитуд.

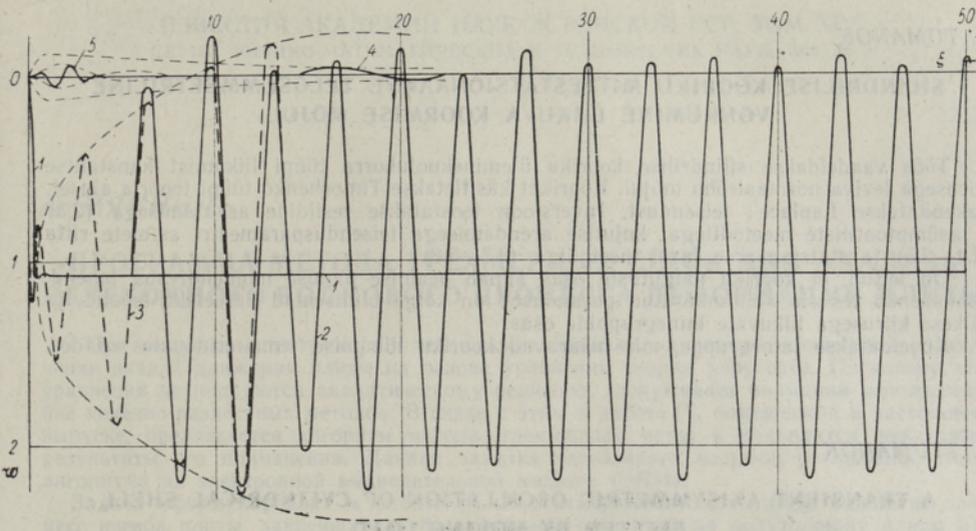


Рис. 4а.

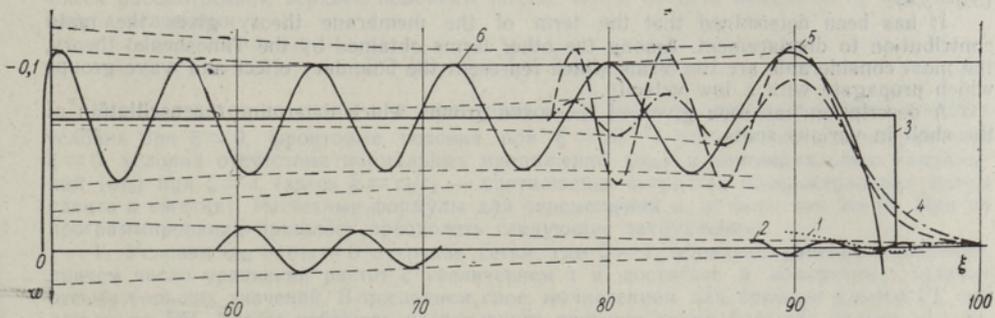


Рис. 4б.

ЛИТЕРАТУРА

1. Присекин В. Л., Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностр., № 5, 133—134 (1961).
2. Ильющин А. А., Огибалов П. М., Упруго-пластические деформации полых цилиндров, Изд. МГУ, 1960.
3. Mann-Nachbar P., J. Aero Space Sci., 29, 648—657 (1962).
4. Skalac R., Trans. ASME, 78, No. 1, 105—116 (1956).
5. Тюманок А. Н., Изв. АН СССР. Механика и машиностр., № 4, 47—53 (1964).
6. Алумяэ Н., Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, № 3, 171—181 (1961).
7. Berkowitz H. M., J. Appl. Mech., 30, No. 3, 347—354 (1963).
8. Jones O. E., Ellis A. T., J. Appl. Mech., 30, No. 1, 51—60 (1963).

A. TUMANOK

SILINDRILISE KOORIKU MITTESTATSIONAARNE TELGSUMMEETRILINE VÖNKUMINE LIIKUVA KOORMISE MÖJUL

Töös vaadeldakse silindrilise kooriku üleminekuolukorra tüüpi liikumist konstantse kiirusega leviva normaalrõhu mõjul. Koorikut käsitletakse Timoshenko tüüpi teooria alusel. Rakendatakse Laplace'i teisendust. Inversioon teostatakse resiidide arvutamise (2.3) ja asümptootiliste meetoditega: kujutise arendamisega teisendusparameetri astmete ritta (2.4—2.5) ja statsionaarse faasi meetodiga (3.3—3.8).

On leitud, et kooriku paigutuste osas annab peamise panuse momendivaba lahend. Timoshenko teooria abil määratud parandused on kõige olulisemad ääreefekti-tsoonis ja väikese kiirusega liikuvate lainegruppide osas.

Kirjeldatakse lainegruppe, mis määravad kooriku liikumise tema erinevates osades.

A. TYUMANOK

A TRANSIENT AXISYMMETRIC OSCILLATION OF CYLINDRICAL SHELL EXCITED BY MOVING LOAD

In this paper a transient oscillation of the cylindrical shell is considered on the basis of the Timoshenko type theory. The Laplace transform method has been used. The inversion has been carried out by means of residue theorem (2.3) and by asymptotic methods: the expansion on power series (2.4—2.5) and methods of the stationary phase (3.3—3.8).

It has been determined that the term of the membrane theory gives the main contribution to displacement. Among the other terms obtained by the Timoshenko theory, the most considerable are the terms which represent the boundary effect and wave groups which propagate with a low velocity.

A description has been given of the wave groups which determine the oscillation of the shell in various spots.