EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 3

М. КУТСЕР, У. НИГУЛ

О ПРИМЕНЕНИИ СИМВОЛИЧЕСКОГО МЕТОДА А. И. ЛУРЬЕ В ДИНАМИКЕ ПЛИТ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ, СИММЕТРИЧНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе [1] дано символическое решение уравнений динамической теории упругости для деформации плиты, антисимметричной относительно срединной поверхности. В данной статье выводятся символические формулы и уравнения для малой деформации, симметричной относительно срединной поверхности плиты. При этом предполагается, что дифференцирование искомых функции по времени равноценно умножению на комплексный параметр s_*. Поэтому полученное решение можно рассматривать как решение преобразованных по Лапласу уравнений движения или же как относящееся к случаю, когда напряженное состояние зависит от времени t по закону $\exp s_* t$. Предлагаемые формулы могут найти применение при решении конкретных задач методом интегральных преобразований. Если задавать зависимость напряженного состояния от координат срединной поверхности таким образом, что действие двумерного оператора Лапласа (в координатах срединной поверхности) приводит к умножению искомых функций на комплексное число q^2, то из символического решения вытекают две бесконечные последовательности частных решений (комплексных мод). Одна из них связана корнями обобщенного (для комплексных частот) уравнения Релея-Лэмба, а вторая представляет решения типа волн Лява.

При $s_*=0$ предлагаемые формулы переходят в символические формулы статики, построенные в работе А. И. Лурье [2].

1. Основные обозначения и исходные положения

Принимаем следующие обозначения: E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; $2h$ — толщина плиты; ξ, η, ζ — безразмерные (деленные на h) декартовы координаты, из которых ξ и η лежат на срединной поверхности ($\zeta=0$) плиты; c_1, c_2 — скорости распространения волн сжатия и сдвига; t — время; τ — безразмерное время; $\vec{u}$ — безразмерный (деленный на h) вектор перемещений, u_j ($j=1, 2, 3$) — его компоненты; σ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) — напряжения, $\overset{*}{\sigma}_{ij}$ — безразмерные напряжения. При этом

$$\tau=\frac{tc_2}{h}, \quad \overset{*}{\sigma}_{ij}=\frac{\sigma_{ij}(1+\nu)}{E}, \quad \frac{c_2^2}{c_1^2}=\frac{1-2\nu}{2-2\nu}=k_0^2. \tag{1.1}$$

Для символов дифференцирования принимаем следующие краткие обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}=\partial_1, \quad \frac{\partial}{\partial\eta}=\partial_2, \quad \frac{\partial\ldots}{\partial\zeta}=(\ldots)', \quad \frac{\partial}{\partial\tau}=\partial_\tau, \quad \partial_1^2+\partial_2^2=\Delta, \quad \Delta^*=\Delta+\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2}. \tag{1.2}$$

Будем исходить из уравнения равновесия в перемещениях

$$[c_1^2\nu(1-\nu)^{-1}+c_2^2]\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}+c_2^2\Delta^*\vec{u}=c_2^2\partial_\tau^2\vec{u}. \tag{1.3}$$

Представляя вектор перемещений в виде

$$\vec{u}=\operatorname{grad}\Phi_0+\operatorname{rot}\vec{H},\qquad \operatorname{div}\vec{H}=0 \tag{1.4}$$

и учитывая, что

$$\begin{gathered}\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}=0,\qquad \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi_0=\Delta^*\Phi_0\\ \Delta^*\operatorname{grad}\Phi_0=\operatorname{grad}\Delta^*\Phi_0,\end{gathered} \tag{1.5}$$

получим из (1.3) уравнение

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\{[c_1^2\nu(1-\nu)^{-1}+2c_2^2]\Delta^*-c_2^2\partial_\tau^2\}\Phi_0+\\ +c_2^2\operatorname{rot}(\Delta^*-\partial_\tau^2)\vec{H}=0.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Так как Φ_0 выбрано произвольно, то можно требовать, чтобы

$$\operatorname{grad}\{[c_1^2\nu(1-\nu)^{-1}+2c_2^2]\Delta^*-c_2^2\partial_\tau^2\}\Phi_0=0. \tag{1.7}$$

Получим два уравнения:

$$[\Delta^*-k_0^2\partial_\tau^2]\Phi_0=0,\qquad [\Delta^*-\partial_\tau^2]\vec{H}=0. \tag{1.8}$$

Предположим, что

$$\partial_\tau^2\Phi_0=s^2\Phi_0,\qquad \partial_\tau^2\vec{H}=s^2\vec{H}, \tag{1.9}$$

где s является комплексным параметром, и введем обозначения

$$\alpha^2=\Delta-k_0^2s^2,\qquad \beta^2=\Delta-s^2,\qquad \gamma^2=\Delta-\tfrac{1}{2}s^2. \tag{1.10}$$

Тогда уравнения (1.8) могут быть представлены в форме

$$\Phi_0''+\alpha^2\Phi_0=0,\qquad \vec{H}''+\beta^2\vec{H}=0. \tag{1.11}$$

Символическое решение системы (1.11) может быть представлено в форме

$$\begin{gathered}\Phi_0=\sin\alpha\zeta\,(A_0)+\cos\alpha\zeta\,(B_0)\\ H_i=\sin\beta\zeta\,(A_i)+\cos\beta\zeta\,(B_i),\end{gathered} \tag{1.12}$$

где A_0, A_i, B_0, B_i $(i=1,2,3)$ являются функциями от ξ, η, τ.

На основе условия $\operatorname{div}\vec{H}=0$ (1.4) они связаны соотношением

$$\sin\beta\zeta\,(\partial_1A_1+\partial_2A_2-\beta B_3)+\cos\beta\zeta\,(\partial_1B_1+\partial_2B_2+\beta A_3)=0, \tag{1.13}$$

откуда следует

$$B_3=\frac{\partial_1A_1+\partial_2A_2}{\beta},\qquad A_3=-\frac{\partial_1B_1+\partial_2B_2}{\beta}. \tag{1.14}$$

На основе (1.4), (1.12), (1.14) имеем:

$$u_1 = \partial_1 \Phi_0 + \frac{\sin \beta \zeta}{\beta} [\partial_1 \partial_2 B_1 + (\partial_2^2 - \beta^2) B_2] - \\ - \frac{\cos \beta \zeta}{\beta} [\partial_1 \partial_2 A_1 + (\partial_2^2 - \beta^2) A_2] \tag{1.15}$$

$$u_2 = \partial_2 \Phi_0 - \frac{\sin \beta \zeta}{\beta} [\partial_1 \partial_2 B_2 + (\partial_1^2 - \beta^2) B_1] + \\ + \frac{\cos \beta \zeta}{\beta} [\partial_1 \partial_2 A_2 + (\partial_1^2 - \beta^2) A_1]$$

$$u_3 = \Phi_0' + \sin \beta \zeta \, (\partial_2 A_1 - \partial_1 A_2) + \cos \beta \zeta \, (\partial_2 B_1 - \partial_1 B_2).$$

Далее нетрудно вычислить относительные деформации

$$\varepsilon_{11} = \partial_1 u_1, \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 u_2, \quad \varepsilon_{33} = \dot{u}_3, \quad \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} = \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2, \quad \varepsilon_{13} = \dot{u}_1 + \partial_1 u_3, \quad \varepsilon_{23} = u_2' + \partial_2 u_3 \tag{1.16}$$

и затем безразмерные напряжения

$$\overset{*}{\sigma}_{jj} = \varepsilon_{jj} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon, \quad \overset{*}{\sigma}_{ij} = \tfrac{1}{2} \varepsilon_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{1.17}$$

Обозначим величины, относящиеся к срединной поверхности, индексом «0»

$$u_{i0} = u_i \, (\xi, \eta, 0; \tau), \quad \overset{*}{\sigma}_{ij0} = \overset{*}{\sigma}_{ij} \, (\xi, \eta, 0; \tau). \tag{1.18}$$

Для дальнейшего целесообразно выразить функции A_0, A_1, A_2 и B_0, B_1, B_2 через величины u_{i0} и $\overset{*}{\sigma}_{ij0}$. Это приводит к формулам (1.19), где $m = 1$, 2 и n — то число из 1, 2, которому m в данном случае не равняется

$$u_m = -\partial_m f_1 D_1 + \partial_m f_2 D_2 - f_3 \{-\partial_m \beta^2 u_{30} + (\partial_m^2 - s^2) \overset{*}{\sigma}_{m30} + \partial_1 \partial_2 \overset{*}{\sigma}_{n30}\} - \\ - f_4 \{(\partial_m^2 - \tfrac{1}{2} s^2) u_{m0} + \partial_1 \partial_2 u_{n0} + \partial_m \overset{*}{\sigma}_{330}\}$$

$$u_3 = -\alpha^2 f_1 D_2 - f_2 D_1 + f_3 \{\gamma^2 (\partial_1 u_{10} + \partial_2 u_{20}) + \Delta \overset{*}{\sigma}_{330}\} + \\ + f_4 \{\Delta u_{30} - \partial_1 \overset{*}{\sigma}_{130} - \partial_2 \overset{*}{\sigma}_{230}\}, \tag{1.19}$$

где

$$D_1 = \gamma^2 u_{30} - \partial_1 \overset{*}{\sigma}_{130} - \partial_2 \overset{*}{\sigma}_{230}, \quad D_2 = \partial_1 u_{10} + \partial_2 u_{20} + \overset{*}{\sigma}_{330}$$

$$f_1 = \frac{2 \sin \alpha \zeta}{\alpha s^2}, \quad f_2 = \frac{2 \cos \alpha \zeta}{s^2}, \quad f_3 = \frac{2 \sin \beta \zeta}{\beta s^2}, \quad f^4 = \frac{2 \cos \beta \zeta}{s^2}. \tag{1.20}$$

Из уравнений (1.19) видно, что напряженное состояние разделяется на симметричное и антисимметричное относительно срединной поверхности $\zeta = 0$. Антисимметричная деформация выражается через u_{30}, $\overset{*}{\sigma}_{130}$, $\overset{*}{\sigma}_{230}$ и изучалась в работе [1]. Ниже рассматривается симметричная деформация, которая выражается через u_{10}, u_{20}, $\overset{*}{\sigma}_{330}$ и удовлетворяет на торцевых поверхностях плиты $\zeta = \pm 1$ краевым условиям

$$\overset{*}{\sigma}_{i3} \, (\xi, \eta, \pm 1, \tau) = K_i p_i, \quad p_i = p_i \, (\xi, \eta, \tau) \\ (K_1 = K_2 = \pm 1, \quad K_3 = 1, \quad i = 1, 2, 3). \tag{1.21}$$

Исходя из (1.19), можно на основе (1.16), (1.17) выразить левые части (1.21) через u_{10}, u_{20}, $\overset{*}{\sigma}_{330}$. Таким образом для симметричной деформации появляется система из трех уравнений, позволяющая выразить u_{10}, u_{20}, $\overset{*}{\sigma}_{330}$ через p_1, p_2, p_3. Далее введением разрешающих функций нетрудно привести решение к форме, излагаемой ниже.

2. Символические формулы и уравнения

2.1. В декартовых координатах

а. Формулы для перемещений:

$$u_m = \frac{\partial_m}{s^2}\,(\gamma^2 \cos\alpha \cos\beta\,\zeta - \Delta \cos\beta \cos\alpha\,\zeta)\,\Phi_1 +$$
$$+ 2(-1)^m(\partial_1 + \partial_2 - \partial_m)\cos\beta\,\zeta\,\Phi_2 + \frac{\partial_m}{s^2}\Big(\gamma^2 \frac{\sin\beta}{\beta}\cos\alpha\,\zeta - \alpha^2 \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta\,\zeta\Big)\Phi_3$$
$$u_3 = \frac{\Delta}{s^2}\left(\alpha^2 \cos\beta \frac{\sin\alpha\,\zeta}{\alpha} - \gamma^2 \cos\alpha \frac{\sin\beta\,\zeta}{\beta}\right)\Phi_1 + \tag{2.1}$$
$$+ \frac{\alpha^2}{s^2}\left(\Delta \frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{\sin\beta\,\zeta}{\beta} - \gamma^2 \frac{\sin\beta}{\beta}\,\frac{\sin\alpha\,\zeta}{\alpha}\right)\Phi_3.$$

б. Формулы для напряжений:

$$\overset{*}{\sigma}_{mm} = \frac{1}{s^2}\left\{-\Delta \cos\beta \cos\alpha\,\zeta\,[\partial_m^2 + \tfrac{1}{2}\nu(1-\nu)^{-1}s^2] + \gamma^2 \cos\alpha \cos\beta\,\zeta\,\partial_m^2\right\}\Phi_1 +$$
$$+ 2(-1)^m \cos\beta\,\zeta\,\partial_1\partial_2\Phi_2 + \frac{1}{s^2}\Big\{\gamma^2 \frac{\sin\beta}{\beta}\cos\alpha\,\zeta\,[\partial_m^2 + \tfrac{1}{2}\nu(1-\nu)^{-1}s^2] -$$
$$- \alpha^2 \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta\,\zeta\,\partial_m^2\Big\}\Phi_3 \qquad (m = 1,\ 2)$$

$$\overset{*}{\sigma}_{12} = \overset{*}{\sigma}_{21} = \tfrac{1}{2}(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) = \frac{\partial_1\partial_2}{s^2}\,(\gamma^2 \cos\alpha \cos\beta\,\zeta - \Delta \cos\beta \cos\alpha\,\zeta)\,\Phi_1 +$$
$$+ (\partial_1^2 - \partial_2^2)\cos\beta\,\zeta\,\Phi_2 + \frac{\partial_1\partial_2}{s^2}\Big(\gamma^2 \frac{\sin\beta}{\beta}\cos\alpha\,\zeta - \alpha^2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta\,\zeta\Big)\Phi_3 \tag{2.2}$$
$$\overset{*}{\sigma}_{m3} = \frac{\partial_m}{s^2}\left(\Delta\,\alpha^2 \cos\beta \frac{\sin\alpha\,\zeta}{\alpha} - \gamma^4 \cos\alpha \frac{\sin\beta\,\zeta}{\beta}\right)\Phi_1 -$$
$$-(-1)^m(\partial_1 + \partial_2 - \partial_m)\,\beta^2 \frac{\sin\beta\,\zeta}{\beta}\Phi_2 + \frac{\alpha^2\gamma^2}{s^2}\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{\sin\beta\,\zeta}{\beta} - \frac{\sin\beta}{\beta}\,\frac{\sin\alpha\,\zeta}{\alpha}\right)\partial_m\Phi_3$$
$$\overset{*}{\sigma}_{33} = \frac{1}{s^2}\,(\cos\beta\cos\alpha\,\zeta - \cos\alpha\cos\beta\,\zeta)\,\Delta\,\gamma^2\Phi_1 +$$
$$+ \frac{1}{s^2}\Big(\Delta\alpha^2 \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta\,\zeta - \gamma^4\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\alpha\,\zeta\Big)\Phi_3.$$

В этих формулах Φ_j $(j = 1, 2, 3)$ определяются из уравнений

$$D\partial_1\Phi_1 + \partial_2\beta^2 \frac{\sin\beta}{\beta}\Phi_2 = p_1, \quad D\partial_2\Phi_1 - \partial_1\beta^2\frac{\sin\beta}{\beta}\Phi_2 = p_2, \quad D\Phi_3 = p_3, \tag{2.3}$$

где
$$D = \frac{1}{s^2}\left(\Delta\,\alpha^2\cos\beta\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \gamma^4\cos\alpha\frac{\sin\beta}{\beta}\right). \tag{2.4}$$

2.2. В цилиндрических координатах

Обозначим через ϱ безразмерный (деленный на h) радиус и принимаем следующие краткие обозначения производных:

$$\frac{\partial}{\partial\varrho}=\partial_\varrho,\quad \frac{\partial}{\partial\varphi}=\partial_\varphi,\quad \Delta=\partial_\varrho^2+\frac{1}{\varrho}\partial_\varrho+\frac{1}{\varrho^2}\partial_\varphi^2. \tag{2.5}$$

Выполняя несложное преобразование координат, получим следующие формулы перемещений:

$$u_\varrho=\frac{\partial_\varrho}{s^2}(\gamma^2\cos\alpha\cos\beta\zeta-\Delta\cos\beta\cos\alpha\zeta)\Psi_1-\frac{2}{\varrho}\partial_\varphi\cos\beta\zeta\Psi_2+$$
$$+\frac{\partial_\varrho}{s^2}\left(\gamma^2\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\alpha\zeta-\alpha^2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta\zeta\right)\Psi_3,$$

$$u_\varphi=\frac{1}{\varrho}\frac{\partial_\varphi}{s^2}(\gamma^2\cos\alpha\cos\beta\zeta-\Delta\cos\beta\cos\alpha\zeta)\Psi_1+2\partial_\varrho\cos\beta\zeta\Psi_2+ \tag{2.6}$$
$$+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial_\varphi}{s^2}\left(\gamma^2\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\alpha\zeta-\alpha^2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta\zeta\right)\Psi_3,$$
$$u_3=\frac{\Delta}{s^2}\left(\alpha^2\cos\beta\frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha}-\gamma^2\cos\alpha\frac{\sin\beta\zeta}{\beta}\right)\Psi_1+$$
$$+\frac{\alpha^2}{s^2}\left(\Delta\frac{\sin\alpha}{\alpha}\frac{\sin\beta\zeta}{\beta}-\gamma^2\frac{\sin\beta}{\beta}\frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha}\right)\Psi_3.$$

Ψ_i $(i=1, 2, 3)$ определяются из уравнений

$$D\partial_\varrho\Psi_1+\frac{1}{\varrho}\partial_\varphi\beta^2\frac{\sin\beta}{\beta}\Psi_2=p_\varrho,\quad \frac{1}{\varrho}D\partial_\varphi\Psi_1-\partial_\varrho\beta^2\frac{\sin\beta}{\beta}\Psi_2=p_\varphi,\quad D\Psi_3=p_3, \tag{2.7}$$

где D по-прежнему определяется формулой (2.4).

В приведенных формулах α и β появились в знаменателях, однако при раскрытии тригономических функций в виде степенных рядов эти знаменатели сокращаются.

3. Некоторые частные случаи

Предположим, что $p_i=0$ $(i=1,2,3)$ и рассмотрим уравнения

$$D\Phi_1=\text{const},\quad \beta^2\frac{\sin\beta}{\beta}\Phi_2=\text{const},\quad D\Phi_3=0. \tag{3.1}$$

Функции Φ_j $(j=1,2,3)$, являющиеся решениями уравнений (3.1), определяют независимые напряженные состояния, удовлетворяющие краевым условиям (1.21).

1. Частный случай статики

Переходом к пределу $s\to 0$ получим из формул предыдущего пункта формулы статики. Уравнения (3.1) имеют в этом случае частные решения следующих видов:

а) $\Delta\Phi_1 = \text{const}, \ \Delta\Phi_3 = 0$

б) $\Delta\Phi_2 = q^2\Phi_2, \ q = \pm n\frac{\pi}{2} \ (n = 0, 2, 4, \ldots, \infty)$ (3.2)

в) $\Delta\Phi_1 = q_1^2\Phi_1, \ \Delta\Phi_3 = q_3^2\Phi_3,$

где q_1 и q_3 — ненулевые (комплексные) корни уравнения

$$\sin 2q = 2q. \tag{3.3}$$

2. Частный случай

$$\Delta\Phi_j = q_j^2\,\Phi_j, \ s \neq 0, \quad q \neq 0 \quad (j = 1, 2, 3). \tag{3.4}$$

Функции Φ_j типа (3.4) являются частными решениями уравнений (3.1), если q_1 и q_3 удовлетворяют условию

$$\frac{1}{s^2}\left(q^2\alpha^2\cos\beta\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \gamma^4\cos\alpha\,\frac{\sin\beta}{\beta}\right) = 0, \tag{3.5}$$

где
$$\alpha^2 = q^2 - k_0^2s^2, \ \beta^2 = q^2 - s^2, \ \gamma^2 = q^2 - \tfrac{1}{2}s^2, \tag{3.6}$$

а q_2 — условию

$$q_2^2 = s^2 + \left(n\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad (n = 0, 2, 4, \ldots, \infty). \tag{3.7}$$

Условие (3.5) по существу является обобщенным уравнением Релея-Лэмба и, если предположить, что

$$\alpha \neq 0, \qquad \beta \neq 0, \qquad \gamma \neq 0, \qquad \cos\alpha \neq 0, \qquad \sin\beta \neq 0, \tag{3.8}$$

то ему можно придать форму

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{s^4 + 4q^2\beta^2}{4q^2\alpha\beta}. \tag{3.9}$$

Выражение (3.9) превращается в классическое уравнение Релея—Лэмба, если предполагать, что $s = i\omega$, где ω — круговая частота (вещественная величина).

Функция Φ_2 определяет в случае (3.7) волны типа Лява. Одна из этих волн ($n = 0$) является недисперсионной. Она — единственная недисперсионная волна в упругой плите. В случае центросимметричной задачи она определяет напряженное состояние чисто крутильного типа.

В случае (3.4) символические формулы для перемещений и напряжений превращаются в выражения, содержащие лишь первого порядка производные по ξ, η или ϱ, φ.

Замечание. Случай (3.4) имеет место в некоторых весьма важных практических случаях: в декартовых координатах можно построить Φ_j, удовлетворяющие условию (3.4), в виде экспоненциальной функции от ξ, η, а в цилиндрических координатах — в виде синусоидальной функции от φ и бесселевой функции от ϱ. Такие частные решения (моды) при $s = i\omega$ в литературе больше всего исследованы. При комплексных s они позволяют построить изображения Лапласа для некоторых задач переходного типа.

3. Медленно изменяющиеся напряженные состояния

Символические формулы можно рассматривать как сжатую запись решения в бесконечных степенных рядах. Достаточно медленно изменяющиеся напряженные состояния могут быть приближенно построены при помощи усеченных степенных рядов. Соответствующие уравнения и формулы могут быть легко получены из вышеизложенных путем разложения тригонометрических выражений в степенные ряды и сохранения в них конечного числа членов. Например, для D первое и второе приближение являются следующими:

$$D_1 = -\frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{2(1-\nu)}\Delta \tag{3.10}$$

$$D_2 = D_1 - \frac{1}{48}\frac{7-8\nu}{1-\nu}s^4 + \frac{11-16\nu+4\nu^2}{24(1-\nu)^2}\Delta s^2 - \frac{1}{3(1-\nu)}\Delta\Delta. \tag{3.11}$$

Формулы первого приближения для перемещений и напряжений (в декартовых координатах) являются следующими:

$$\begin{gathered}
u_1 = -\frac{1}{2}\partial_1\Phi_1 - 2\partial_2\Phi_2 - \frac{\nu}{2(1-\nu)}\partial_1\Phi_3 \\
u_2 = -\frac{1}{2}\partial_2\Phi_1 + 2\partial_1\Phi_2 - \frac{\nu}{2(1-\nu)}\partial_2\Phi_3 \\
u_3 = \frac{\nu}{2(1-\nu)}\Delta\zeta\Phi_1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2\zeta\Phi_3 \\
\sigma^*_{mm} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{1-\nu}\Delta + \partial_m^2\right)\Phi_1 + 2(-1)^m\partial_1\partial_2\Phi_2 + \frac{\nu}{2(1-\nu)}(\gamma^2 - \partial_m^2)\Phi_3 \\
\sigma^*_{12} = -\frac{1}{2}\partial_1\partial_2\Phi_1 + (\partial_1^2 - \partial_2^2)\Phi_2 - \frac{\nu}{2(1-\nu)}\partial_1\partial_2\Phi_3 \\
\sigma^*_{m3} = \partial_m\zeta\left(\frac{1}{2(1-\nu)}\Delta - \frac{1}{4}s^2\right)\Phi_1 - (-1)^m(\partial_1 + \partial_2 - \partial_m)\beta^2\zeta\Phi_2 \\
\sigma^*_{33} = \left(\frac{1}{2(1-\nu)}\Delta - \frac{1}{4}s^2\right)\Phi_3 \qquad (m = 1, 2).
\end{gathered} \tag{3.12}$$

Рассмотрим случай $p_i \equiv 0$. Тогда в первом приближении

$$s^2\Phi_1 = \frac{2}{1-\nu}\Delta\Phi_1, \quad s^2\Phi_3 = \frac{2}{1-\nu}\Delta\Phi_3 \tag{3.13}$$

и из (3.12) следует, что

$$u_1 = -\partial_1\Phi_* - 2\partial_2\Phi_2, \quad u_2 = -\partial_2\Phi_* + 2\partial_1\Phi_1, \quad u_3 = \frac{\nu\zeta}{1-\nu}\Phi_*, \tag{3.14}$$

где

$$\Phi_* = \frac{1}{2}\left[\Phi_1 + \frac{\nu}{1-\nu}\Phi_3\right]. \tag{3.15}$$

При этом

$$s^2\Phi_* = \frac{2}{1-\nu}\Delta\Phi_*, \quad s^2\Phi_2 = \Delta\Phi_2. \tag{3.16}$$

Следовательно, напряженные состояния, определяемые функциями Φ_1, Φ_3, сливаются в одно, определяемое функцией Φ_*, которая определяет волну, распространяющуюся со скоростью

$$c_* = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}}\, c_2 = \sqrt{\frac{E}{\varrho_{\text{м}}(1-\nu^2)}}, \tag{3.17}$$

где $\varrho_{\text{м}}$ — плотность массы плиты.

Итак, Φ_* определяет приближенное решение, которое в теории плоского напряженного состояния является так называемой продольной волной. В частном случае напряженного состояния, зависящего только от ξ, она превращается в продольную волну элементарной теории стрежней.

Φ_2 определяет точное решение, отмеченное выше в связи с частным случаем $n=0$ выражения (3.7), т .е. решение типа волны, распространяющейся без дисперсии.

Поскольку речь идет о медленно изменяющихся напряженных состояниях ($s \to 0$), то из (3.14) видно, что $u_3 \ll u_1, u_2$. На основе (3.12) легко убедиться в том, что σ_{11}, σ_{22}, σ_{12} в данном случае больше остальных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигул У., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 12, № 2, 146—155 (1963).
2. Лурье А. И., Пространственные задачи теории упругости, М., 1956.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/IV 1965

M. KUTSER, U. NIGUL

A. LURJE SÜMBOOLSE MEETODI KASUTAMINE PLAATIDE DÜNAAMIKAS KESKPINNA SUHTES SÜMMEETRILISE DEFORMATSIOONI PUHUL

Kasutades A. Lurje sümboolset meetodit [2], tuletatakse elastsete plaatide dünaamika kolmemõõtmelise teooria kompaktsed valemid ja võrrandid väikese deformatsiooni jaoks, mis on sümmeetriline plaadi keskpinna suhtes. Tuletuse käik on analoogiline varajasemas töös [1] esitatuga, kus käsitleti antisümmeetrilise deformatsiooni juhtu.

Esimeses osas kirjeldatakse tuletuse käiku. Teises osas esitatakse lõppvalemid. Kolmandas osas vaadeldakse erijuhte ning ligikaudsete kahemõõtmeliste teooriate tuletamist deformatsiooni kirjeldamiseks, mis muutub küllalt aeglaselt nii piki keskpinna koordinaate kui ka ajas.

M. KUTSER, U. NIGUL

ON THE APPLICATION OF A. I. LOURYE'S SYMBOLIC METHOD IN THE THEORY OF MOTION OF PLATES FOR DEFORMATION SYMMETRIC ABOUT THE MIDDLE PLANE

Compact formulae and equations of the three-dimensional theory of the motion of elastic plates for a small deformation symmetric about the middle plane are obtained with the aid of A. Lourye's symbolic method [2]. The derivation is similar to that presented in the previous paper [1] where the case of an antisymmetric deformation has been studied.

In the first part the derivation method is described. In the second part symbolic formulae and equations are given, in which the trigonometric functions must be considered as a short conventional form of representing the corresponding power series. In the third part some special cases are studied and a derivation of approximate two-dimensional theories for a deformation state sufficiently slowly varying along the co-ordinates and time is discussed.