EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 3

*И. ААРЕ*

# ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ПЛАСТИНОК ПРИ СДВИГЕ

Расчет тонкостенных металлических балок, подвергающихся действию больших нагрузок, связан в первую очередь с определением напряженного состояния вертикальной стенки.

Известно, что тонкие вертикальные стенки имеют, как правило, начальные искривления. В связи с этим уже при малых нагрузках стенка изгибается в поперечном направлении: появляются отдельные волны вдоль диагонали. Поэтому для правильной оценки работы балки необходим учет работы стенки с учетом поперечных выпучин. В то же время в случае стенки с начальными выпучинами понятие критических напряжений теряет смысл и оказывается лишь определенной фикцией. Явления бифуркации отсутствуют, и так наз. закритическая стадия стенки наступает уже в начальной стадии работы балки.

В области исследования работы балки в послекритической стадии имеются определенные достижения. Разработаны как упрощенные [1–3], так и более точные методы [4–6]. Но принятые в этих работах схемы расчета либо не вполне соответствуют действительным условиям работы стенки балки, либо проблема решается в первом приближении.

Настоящая работа представляет собой попытку теоретического исследования работы квадратной панели тонкостенной сварной балки с учетом действительных краевых условий.

**Общие уравнения и краевые условия.** Состояние равновесия пластины в послекритической стадии определяется основными уравнениями равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial x}=0 \tag{2}$$

$$\frac{D}{t}\nabla^2\nabla^2 w=\sigma_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\sigma_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2\tau\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{3}$$

Здесь $t$ — толщина стенки, остальные обозначения — стандартные. Подставляя выражения напряжений

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] \tag{4}$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] \tag{5}$$

$$\tau=\frac{E(1-\mu)}{2(1-\mu^2)}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}\right] \tag{6}$$

в уравнения равновесия, получим три дифференциальных уравнения для определения смещений $u$, $v$ и $w$. Решение этих уравнений в общем виде не получено. Поэтому и в настоящей работе задача решается приближенно.

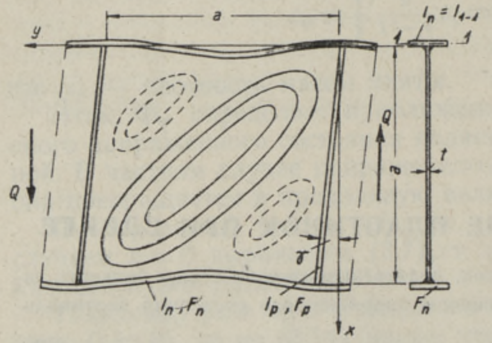


Рис. 1.

Рассматривается расчет сварных балок, имеющих опорные ребра со значительной изгибной жесткостью. В связи с этим можем предполагать, что опорное ребро жесткости не искривляется в плоскости стенки балки. Также предполагается отсутствие изгибных деформаций промежуточных поперечных ребер. Исследованию подвергаются панели со следующими показателями относительных жесткостей, которые наиболее часто встречаются на практике:

а) жесткость на сжатие пояса (рис. 1) $\frac{F_{\text{п}}}{at} = 1,0$,

б) жесткость на сжатие ребер $\frac{F_{\text{р}}}{at} = 0,5$,

где $F_{\text{п}}$ и $F_{\text{р}}$ — площадь поперечного сечения пояса и ребра соответственно.

В результате имеем следующие граничные условия задачи:

$$1)\quad x = 0, a \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad \sigma_x = 0 \qquad \varepsilon_y^{\text{п}} = \varepsilon_y^{\text{пл}} \tag{7}$$

$$2)\quad y = 0, a \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \qquad \varepsilon_x^{\text{р}} = \varepsilon_x^{\text{пл}} \tag{8}$$

где $\varepsilon^{\text{п}}_{y}$, $\varepsilon^{\text{пл}}$ и $\varepsilon^{\text{р}}$ — относительное удлинение пояса, стенки и ребра соответственно.

**Решение задачи.** Принимая во внимание вышеприведенные краевые условия, выбираем функцию прогиба срединной поверхности пластины в виде

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{a}, \tag{9}$$

$$(m = 1, 2, 3; \quad n = 1, 2, 3)$$

где $w_{mn}$ — неопределенные коэффициенты.

Рассматривая $w$ как заданную функцию, получим из (1) на основе (2) следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \tag{11}$$

Решение уравнений (10) и (11) представим в форме

$$\begin{aligned} u={}&u_1(x,y)+\alpha x+A_0+\bar{A}_0 y+\sum_{m=1,2,}\sin\frac{m\pi x}{a}\Big[A_m\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}+B_m\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}+\\ &+C_m\Big(y\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}+\frac{a}{m\pi}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\Big)+D_m\Big(y\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}+\frac{a}{m\pi}\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\Big)\Big]-\\ &-\sum_{m=1,2,}\cos\frac{m\pi y}{a}\Big[\bar{A}_m\operatorname{sh}\frac{m\pi x}{a}+\bar{B}_m\operatorname{ch}\frac{m\pi x}{a}+\bar{C}_m\Big(x\operatorname{sh}\frac{m\pi x}{a}-\\ &-2\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{a}{m\pi}\operatorname{ch}\frac{m\pi x}{a}\Big)+\bar{D}_m\Big(x\operatorname{ch}\frac{m\pi x}{a}-2\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{a}{m\pi}\operatorname{sh}\frac{m\pi x}{a}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} v={}&v_1(x,y)+\beta y+\gamma x+B_0-\sum_{m=1,2,}\cos\frac{m\pi x}{a}\Big[A_m\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}+B_m\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}+\\ &+C_m\Big(y\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}-2\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{a}{m\pi}\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}\Big)+D_m\Big(y\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}-2\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{a}{m\pi}\operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a}\Big)\Big]+\\ &+\sum_{m=1,2,}\sin\frac{m\pi y}{a}\Big[\bar{A}_m\operatorname{ch}\frac{m\pi x}{a}+\bar{B}_m\operatorname{sh}\frac{m\pi x}{a}+\bar{C}_m\Big(x\operatorname{ch}\frac{m\pi x}{a}+\\ &+\frac{a}{m\pi}\operatorname{sh}\frac{m\pi x}{a}\Big)+\bar{D}_m\Big(x\operatorname{sh}\frac{m\pi x}{a}+\frac{a}{m\pi}\operatorname{ch}\frac{m\pi x}{a}\Big)\Big], \end{aligned} \tag{13}$$

где:

1) $u_1(x,y)=\sum_m\sum_n u_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a}$ и

$v_1(x,y)=\sum_m\sum_n v_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{a}$ —

частное решение уравнений (12), (13);

2) $\sum_m\sin\frac{m\pi x}{a}\left[A_m\operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a}+\ldots\right],\ \ldots$ —

функция, удовлетворяющая уравнениям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0; \tag{15}$$

3) $A_m$, $B_m$, ... — постоянные интегрирования;

4) $A_0$, $\bar{A}_0$, $B_0$ — постоянные:

$$A_0 = \sum_{m=1,2,} \left(\bar{B}_m - 2\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{a}{m\pi}\bar{C}_m\right)$$

$$\bar{A}_0 = \sum_{m=1,2,} \frac{1}{a}[(-1)^m - 1]\left(\bar{B}_m - 2\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{a}{m\pi}\bar{C}_m\right)$$

$$B_0 = \sum_{m=1,2,} \left(B_m - 2\frac{1-\mu}{1+\mu}\frac{a}{m\pi}C_m\right);$$

5) $\alpha$, $\beta$ — постоянные;

6) $\gamma$ — угол сдвига.

Подставляя выражения перемещений

$$u = \sum_m\sum_n u_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{a} \tag{16}$$

$$v = \sum_m\sum_n v_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a} \tag{17}$$

в уравнения (10), (11), получим систему алгебраических уравнений, откуда находим параметры $u_{mn}$ и $v_{mn}$.

Функцию прогиба принимаем в виде:

$$w = w_{11}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + w_{22}\sin\frac{2\pi x}{a}\sin\frac{2\pi y}{a} +$$
$$+ w_{13}\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{a} + w_{31}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{a} + w_{33}\sin\frac{3\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{a}. \tag{18}$$

Тогда для параметров $u_{mn}$ и $v_{mn}$ имеем следующие выражения (при $\mu = 0{,}3$):

$$u_{20}\frac{a}{\pi} = -0{,}04375w_{11}^2 - 0{,}4125w_{11}w_{31} - 0{,}7125w_{13}w_{33} + 0{,}10625w_{13}^2$$

$$v_{02}\frac{a}{\pi} = -0{,}4125w_{11}w_{13} - 0{,}7125w_{31}w_{33} - 0{,}04375w_{11}^2 + 0{,}10625w_{31}^2$$

$$u_{40}\frac{a}{\pi} = -0{,}0875w_{22}^2 - 0{,}16875w_{11}w_{31} - 0{,}01875w_{13}w_{33}$$

$$v_{04}\frac{a}{\pi} = -0{,}0875w_{22}^2 - 0{,}16875w_{11}w_{13} - 0{,}01875w_{31}w_{33}$$

$$u_{60}\frac{a}{\pi} = -0{,}18125w_{31}^2 - 0{,}13125w_{33}^2$$

$$v_{06}\frac{a}{\pi} = -0{,}18125w_{13}^2 - 0{,}13125w_{33}^2$$

$$u_{11}\frac{a}{\pi} = -0{,}50w_{11}w_{22} + 0{,}20w_{22}w_{13} - 0{,}80w_{22}w_{31} - 1{,}50w_{22}w_{33}$$

$$v_{11}\frac{a}{\pi} = -0{,}500w_{11}w_{22} - 0{,}800w_{22}w_{13} + 0{,}200w_{22}w_{31} - 1{,}500w_{22}w_{33}$$

$$u_{31}\frac{a}{\pi} = -0{,}144w_{11}w_{22} - 0{,}076w_{22}w_{13}$$

$$v_{13}\frac{a}{\pi} = -0{,}1440w_{11}w_{22} - 0{,}0760w_{22}w_{31}$$

$$u_{51}\frac{a}{\pi} = -0{,}26923w_{22}w_{31} - 0{,}230769w_{22}w_{33}$$

$$v_{15}\frac{a}{\pi} = -0{,}26923w_{22}w_{13} - 0{,}230769w_{22}w_{33}$$

$$u_{22}\frac{a}{\pi} = +0{,}0625w_{11}^2 - 0{,}2125w_{11}w_{13} + 0{,}2875w_{11}w_{31} - 0{,}025w_{13}w_{31} - 0{,}375w_{11}w_{33}$$

$$v_{22}\frac{a}{\pi} = -0{,}3750w_{11}w_{33} - 0{,}0250w_{13}w_{31} - 0{,}2125w_{11}w_{31} + 0{,}2875w_{11}w_{13} + 0{,}0625w_{11}^2$$

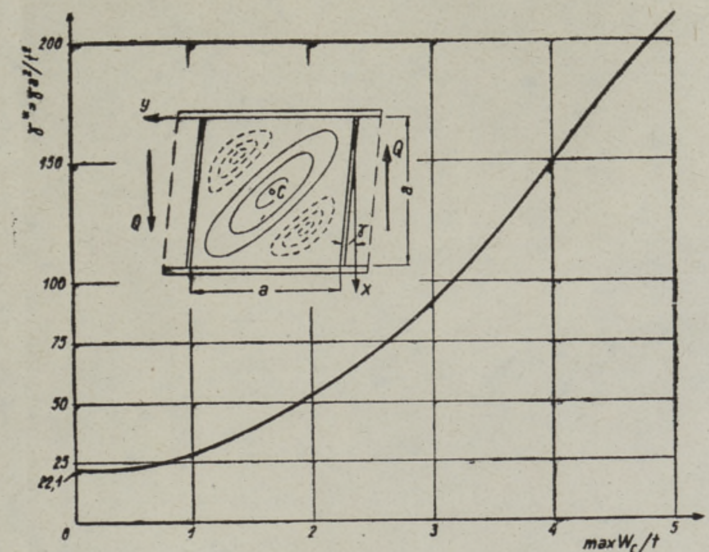


Рис. 2*а*.

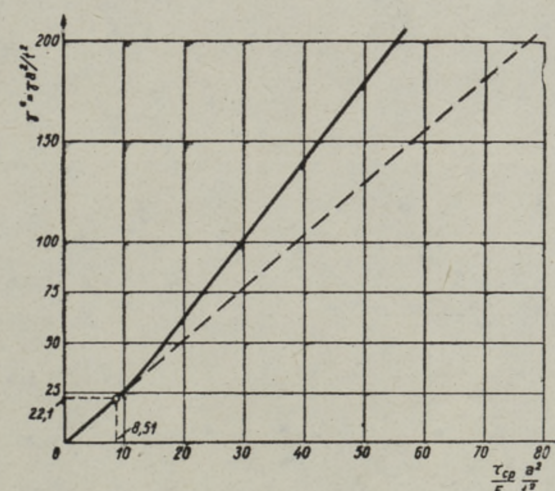


Рис. 2*б*.

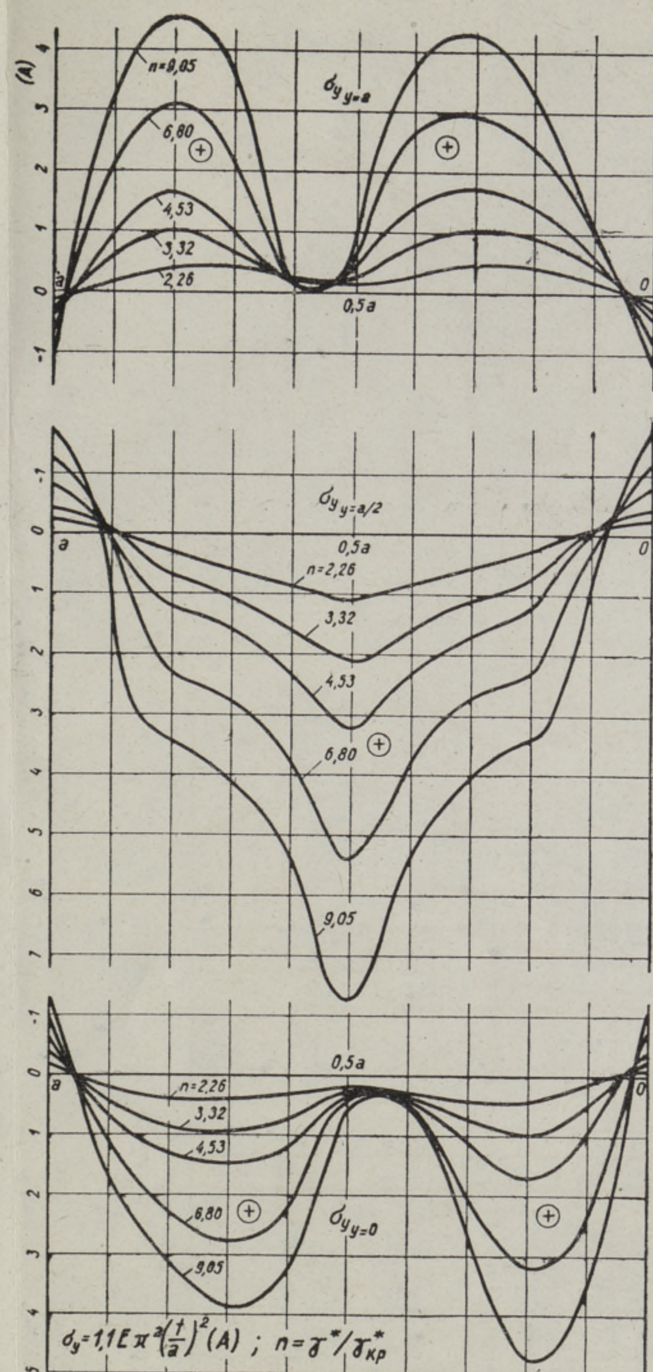


Рис. 3*а*.

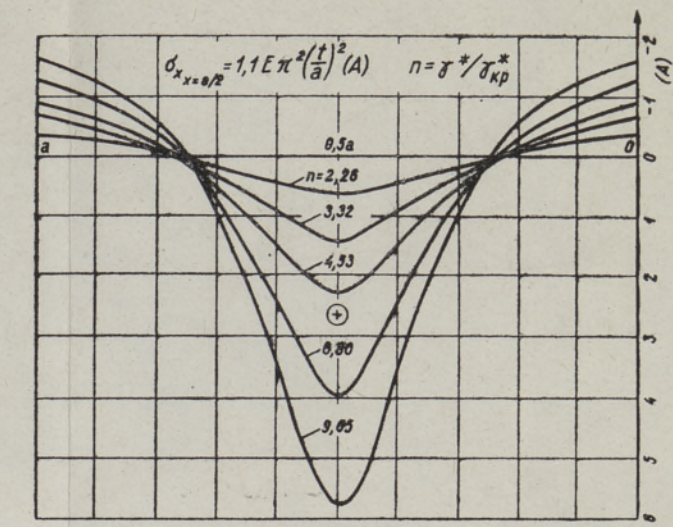


Рис. 3*б*.

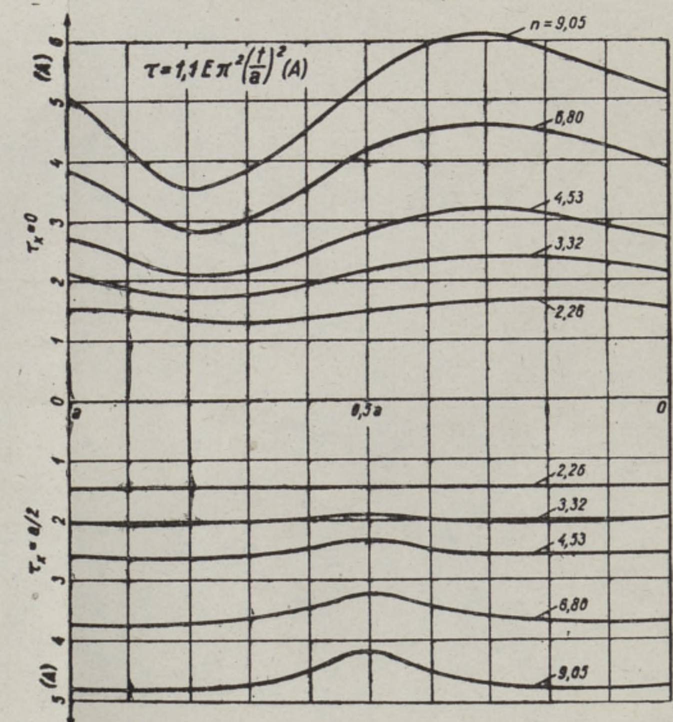


Рис. 3*в*.

$u_{42}\ \frac{a}{\pi} = -0{,}183w_{11}w_{33}+0{,}187w_{11}w_{31}-$
$\quad -0{,}175w_{13}w_{31}$

$u_{62}\ \frac{a}{\pi} = -0{,}3495w_{31}w_{33}+0{,}1875w_{31}^2$

$u_{13}\ \frac{a}{\pi} = 0{,}152w_{11}w_{22}+0{,}108w_{22}w_{31}$

$u_{33}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}16666w_{11}w_{22}$

$u_{53}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}301038w_{22}w_{31}$

$u_{24}\ \frac{a}{\pi} = 0{,}2085w_{11}w_{33}-0{,}0875w_{13}w_{31}+$
$\quad +0{,}1435w_{11}w_{13}$

$u_{44}\ \frac{a}{\pi} = 0{,}1875w_{11}w_{33}+0{,}23125w_{13}w_{31}+$
$\quad +0{,}125w_{22}^2$

$u_{64}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}37788w_{31}w_{33}$

$u_{15}\ \frac{a}{\pi} = -0{,}084615w_{22}w_{13}+0{,}1846153w_{22}w_{33}$

$u_{35}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}1923875w_{22}w_{13}$

$u_{55}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}3000w_{22}w_{33}$

$u_{26}\ \frac{a}{\pi} = -0{,}0165w_{13}w_{33}+0{,}0625w_{13}^2$

$u_{46}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}21346w_{13}w_{33}$

$u_{66}\ \frac{a}{\pi} = 0{,}1875w_{33}^2$

$v_{24}\ \frac{a}{\pi} = -0{,}183w_{11}w_{33}-0{,}175w_{13}w_{31}+$
$\quad +0{,}187w_{11}w_{13}$

$v_{26}\ \frac{a}{\pi} = -0{,}3495w_{13}w_{33}+0{,}1875w_{13}^2$

$v_{31}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}152w_{11}w_{22}+0{,}108w_{22}w_{13}$

$v_{33}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}1666w_{11}w_{22}$

$v_{35}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}30104w_{22}w_{13}$

$v_{42}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}2085w_{11}w_{33}-0{,}0875w_{13}w_{31}+$
$\quad +0{,}1435w_{11}w_{31}$

$v_{44}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}1875w_{11}w_{33}+0{,}23125w_{13}w_{31}+$
$\quad +0{,}125w_{22}^2$

$v_{46}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}37788w_{13}w_{33}$

$v_{51}\ \frac{a}{\pi} = -0{,}084615w_{22}w_{31}+0{,}184615w_{22}w_{33}$

$v_{53}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}1923875w_{22}w_{31}$

$v_{55}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}3000w_{22}w_{33}$

$v_{62}\ \frac{a}{\pi} = -0{,}01650w_{31}w_{33}+0{,}0625w_{31}^2$

$v_{64}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}21346w_{31}w_{33}$

$v_{66}\ \frac{a}{\pi} = +0{,}1875w_{33}^2.$

Выражение (18) удовлетворяет первым из краевых условий (7), (8).

Неизвестные коэффициенты $A'_m = \frac{A_m}{a}$, $B'_m = \frac{B_m}{a}$, $C_m$, ... находим из остальных краевых условий (7), (8), т. е. из условий сопряжения контура (поясов и ребер) и пластины (см. рис. 1), которые дают достаточное количество уравнений. Так же получим зависимость $\tau_{\text{ср}}$ от деформаций сдвига:

$$\tau_{\text{ср}} = \frac{Q}{at} = E\left(\frac{t}{a}\right)^2 \left\{\frac{\gamma^*}{2(1+\mu)} + \frac{a^2}{2(1+\mu)t^2} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_m [(-1)^m - 1](\overline{B}'_m - 2\,\frac{1-\mu}{1+\mu}\,\frac{1}{m\pi}\,\overline{C}_m)\right\}, \tag{19}$$

где $\gamma^* = \frac{\gamma a^2}{t^2}$; $\overline{B}'_m = \frac{\overline{B}_m}{a}$.

Как видно из предыдущего, неопределенными остаются коэффициенты функции прогиба $w_{11}$, $w_{22}$, ...

Применяя метод Бубнова-Галеркина, определяем неизвестные параметры $f_{11}=\frac{w_{11}}{t}$, $f_{22}=\frac{w_{22}}{t}$, $f_{13}=\frac{w_{13}}{t}$, $f_{31}=\frac{w_{31}}{t}$, $f_{33}=\frac{w_{33}}{t}$ из условия

$$\int_0^a\int_0^a \left(\frac{D}{t}\triangle^2\triangle^2 w-\sigma_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\sigma_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\tau\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\times$$

$$\times\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{a}\,dx\,dy=0. \tag{20}$$

После интегрирования получим систему, приведенную в табл. 1.

*Таблица 1*

| | I<br>0 = | III<br>0 = | IV<br>0 = | V<br>0 = | | II<br>0 = |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_{11}^3$ | −0,18963 | 0,074475 | 0,094975 | 0,0331 | $f_{11}f_{22}f_{13}$ | −2,2153 |
| $f_{11}^2f_{13}$ | 0,14995 | −1,9416 | −0,3466 | 0,51685 | $f_{11}f_{22}f_{31}$ | −1,6748 |
| $f_{11}^2f_{31}$ | 0,231625 | −0,2975 | −0,75605 | 0,26715 | $f_{22}f_{13}f_{31}$ | −1,0078 |
| $f_{11}^2f_{33}$ | −0,01854 | 0,47215 | 0,31605 | −1,1001 | $f_{22}f_{13}f_{33}$ | −8,7838 |
| $f_{11}f_{13}f_{31}$ | −0,5704 | 2,9496 | 2,5632 | −5,46955 | $f_{22}f_{31}f_{33}$ | −5,9039 |
| $f_{11}f_{13}f_{33}$ | 1,1342 | −0,0712 | −5,32195 | −0,2867 | $f_{22}f_{11}^2$ | −0,7758 |
| $f_{11}f_{31}f_{33}$ | 0,5658 | −5,37845 | −0,8717 | −0,8164 | $f_{22}^3$ | −3,034 |
| $f_{11}f_{22}^2$ | −0,8677 | −0,8599 | −0,8414 | −0,546 | $f_{22}f_{13}^2$ | −10,349 |
| $f_{11}f_{13}^2$ | −1,483 | 0,1022 | 1,49865 | −0,0102 | $f_{22}f_{31}^2$ | −0,9129 |
| $f_{11}f_{31}^2$ | −0,78665 | 1,54375 | 0,2683 | −0,2617 | $f_{22}f_{33}^2$ | −11,0647 |
| $f_{11}f_{33}^2$ | −1,16174 | — | −0,0190 | — | $f_{11}$ | 0,051194γ* |
| $f_{13}f_{31}f_{33}$ | −3,90005 | 0,3415 | 2,4623 | 0,3568 | $f_{22}$ | −5,32895 |
| $f_{13}f_{22}^2$ | −1,1789 | −8,32225 | −2,0214 | −3,878 | $f_{13}$ | −0,091928γ* |
| $f_{13}f_{31}^2$ | 1,12615 | −7,4454 | −0,7791 | 1,7353 | $f_{31}$ | −0,091928γ* |
| $f_{13}f_{33}^2$ | 0,2715 | −27,945 | 0,2977 | — | $f_{33}$ | +0,16557γ* |
| $f_{13}^3$ | −0,0134 | −12,9819 | −0,0496 | 4,6887 | | |
| $f_{13}^2f_{31}$ | 1,72275 | 0,1075 | −4,744 | −0,2654 | | |
| $f_{13}^2f_{33}$ | −0,0050 | 14,1426 | 0,1454 | −29,387 | | |
| $f_{31}^2f_{33}$ | — | 0,9135 | 12,2307 | −16,462 | | |
| $f_{31}^3$ | — | −0,4166 | −4,50725 | 2,3008 | | |
| $f_{31}f_{22}^2$ | −1,1529 | −0,9317 | −3,0159 | −4,10919 | | |
| $f_{31}f_{33}^2$ | −0,3806 | — | −15,1442 | — | | |
| $f_{33}f_{22}^2$ | −1,0457 | −2,77859 | −2,71429 | −8,4293 | | |
| $f_{33}^3$ | — | — | — | −15,3607 | | |
| $f_{11}$ | −0,3333 | — | — | — | | |
| $f_{22}$ | 0,0511945γ* | −0,09198γ* | −0,09198γ* | 0,165569γ* | | |
| $f_{13}$ | — | −8,3348 | — | — | | |
| $f_{31}$ | — | — | −8,3348 | — | | |
| $f_{33}$ | — | — | — | −27,000 | | |

Полученная система решена на электронной вычислительной машине «Минск 2». Результаты решения приведены в табл. 2.

*Таблица 2*

| $\gamma^*$ | $f_{11}$ | $f_{22}$ | $f_{13}$ | $f_{31}$ | $f_{33}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 24 | 0,475023 | 0,1499935 | —0,0358503 | —0,0372196 | 0,0214594 |
| 26 | 0,664245 | 0,2250665 | —0,0530380 | —0,0572189 | 0,0339232 |
| 28 | 0,788169 | 0,3087885 | —0,0732269 | —0,0826179 | 0,0495936 |
| 30 | 0,860137 | 0,3426950 | —0,0810394 | —0,0934127 | 0,0569572 |
| 50 | 1,330913 | 0,8372685 | —0,1780181 | —0,2833812 | 0,1880346 |
| 75 | 1,622444 | 1,2916585 | —0,2438875 | —0,4683210 | 0,3441614 |
| 100 | 1,837211 | 1,6289685 | —0,2904305 | —0,6037639 | 0,4742914 |
| 150 | 2,185050 | 2,1474720 | —0,3639968 | —0,8065431 | 0,6840242 |
| 200 | 2,638801 | 2,5611895 | —0,4134692 | —0,9645662 | 0,8411184 |

$\gamma^*_{кр} = 22{,}12; \quad \frac{f_{22}}{f_{11}} = 0{,}296; \quad \frac{f_{13}}{f_{11}} = -0{,}072; \quad \frac{f_{31}}{f_{11}} = -0{,}072; \quad \frac{f_{33}}{f_{11}} = 0{,}04$

Цепные напряжения в срединной поверхности пластинки находим из выражений (1), (2), (3), а изгибные напряжения — из выражений

$$\sigma'_x = 1{,}1\, E\pi^2 \left(\frac{t}{a}\right)^2 f_{11} \Big(0{,}65 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} + 2{,}6\,\Psi_1 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{a} + 1{,}85\,\Psi_2 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{a} + 4{,}65\,\Psi_3 \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} + 5{,}85\,\Psi_4 \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{a}\Big) \tag{21}$$

$$\sigma'_y = 1{,}1 E\pi^2 \left(\frac{t}{a}\right)^2 f_{11} \Big(0{,}65 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} + 2{,}6\,\Psi_1 \sin\frac{2\pi x}{a} \sin\frac{2\pi y}{a} + 4{,}65\,\Psi_2 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{a} + 1{,}85\,\Psi_3 \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} + 5{,}85\,\Psi_4 \sin\frac{3\pi x}{a} \sin\frac{3\pi y}{a}\Big), \tag{22}$$

где $\Psi_1 = \frac{f_{22}}{f_{11}}, \ \Psi_2 = \frac{f_{13}}{f_{11}}, \ \Psi_3 = \frac{f_{31}}{f_{11}}, \ \Psi_4 = \frac{f_{33}}{f_{11}}$.

**4. Численные результаты.** Напряженное состояние пластинки характеризуется цепными и изгибными напряжениями. Численные значения напряжения для отдельных сечений были получены с помощью электронной вычислительной машины. Полученные результаты представлены графически.

На рис. 2*а*, *б* изображены зависимости параметра сдвига $\gamma^* = \frac{\gamma a^2}{t^2}$ от относительного прогиба $\frac{\max w}{t}$ и от параметра касательных напряжений.

На рис. 3*а*, *б*, *в* даны эпюры цепных напряжений пластины в зависимости от параметра нагрузки. Зависимость максимальных напряжений в поясах и ребрах от нагрузки представлена на рис. 4. Графики рис. 5 показывают характер распределения главных напряжений в отдельных точках срединной поверхности.

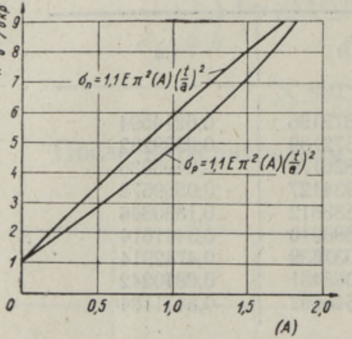


Рис. 4.

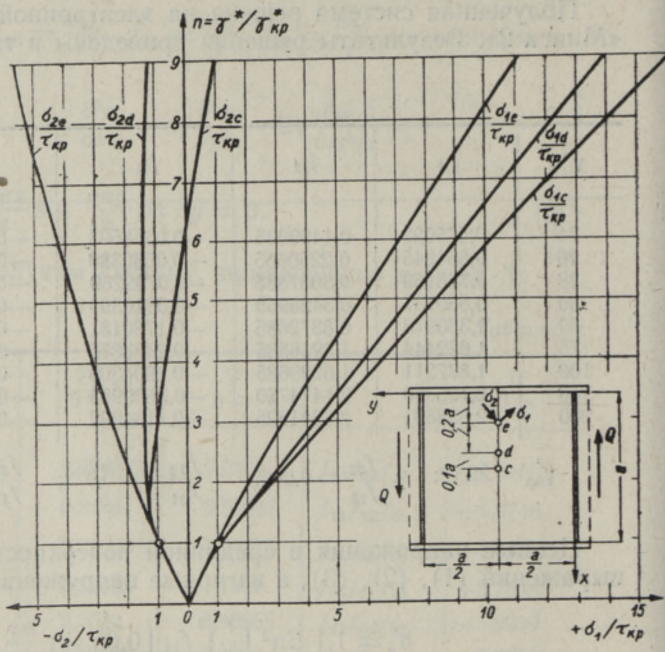


Рис. 5.

Предельные нагрузки $Q_{пр}=\tau_{пр}\,at$ определяем согласно четвертой теории прочности, учитывая при этом как цепные, так и изгибные напряжения пластины:

$$\sqrt{(\sigma_x+\sigma_x')^2+(\sigma_y+\sigma_y')^2-(\sigma_x+\sigma_x')(\sigma_y+\sigma_y')+3\tau^2}\leqslant\sigma_{T}. \qquad (23)$$

Зависимость предельных средних напряжений сдвига от гибкости пластины $\lambda=\frac{a}{t}$ представлена на рис. 6.

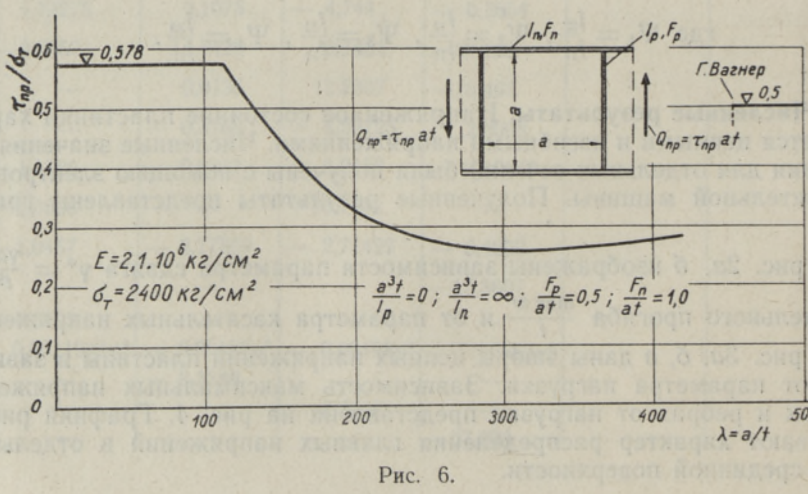


Рис. 6.

Особо следует подчеркнуть то обстоятельство, что после превышения критической нагрузки предельные напряжения сдвига сильно уменьшаются. Последнее явление объясняется тем, что после потери устойчивости стенки прогибы бурно растут. Вместе с тем значительно увеличиваются изгибные напряжения, что и является основной причиной уменьшения предельной нагрузки. При больших гибкостях, наоборот, изгибные напряжения играют малую роль, а решающими оказываются цепные напряжения.

**Заключение.** Из приведенного исследования явствует, что стенка сварной балки, нагруженная в основном поперечной силой, способна работать и в послекритической стадии. При этом предполагается, что поперечные ребра жесткости не деформируются в плоскости стенки. Полученные теоретические результаты хорошо совпадают с экспериментальными исследованиями, проведенными автором.

В настоящее время проводится исследование работы стенки балки с учетом деформаций изгиба ребер.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Wagner H., Z. Flugtechn. u. Motorluftsch., **20**, 200 (1929).
2. Kuhn P., Stresses in Aircraft and shell structures, McGRAW-Hill Book C°, 1956.
3. Basler K., Thürlimann B., Trans. Amer. Soc. Civ. Engrs, **128**, Part II, 655—720 (1963).
4. Bergman S., Behaviour of Buckled Rectangular Plates under the Action of Shearing Forces, Stockholm, 1948.
5. Вольмир А. С., Устойчивость упругих систем, М., 1963.
6. Skaloud M., Berechnung der Stabilität von Wänden mit Anfangskrümmung, Acta technica (Czechoslovak Academy of Sciences), **1**, 52—88 (1959).
7. Ааре И. И., О влиянии изгибной жесткости пояса тонкостенной балки на работу стенки, Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А. (В печати).
8. Ааре И. И., Расчет гибких пластин при работе на сдвиг с учетом жесткости контурных ребер на сжатие, Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А. (В печати).

*Таллинский политехнический институт*

Поступила в редакцию 6/IV 1965

*I. AARE*

### NIHKEPINGETEGA KOORMATUD PLAATIDE KÄITUMINE PÄRAST KRIITILIST STAADIUMI

Käesolevas töös uuritakse keevitatud täisseinalise tala seina kui peamiselt nihkejõududele töötava paneeli deformatsioone ja pingeolukorda suurtel koormustel. Ülesanne lahendatakse paigutustes. Plaadi keskpinna läbipainde funktsioon aproksimeeritakse viieliikmelise reaga, kusjuures parameetrid määratakse Bubnovi-Galjorkini meetodiga. Põhilisteks arvutusteks on kasutatud elektronarvutusmasinat.

*I. AARE*

### THE BEHAVIOUR OF WEB-PLATES UNDER SHEAR

This paper describes a theoretical examination of the behaviour of web-plates under shear. It is assumed that the plate is simply supported along the edges; the rigidity of the flanges and stiffeners is taken into account. Considering boundary conditions, deflection surface of the midplane (function $w$) is assumed. The displacements $u$, $v$ are determined from the equations of equilibrium I, II. The Galerkin's method is used in the solution of the problem. The numerical solutions are obtained, and the load carrying capacity of the plate is determined. The results are illustrated by figures. The theoretical results show that slender webs are able to carry loads which are considerably greater than the critical ones.