EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 3

Л. АЛЛИКАС

О РАСЧЕТЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ, УСИЛЕННОЙ РЕБРОМ

Рассматривается полуплоскость с ребром на ее свободной грани (рис. 1). Нагрузка приложена к ребру и должна быть такой, чтобы $p(x) = -p(-x)$. При этом предполагается, что: 1) коэффициент Пуассона $\mu = 0$; 2) касательная нагрузка и усилия сдвига приложены к оси ребра; 3) жесткость ребра при изгибе равна нулю ($\sigma_y(x, 0) = 0$) и напряжения распределены равномерно по поперечному сечению ребра.

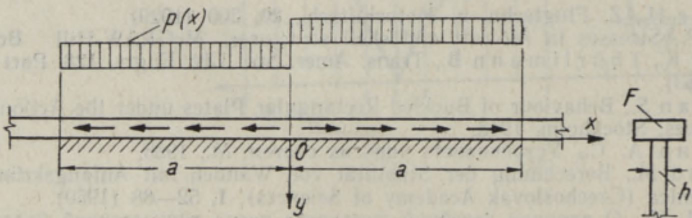

Рис. 1.

В случае подобранной нагрузки напряженное состояние симметрично оси y. В соответствии с этим и в предположении, что $\sigma_y\ (x, 0) = 0$ выбирается функция напряжения в виде

$$\Phi = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha}\, y\, B\, e^{-\alpha y} \cos\alpha x d\alpha, \tag{1}$$

где $B = B(\alpha)$ определяется из краевых условий.

Используя стандартные формулы, выражающие компоненты плоского напряженного состояния через функцию напряжения (1), получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \int_0^\infty (-2B + \alpha y B) e^{-\alpha y} \cos\alpha x d\alpha \\ \sigma_y &= \int_0^\infty \alpha\, y\, B\, e^{-\alpha y} \cos\alpha x d\alpha \\ \tau &= \int_0^\infty (B - \alpha\, y\, B) e^{-\alpha y} \sin\alpha x d\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

На грани полуплоскости $y = 0$ имеем:

$$
\begin{aligned}
\sigma_x(x, 0) &= -\int_0^\infty 2B \cos\alpha x d\alpha \\
\sigma_y(x, 0) &= 0 \\
\tau(x, 0) &= \int_0^\infty B \sin\alpha x d\alpha.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Внешняя нагрузка прилагается к ребру на участке конечной длины и выражается интегралом Фурье

$$
p(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x d\alpha \int_0^a p(s) \sin\alpha s ds. \tag{4}
$$

Условие равновесия ребра имеет вид

$$
\frac{d\sigma}{dx} + \frac{h}{F}\tau - \frac{1}{F}p(x) = 0, \tag{5}
$$

где σ — напряжение в ребре.

Условие контакта ребра и пластинки $\varepsilon_x(x, 0) = \varepsilon$ при $\mu = 0$ представляется в виде

$$
\sigma_x(x, 0) = \sigma. \tag{6}
$$

Используя уравнения (3) и (6), можем написать условие равновесия ребра в виде

$$
\int_0^\infty 2B\,\alpha \sin\alpha x d\alpha + \frac{h}{F}\int_0^\infty B \sin\alpha x d\alpha = \frac{1}{F}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin\alpha x d\alpha \int_0^a p(s) \sin\alpha s ds,
$$

откуда

$$
B(\alpha) = \frac{2}{\pi F}\frac{\int_0^a p(s) \sin\alpha s ds}{\alpha + r}, \tag{7}
$$

где $r = \frac{h}{2F}$.

В приведенном ниже численном примере принимается $p(x) = -p_0 = \text{const}$, соответственно чему

$$
B(\alpha) = -\frac{p_0}{\pi F}\frac{1 - \cos\alpha a}{\alpha(r + \alpha)}
$$

и компоненты напряжения

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{p_0}{\pi F}\int_0^\infty (2 - \alpha y)e^{-\alpha y}\frac{1 - \cos\alpha a}{\alpha(r + \alpha)}\cos\alpha x d\alpha \\
\sigma_y &= \frac{p_0}{\pi F}\int_0^\infty \alpha y e^{-\alpha y}\frac{1 - \cos\alpha a}{\alpha(r + \alpha)}\cos\alpha x d\alpha \\
\tau &= \frac{p_0}{\pi F}\int_0^\infty (-1 + \alpha y)e^{-\alpha y}\frac{1 - \cos\alpha a}{\alpha(r + \alpha)}\sin\alpha x d\alpha.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Контактные напряжения между ребром и пластинкой

$$\sigma_x(x,\ 0)=\frac{2p_0}{\pi F}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha a}{\alpha(r+\alpha)}\cos\alpha x d\alpha=\frac{4p_0}{\pi h}\Big[\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha a}{\alpha}\cos\alpha x d\alpha -$$

$$-\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha a}{r+\alpha}\cos\alpha x d\alpha\Big]=\frac{4p_0}{\pi h}[\ln\frac{\sqrt{|a^2-x^2|}}{x}+\sin(rx)\,\mathrm{si}\,(rx)+\cos(rx)\,\mathrm{ci}\,(rx)-$$

$$-\frac{1}{2}\sin r(a-x)\,\mathrm{si}\,r(a-x)-\frac{1}{2}\cos r(a-x)\,\mathrm{ci}\,r(a-x)-$$

$$-\frac{1}{2}\sin r(a+x)\,\mathrm{si}\,r(a+x)-\frac{1}{2}\cos r(a+x)\,\mathrm{ci}\,r(a+x)] \qquad (9)$$

$$\tau(x,0)=-\frac{p_0}{\pi F}\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha a}{\alpha(r+\alpha)}\sin\alpha x d\alpha=$$

$$=-\frac{2p_0}{\pi h}\Big[\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha a}{\alpha}\sin\alpha x d\alpha-\int_0^\infty\frac{1-\cos\alpha a}{r+\alpha}\sin\alpha x d\alpha\Big]=$$

$$=-\frac{2p_0}{\pi h}\Big[\frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,x-\left\{\begin{array}{l}0 \text{ при } |x|<|a| \\ \frac{\pi}{4} \text{ при } |x|=|a| \\ \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sign}\,x \text{ при } |x|>|a|\end{array}\right\}+$$

$$+\cos(rx)\,\mathrm{si}\,(rx)-\sin(rx)\,\mathrm{ci}\,(rx)+$$

$$+\frac{1}{2}\cos r(a-x)\,\mathrm{si}\,r(a-x)-\frac{1}{2}\sin r(a-x)\,\mathrm{ci}\,r(a-x)-$$

$$-\frac{1}{2}\cos r(a+x)\,\mathrm{si}\,r(a+x)+\frac{1}{2}\sin r(a+x)\,\mathrm{ci}\,r(a+x)\Big]. \qquad (10)$$

Компоненты напряжения, вычисленные по формулам (9) и (10) для значений $r=1$ и $r=3$, изображены на рис. 2.

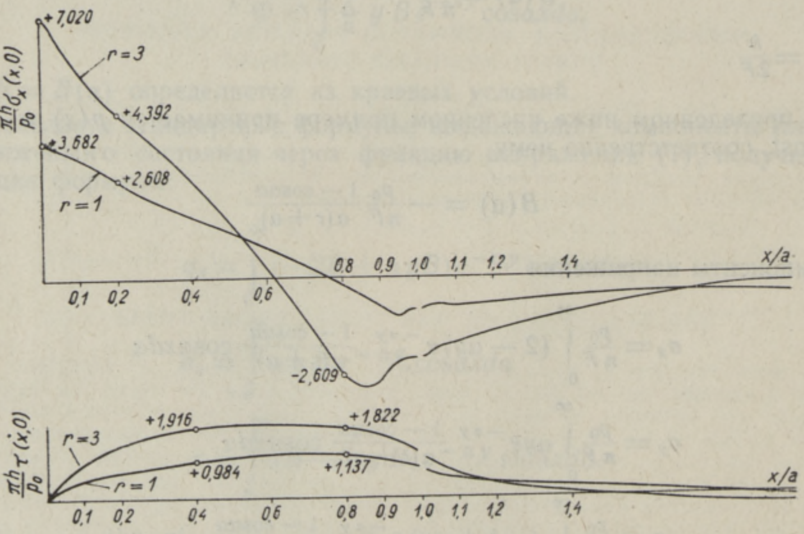

Рис. 2.

Из изложенного следует, что по мере уменьшения площади сечения ребра F уменьшается и усилие в нем. А именно, при $r=1$ ($F=10h^2$) усилие в середине ребра уменьшается на 41% и при $r=3$ ($F=3{,}5h^2$) — на 63% по сравнению с усилием при отсутствии плиты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Папкович П. Ф., Теория упругости, М., 1939.
2. Melan E., Ingenieur-Archiv, 3, H. 2, 123—129 (1932).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 23/III 1965

L. ALLIKAS

RIBIGA TUGEVDATUD POOLTASAPINNA ARVUTAMISEST

Vaadeldakse vabal serval ribiga tugevdatud pooltasapinda, mis on koormatud lõplikul pikkusel mõjuvate jõududega. Ülesanne lahendatakse Fourier' integraalide abil. Juhule $-p(x)=p(-x)$ on arvutatud ribi ja plaadi vahel mõjuvad kontaktpinged.

L. ALLIKAS

STUDY OF A STIFFENED SEMI-INFINITE PLATE

The use of stiffened-sheet constructions in civil-engineering design has brought about the study of many problems in mechanics, in which loads are transferred by means of stiffners to the sheet. In the present paper a stiffened semi-infinite plate is considered. The solution is found by Fourier's integral method. The physical condition that governs the problem is that the axial stress in the stiffener must be equal to the normal stress in the sheet at all points along the stiffener. A numerical example is presented.