

У. НИГУЛ

## О МЕТОДАХ И РЕЗУЛЬТАТАХ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ИЗГИБА УПРУГОЙ ПЛИТЫ

В последнее время в технике все чаще находят применение тонкостенные конструкции, подвергнутые воздействию резких динамических нагрузок. В связи с этим стало актуальным изучение деформаций плит, вызванных динамической нагрузкой, которая: а) приложена вдоль некоторой линии (в том числе по краю) или в небольшой области поверхности; б) действует или возрастает до максимального значения за время, соизмеримое либо меньше времени пробега упругой волной пути, равного характерному размеру срединной поверхности плиты.

Можно предполагать, что при таких нагрузках наибольшие напряжения и ускорения имеют место во время первых пробегов упругих волн до опоры, поскольку тогда еще не успевают существенно подействовать такие смягчающие факторы, как распределение энергии деформации по конструкции, внутреннее поглощение энергии, затухающее воздействие окружающей среды (излучение) и т. д.

На указанном начальном этапе переходного волнового процесса:

1) метод Фурье, т. е. разложение волнового процесса по стоячим волнам, оказывается малоэффективным (особенно в районах разрывов или быстрого изменения напряжений) и приходится прибегать к концепции бегущих волн;

2) имеют место искривление и искажение формы поперечных сечений и нелинейное распределение напряжений по толщине плиты.

В связи с указанным возникает проблема подбора расчетной модели. Общепринятая в статике теория Кирхгоффа является параболической и, кроме того, содержит весьма жесткие гипотезы, не оправданные на начальном этапе движения. Гиперболическая теория типа Тимошенко и другие уточненные теории, базирующиеся на несколько более мягких гипотезах, имеют более широкую, но все же ограниченную область применимости, заслуживающей исследования. Поэтому представляет интерес более общий подход.

Данная работа базируется на применении линейной теории упругости без учета затухающих факторов, которые на начальном этапе движения являются, по-видимому, второстепенными и смягчающими (пренебрежение затухающими факторами дает погрешность в запас прочности). Поскольку уравнения теории упругости не поддаются в рассматриваемых задачах точному интегрированию, главная цель работы заключается в выявлении системы приближенных методов, которая позволила бы эффективно исследовать более или менее все этапы переходного волнового процесса. Под «приближенными методами» здесь следует понимать как методы приближенного интегрирования уравнений линейной теории упругости, так и применение приближенных теорий Кирхгоффа и типа Тимошенко.

Схема основных приближенных методов дана на рис. 1, где указаны и основные виды погрешности:

а) «численная» — при применении конечно-разностных методов;

б) «аналитическая» — при усечении бесконечных рядов и применении асимптотических методов;



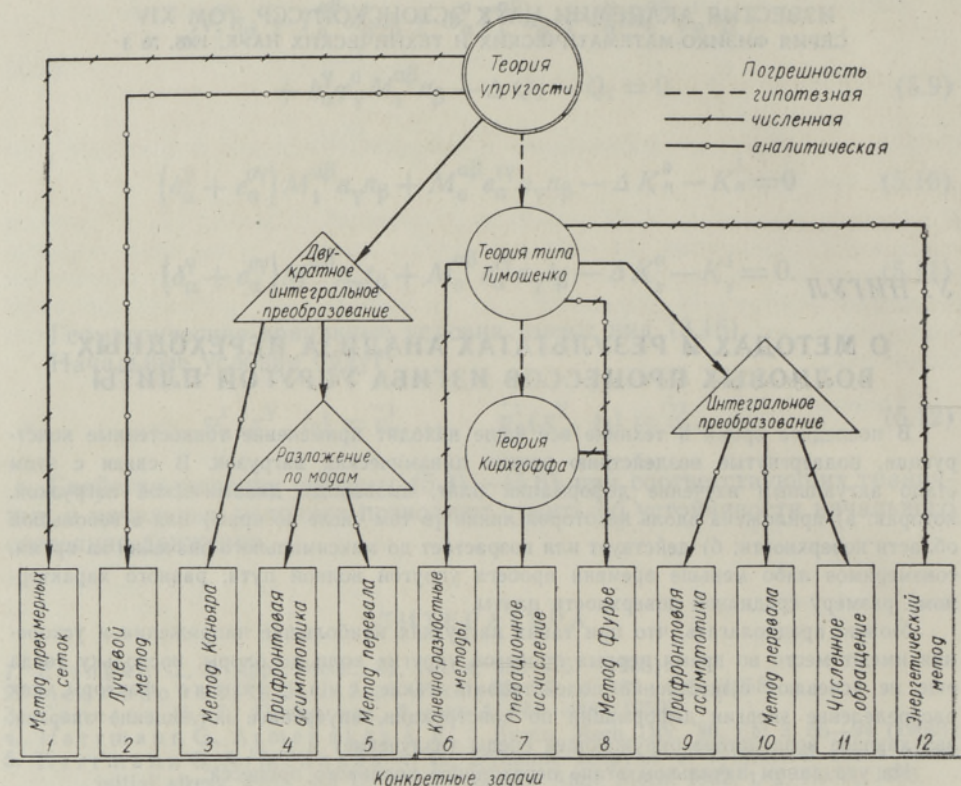


Рис. 1.

в) «гипотезная» — при применении приближенных («двумерных») теорий.

Будем рассматривать переходные волновые процессы деформации плит, зависящие от одной координаты срединной поверхности.

§ 1 посвящен методам приближенного интегрирования уравнений теории упругости. Поскольку обзор методов и результатов их применения, описанных в литературе, дан в [1], здесь главное внимание уделено методу трехмерных сеток и одному из методов анализа прифронтных напряженных состояний, о которых в [1] сообщалось лишь предварительно. Будут затронуты и вопросы обращения контурных интегралов методом перевала.

В § 2 коротко отмечены методы интегрирования приближенных уравнений теорий Кирхгофа и типа Тимошенко, использованные при построении диаграмм сопоставления методов и при анализе точности указанных приближенных теорий.

В § 3 приводятся результаты численного и качественного анализов, проводится сопоставление некоторых основных методов и формулируются некоторые выводы об эффективных и обоснованных областях применения отдельных методов.

Следует отметить, что излагаемые результаты заслуживают дальнейшего критического анализа на базе геометрически и физически нелинейной теории с учетом поглощения и излучения энергии.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность А. Мяниль за составление программ и выполнение численных расчетов к настоящей работе.

## § 1. О методах применения уравнений теории упругости

**1. Основные обозначения и исходные уравнения.** Рассмотрим плоскую деформацию плиты, при которой волновой процесс зависит от продольной координаты  $x_1$  и нормальной координаты  $x_3$ .

Введем следующие обозначения:  $E$  — модуль упругости,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $\rho$  — плотность массы,  $2h$  — толщина плиты;  $c_1, c_2$  — скорости распространения волн расширения и сдвига;  $\xi = x_1/h, \zeta = x_3/h$  — безразмерные координаты;  $t$  — время,  $\tau$  — безразмерное время;  $u, w$  — безразмерные (деленные на  $h$ ) перемещения в направлениях  $\xi, \zeta$  соответственно;  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 3$ ) — напряжения, умноженные на  $(1 + \nu)E^{-1}$ . При этом

$$c_1 = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}, \quad k^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{1-2\nu}{2-2\nu}, \quad \tau = \frac{tc_2}{h}. \quad (1.1)$$

Безразмерные величины типа изгибающего момента, поперечной силы и интегральных перемещений определим по формулам

$$M = \int_{-1}^{+1} \sigma_{11} \zeta d\zeta, \quad Q = \int_{-1}^{+1} \sigma_{13} d\zeta \quad (1.2)$$

$$U = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} u \zeta d\zeta, \quad W = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} w d\zeta. \quad (1.3)$$

Для символов дифференцирования введем сокращенные обозначения

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \partial_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (1.4)$$

Теперь уравнения равновесия в перемещениях примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \partial_3^2 u + k^2 \partial_1^2 u + (1-2\nu)^{-1} \partial_1 \partial_3 w &= \partial_\tau^2 u \\ \partial_3^2 w + k^2 \partial_1^2 w + (2-2\nu)^{-1} \partial_1 \partial_3 u &= k^2 \partial_\tau^2 w, \end{aligned} \quad (1.5)$$

и  $\sigma_{ij}$  ( $i, j = 1, 3$ ) выражается через  $u, w$  по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1-\nu}{1-2\nu} \partial_1 u + \frac{\nu}{1-2\nu} \partial_3 w, \quad \sigma_{33} = \frac{\nu}{1-2\nu} \partial_1 u + \\ &+ \frac{1-\nu}{1-2\nu} \partial_3 w, \quad \sigma_{13} = \frac{1}{2} (\partial_3 u + \partial_1 w). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Перемещения и напряжения при  $\zeta = 1$  (верхняя поверхность плиты) обозначим дополнительным индексом 1 и при  $\zeta = 0$  (срединная поверхность плиты) — дополнительным индексом 0:

$$u(\xi, 1; \tau) = u_1(\xi, \tau), \quad w(\xi, 1; \tau) = w_1(\xi, \tau), \quad \sigma_{ij}(\xi, 1; \tau) = \sigma_{ij}^1(\xi, \tau) \quad (1.7)$$

$$u(\xi, 0; \tau) = u_0(\xi, \tau), \quad w(\xi, 0; \tau) = w_0(\xi, \tau), \quad \sigma_{ij}(\xi, 0; \tau) = \sigma_{ij}^0(\xi, \tau) \quad (1.8)$$



При волновом процессе, антисимметричном относительно срединной поверхности

$$u_0 = 0, \quad \partial_3 w_0 = 0, \quad \sigma_{11}^0 = \sigma_{33}^0 = 0. \quad (1.9)$$

На поверхностях  $\xi = \pm 1$  наложим условия отсутствия нагрузки

$$\sigma_{13}^1 = 0, \quad \sigma_{33}^1 = 0, \quad (1.10)$$

из которых следуют для перемещений условия:

$$v \partial_1 u_1 + (1 - v) \partial_3 w_1 = 0, \quad \partial_3 u_1 + \partial_1 w_1 = 0. \quad (1.11)$$

**Исходные данные примера.** Численные иллюстрации статьи даны для плоской деформации плиты-полосы, свободно опертой в сечениях  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = L$  и нагруженной в сечении  $x_1 = 0$  напряжениями  $\sigma_{11}$ , линейно распределенными по толщине плиты (см. рис. 2). Численные результаты, полученные на основе уравнений (1.5), относятся к случаю, когда первый фронт, распространяющийся со скоростью  $c_1$ , не успел дойти до края  $x_1 = L$ , т. е. к случаю полубесконечной плиты. При интегрировании системы (1.5) приняты следующие условия:

- а) нулевые начальные условия;
- б) на плоскостях  $\xi = \pm 1$  краевые условия (1.11);
- в) на плоскости  $\xi = 0$  краевые условия

$$\sigma_{11}(0, \xi; \tau) = \xi(1 - v)^{-1} H(\tau), \quad w(0, \xi; \tau) = 0, \quad (1.12)$$

которые с учетом первого из соотношений (1.6) могут быть представлены в форме

$$\partial_1 u(0, \xi; \tau) = \xi A H(\tau), \quad w(0, \xi; \tau) = 0, \quad A = \frac{1 - 2v}{(1 - v)^2}; \quad (1.13)$$

- г) фронтовые условия

$$u = 0, \quad w = 0 \quad \text{при } k\xi \geq \tau. \quad (1.14)$$

**2. Применение метода трехмерных сеток.** Обозначим через  $l_\xi$ ,  $l_\zeta$ ,  $l_\tau$  безразмерные шаги сетки по безразмерным координатам  $\xi$ ,  $\zeta$ ,  $\tau$ . Рассмотрим интегрирование системы (1.5) с очередным выполнением расчета в моменты времени  $\tau = nl_\tau$ ,  $(n+1)l_\tau$ ,  $(n+2)l_\tau$ , ... Для обеспечения устойчивости расчетной схемы необходимо соблюдать условия

$$l_\tau < kl_\xi, \quad l_\tau < kl_\zeta. \quad (1.15)$$

Для правильного описания волнового процесса вблизи первого фронта  $\xi = \tau k^{-1}$  (т. е.  $x_1 = tc_1$ ), кроме того, важно соблюдать условия (1.14).

Одновременное соблюдение условий (1.14), (1.15) практически реализуется наиболее просто, если подобрать соотношение шагов

$$l_\tau = \frac{1}{2} kl_\xi, \quad (1.16)$$

принятое в нижеизложенном алгоритме. При этом необходимо, чтобы  $l_\zeta < 2l_\xi$  и величина  $1/l_\zeta$  равнялась целому числу.

Остановимся коротко на расчетном алгоритме, составленном для примера (рис. 2), сформулированного в конце предыдущего пункта.



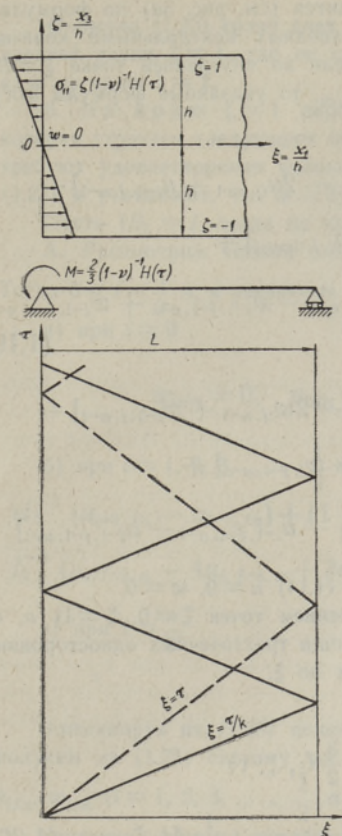


Рис. 2.

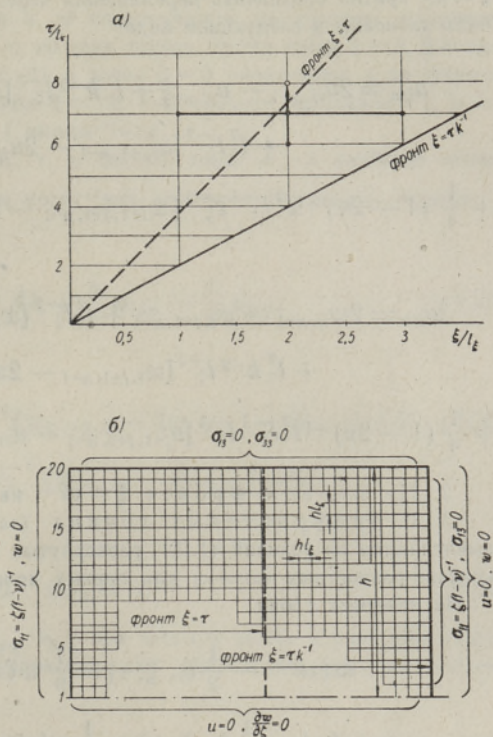


Рис. 3.

Для повышения точности расчета в районе первого фронта были аналитически выведены (см. § 1, п. 4) дополнительные фронтовые условия

$$\sigma_{11} = \xi(1 - \nu)^{-1}, \quad \sigma_{13} = 0 \quad \text{при} \quad \tau = k\xi, \quad (1.17)$$

которые с учетом (1.6), (1.14) могут быть выражены в форме

$$\partial_1 u = A\xi, \quad \partial_1 w = 0 \quad \text{при} \quad \tau = k\xi. \quad (1.18)$$

Условия (1.18) обеспечивают правильные значения напряжений на первом фронте  $\tau = k\xi$ .

\* Схема расчетного алгоритма дана на рис. 3. Описывая алгоритм, условимся говорить о нечетных слоях, когда  $\tau/l_z$  равно нечетному числу, и о четных слоях, когда  $\tau/l_z$  равно четному числу. На каждом слое (см. рис. 3б) будем называть внутренними все точки сетки, которые не находятся на контуре слоя и в первом ряду  $\xi = \text{const}$  за первым фронтом. Последние назовем прифронтовыми точками. В случае нечетного слоя в прифронтовых точках  $\xi = \tau k^{-1} - \frac{1}{2}l_z$ , а в случае четного слоя —  $\xi = \tau k^{-1} - l_z$ .

Расчет начинается с слоя  $\tau = 3l_z$ . На слоях  $\tau = 3l_z$ ,  $\tau = 4l_z$  нет внутренних точек, на всех следующих слоях они имеются.

Учитывая антисимметрию, можно ограничиться проведением расчета для верхней половины плиты. Даем расчетные формулы для слоя  $\tau = nl_z$  при  $n \geq 5$ .



1. Во внутренних точках расчет проводится (см. рис. 3а) по формулам, полученным из уравнений (1.5) путем замены производных центральными конечно-разностными выражениями первого приближения. Если во внутренней точке  $\xi = il_\xi$ ,  $\zeta = jl_\zeta$  кратко обозначить перемещения через  $u_{ijn}$ ,  $w_{ijn}$ , то указанные формулы могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_{ijn} = & 2u_{ij, n-1} - u_{ij, n-2} + l_\tau^2 k^{-2} l_\xi^{-2} [u_{i+1, j, n-1} - 2u_{ij, n-1} + u_{i-1, j, n-1}] + \\ & + l_\tau^2 l_\xi^{-2} [u_{i, j+1, n-1} - 2u_{ij, n-1} + u_{i, j-1, n-1}] + \\ & + \frac{1}{4} (1 - 2\nu)^{-1} l_\tau^2 l_\xi^{-1} l_\tau^{-1} [\omega_{i+1, j+1, n-1} - \omega_{i+1, j-1, n-1} - \omega_{i-1, j+1, n-1} + \omega_{i-1, j-1, n-1}] \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} w_{ijn} = & 2w_{ij, n-1} - w_{i, j-1, n-1} + l_\tau^2 l_\xi^{-2} [w_{i+1, j, n-1} - 2w_{ij, n-1} + w_{i-1, j, n-1}] + \\ & + l_\tau^2 k^{-2} l_\xi^{-2} [w_{i, j+1, n-1} - 2w_{ij, n-1} + w_{i, j-1, n-1}] + \\ & + \frac{1}{4} (1 - 2\nu)^{-1} l_\tau^2 l_\xi^{-1} l_\tau^{-1} [u_{i+1, j+1, n-1} - u_{i+1, j-1, n-1} - u_{i-1, j+1, n-1} + u_{i-1, j-1, n-1}]. \end{aligned}$$

2. На первом фронте  $\xi = \tau k^{-1}$  на основе (1.14)  $u = 0$ ,  $w = 0$ .

3. В прифронтовых точках (за исключением точек  $\xi = 0$ ,  $\xi = 1$ )  $u$ ,  $w$  вычисляются из условий (1.18), развернутых при помощи трехточечных односторонних конечно-разностных формул для первых производных по  $\xi$ .

На нечетных слоях

$$\begin{aligned} w(\tau k^{-1} - \frac{1}{2} l_\xi, \zeta; \tau) &= \frac{1}{9} w(\tau k^{-1} - \frac{3}{2} l_\xi, \zeta; \tau) \\ u(\tau k^{-1} - \frac{1}{2} l_\xi, \zeta; \tau) &= \frac{1}{9} u(\tau k^{-1} - \frac{3}{2} l_\xi, \zeta; \tau) - \frac{1}{3} Al_\xi \zeta. \end{aligned} \quad (1.20)$$

На четных слоях

$$\begin{aligned} w(\tau k^{-1} - l_\xi, \zeta; \tau) &= \frac{1}{4} w(\tau k^{-1} - 2l_\xi, \zeta; \tau) \\ u(\tau k^{-1} - l_\xi, \zeta; \tau) &= \frac{1}{4} u(\tau k^{-1} - 2l_\xi, \zeta; \tau) - \frac{1}{2} Al_\xi \zeta. \end{aligned} \quad (1.21)$$

4. На краю  $\xi = 0$  любого слоя во всех точках  $u = 0$  на основе (1.9) и, кроме того,  $w = 0$  в точках  $\xi = 0$ ,  $\xi = \tau k^{-1}$  на основе (1.13), (1.14); в остальных точках  $w$  определяется для слоя  $\tau = nl_\tau$  по формуле

$$w_{i0n} = \frac{4}{3} w_{i1n} - \frac{1}{3} w_{i2n}, \quad (1.22)$$

полученной из второго условия (1.9) выражением производного по  $\xi$  через одностороннюю конечно-разностную формулу.

5. На краю  $\xi = 0$  любого слоя  $w = 0$  в силу второго из краевых условий (1.13), а  $u$  определяется для слоя  $\tau = nl_\tau$  по формуле

$$u_{0jn} = -\frac{2}{3} Al_\xi j l_\tau + \frac{4}{3} u_{1jn} - \frac{1}{3} u_{2jn}, \quad (1.23)$$

полученной из первого краевого условия (1.13) выражением производного по  $\xi$  через одностороннюю конечно-разностную формулу.



Формула (1.23) сразу дает численные значения и во всех точках края  $\xi = 0$ , кроме верхней точки  $\xi = 1$ , где ее следует включить в систему уравнений, определяющих  $u$ ,  $w$  на краю  $\xi = 1$ .

6. На краю  $\xi = 1$  перемещения  $u$ ,  $w$  определяются из системы уравнений, которая строится следующим образом: а) во всех точках, кроме точек  $\xi = 0$ ,  $\xi = \tau k^{-1}$  требуют удовлетворения условий (1.11); б) в точке  $\xi = 0$  определяют  $u$  по формуле (1.23) и учитывают, что  $w = 0$ ; в) в точке  $\xi = \tau k^{-1}$  используют условия  $u = 0$ ,  $w = 0$ .

Пусть  $1/l_\zeta = J$ , тогда на краю  $\xi = 1$  индекс  $j = J$ .

А. Рассмотрим четный слой  $\tau = n l_\zeta$ , т. е. случай, когда  $n > 5$  является четной. Тогда  $0 \leq i \leq \frac{1}{2} n$ , и расчетные формулы могут быть записаны следующим образом:

а) при  $i = 0$

$$w_{0Jn} = 0, \quad u_{0Jn} = -\frac{2}{3} A l_\xi + \frac{4}{3} u_{1Jn} - \frac{1}{3} u_{2Jn}; \quad (1.24)$$

б) при  $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2} n - 1$

$$v l_\xi^{-1} (u_{i+1, Jn} - u_{i-1, Jn}) + (1 - v) l_\zeta^{-1} (w_{i, J-2, n} - 4w_{i, J-1, n} + 3w_{iJn}) = 0 \quad (1.25)$$

$$l_\zeta^{-1} (u_{i, J-2, n} - 4u_{i, J-1, n} + 3u_{iJn}) + l_\xi^{-1} (w_{i+1, Jn} - w_{i-1, Jn}) = 0;$$

в) при  $i = \frac{n}{2}$

$$u_{iJn} = 0, \quad w_{iJn} = 0. \quad (1.26)$$

Элиминируя из (1.25) величины  $w_{0Jn}$ ,  $u_{0Jn}$  при помощи (1.24) и учитывая (1.26), получим из (1.25) систему из  $n-2$  уравнений для вычисления искомых величин  $u_{iJn}$ ,  $w_{iJn}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2} n - 1$ ).

Указанная система допускает решение в виде рекуррентных формул, которые приведены в работе [2], помещенной в настоящем номере журнала.

Б. Рассмотрим теперь нечетный слой  $\tau = n l_\zeta$ , т. е. случай, когда  $n \geq 5$  является нечетной. Тогда  $0 \leq i \leq \frac{1}{2} (n+1)$ , причем последний шаг у первого фронта (см. рис. 3а) имеет длину  $\frac{1}{2} l_\zeta$ . Теперь расчетные формулы являются следующими:

а) при  $i = 0$  сохраняют силу формулы (1.24);

б) при  $i = 1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2} (n-3)$  сохраняют силу формулы (1.25);

в) в фронтовых точках  $i = \frac{1}{2} (n+1)$  сохраняют силу условия (1.26);

д) в прифронтовых точках  $i = \frac{1}{2} (n-1)$  имеют место условия

$$-v l_\xi^{-1} \left( \frac{1}{3} u_{i-1, Jn} + u_{iJn} \right) + (1 - v) l_\zeta^{-1} \left( \frac{1}{2} w_{i, J-2, n} - 2w_{i, J-1, n} + \frac{3}{2} w_{iJn} \right) = 0 \quad (1.27)$$

$$\frac{1}{2} l_\zeta^{-1} (u_{i, J-2, n} - 4u_{i, J-1, n} + 3u_{iJn}) + \frac{1}{3} l_\xi^{-1} (-w_{i+1, Jn} - w_{i-1, Jn}) = 0.$$

Элиминируя  $w_{0Jn}$ ,  $u_{0Jn}$  при помощи (1.24) и учитывая (1.26) в фронтовой точке  $i = \frac{1}{2} (n+1)$ , нетрудно получить систему из  $n-1$  уравнений для вычисления  $u_{iJn}$ ,  $w_{iJn}$  ( $i = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$ ). Эта система опять допускает решение в виде рекуррентных формул [2].



Остановимся теперь на случаях  $\tau = 3l_\tau$ ,  $\tau = 4l_\tau$ . Внутренние точки отсутствуют, но в контурных и прифронтových точках расчет идет аналогично вышеизложенному. Наиболее существенная разница состоит в том, что при вычислении  $u$  на слое  $\tau = 3l_\tau$  из формул (1.20), (1.23) и на слое  $\tau = 4l_\tau$  из формул (1.21), (1.23) образуются системы уравнений, которые имеют следующие решения:

$$\begin{aligned} u_{0j3} &= -\frac{3}{2} Al_\tau j l_\tau, & u_{1j3} &= \frac{1}{3} u_{0j3}, \\ u_{0j4} &= -2Al_\tau j l_\tau, & u_{1j4} &= \frac{1}{2} u_{0j4}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

**З а м е ч а н и е 1.** Описанный алгоритм может быть использован в других антисимметричных и симметрических задачах, где на краю  $\xi = 0$  задана одна из следующих пар величин: 1)  $u$ ,  $w$ , 2)  $u$ ,  $\sigma_{13}$ , 3)  $w$ ,  $\sigma_{11}$ , являющихся достаточно гладкими функциями от  $\xi$ .

В частности, описанная схема расчета и реализующая ее программа легко могут быть приспособлены для решения симметричной задачи  $\sigma_{11}(0, \xi; \tau) = H(\tau)$ ,  $w(0, \xi; \tau) = 0$ . Для этого в формулах (1.19) — (1.28) необходимо сделать лишь следующие изменения: а) в последних членах формул (1.20), (1.21) заменить  $\xi$  единицей, б) на краю  $\xi = 0$  вместо  $u(\xi, 0; \tau) = 0$  и (1.22) использовать условия  $w(\xi, 0; \tau) = \partial_3 u(\xi, 0; \tau) = 0$ , в) в первом члене на правой стороне (1.23) опустить  $j$ .

Если при  $\xi = 0$  оба краевых условия заданы в напряжениях, то при вычислении  $u$ ,  $w$  на краю  $\xi = 0$  возникает система уравнений, аналогичная появляющейся в рассмотренном примере у края  $\xi = 1$ . Указанное, конечно, усложняет расчетный алгоритм, но не приводит к принципиальным трудностям.

**З а м е ч а н и е 2.** Наряду с вышепринятым соотношением шагов (1.16) могут представлять практически интерес соотношения  $l_\tau = \frac{2}{3} kl_\xi$ ,  $l_\tau = \frac{3}{4} kl_\xi$ , ..., при которых расчет протекает быстрее по координате  $\tau$ . Однако в таком случае вместо двух видов слоев (нечетные и четные) возникает большее количество различных слоев, что существенно увеличивает объем программы, ибо вычисление  $u$ ,  $w$  на краю  $\xi = 1$  требует отдельной подпрограммы для всех различных типов слоев.

**Численный пример.** Имея в виду преимущественно анализ начала движения, где напряженное состояние изменяется по  $\xi$ ,  $\zeta$  примерно с одинаковой скоростью, было подобрано  $l_\xi = l_\zeta = l$ . Учитывая результаты предварительного расчета и конкретные параметры (длина регистров, объем памяти, быстрота действия) ЭВМ «Минск-2», была подобрана длина безразмерного шага  $l = 1/19$ , которая при  $0 \leq \xi \leq 15$  обеспечивает численное дифференцирование с практически приемлемой точностью. Коэффициент Пуассона  $\nu$  принят равным 0,3. Программа вычислений на слоях  $n \geq 5$  описана в [2]. Исходные для программы значения  $u$ ,  $w$  на слоях  $n = 3, 4$  даны в табл. 1.

Результаты расчета и выводы из них будут изложены в § 3. Здесь отметим лишь, что предлагаемый метод трехмерных сеток, имеющий довольно простую расчетную схему, позволил получить интересные данные о деформации плиты в начале движения, которые до сих пор отсутствовали. Однако применение метода трехмерных сеток при  $\tau \gg 1$  связано с большим объемом вычислений. Например, при решении вышеуказанной задачи на ЭВМ «Минск-2» по довольно рациональной программе, описанной в [2], во время прохода первым фронтом сечения  $\xi = 5$  (т. е.  $x_1 = 5h$ ) вычисления на одном слое  $\tau = \text{const}$  потребовали около 4 минут; дальше время вычисления одного слоя росло примерно пропорционально длине участка, пройденного первым фронтом. В связи с этим пришлось закончить расчеты, когда длина участка достигала  $12h$ . Однако для их продолжения и не было практической необходимости, ибо при  $\tau \gg 1$  могут быть применены другие методы.



Таблица 1

$j$	$i$	Слой $\tau = 3l_\tau$		Слой $\tau = 4l_\tau$	
		$w_{ij3}$	$u_{ij3}$	$w_{ij4}$	$u_{ij4}$
$0 \leq j \leq J-1$	0	0	$-0,003391938 j$	0	$-0,004522585 j$
	1	0	$-0,001130646 j$	0	$-0,002261292 j$
	2	0	0	0	0
$j = J$	0	0	$-0,08376833$	0	$-0,08391906$
	1	$-0,017161045$	$-0,03216921$	$-0,011988437$	$-0,04145702$
	2	0	0	0	0

3. Частные и формальные решения. Определим преобразование Лапласа по формулам

$$\int_0^{\infty} F e^{-s\tau} d\tau = F^L, \quad F = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F^L e^{s\tau} ds. \quad (1.29)$$

При нулевых начальных условиях получим из (1.5) следующие преобразованные по Лапласу уравнения:

$$\begin{aligned} \partial_3^2 u^L + k^2 \partial_1^2 u^L + (1 - 2\nu)^{-1} \partial_1 \partial_3 w^L &= s^2 u^L \\ \partial_3^2 w^L + k^2 \partial_1^2 w^L + (2 - 2\nu)^{-1} \partial_1 \partial_3 u^L &= k^2 s^2 w^L. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Краевые условия при  $\xi = \pm 1$  получим из (1.11), заменяя  $u, w$  на  $u^L, w^L$ . В работе [3] построены символические решения для общего случая (неплоской деформации), из которых следует, что существует следующая последовательность частных решений системы (1.30), удовлетворяющих при  $\xi = \pm 1$  крайевым условиям типа (1.11):

$$\begin{aligned} u_j^L &= (\Psi_{1j} u_{1j} + \Psi_{2j} u_{2j}) \exp \lambda_j \xi \\ w_j^L &= (\Psi_{1j} w_{1j} + \Psi_{2j} w_{2j}) \exp \lambda_j \xi, \end{aligned} \quad (j = 1, 2, 3, \dots, \infty) \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \text{где } u_{1j} &= \left\{ \lambda \beta^2 \left( -\lambda^2 \frac{\sin \beta}{\beta} \frac{\sin \alpha \xi}{a} + \gamma^2 \frac{\sin \alpha}{a} \frac{\sin \beta \xi}{\beta} \right) \right\}_{\lambda = \lambda_j} \\ u_{2j} &= \left\{ \lambda \left( -\gamma^2 \cos \beta \frac{\sin \alpha \xi}{a} + \beta^2 \cos \alpha \frac{\sin \beta \xi}{\beta} \right) \right\}_{\lambda = \lambda_j} \\ w_{1j} &= \left\{ \lambda^2 \left( -\beta^2 \frac{\sin \beta}{\beta} \cos \alpha \xi + \gamma^2 \frac{\sin \alpha}{a} \cos \beta \xi \right) \right\}_{\lambda = \lambda_j} \\ w_{2j} &= \left\{ -\gamma^2 \cos \beta \cos \alpha \xi + \lambda^2 \cos \alpha \cos \beta \xi \right\}_{\lambda = \lambda_j} \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\alpha_j^2 = \lambda_j^2 - k^2 s^2, \quad \beta_j^2 = \lambda_j^2 - s^2, \quad \gamma_j^2 = \lambda_j^2 - \frac{1}{2} s^2. \quad (1.33)$$



Здесь  $\Psi_{1j}(s)$ ,  $\Psi_{2j}(s)$  — функции от  $s$ , определяемые из краевых условий в сечениях  $\xi = \text{const}$ , а  $\lambda_j(s)$  — корни уравнения Релея-Лэмба

$$-\lambda^2 \beta^2 \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\beta} + \gamma^4 \cos \beta \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 0. \quad (1.34)$$

Уравнение (1.34) имеет бесконечное число корней  $\lambda_j(s)$ , которые распадаются на пары, отличающиеся по знаку. Корнями, удовлетворяющими условию  $\text{Re } \lambda_j(s) < 0$  при  $\text{Re } s > 0$ , связаны волны, распространяющиеся в направлении возрастания  $\xi$ ; корнями противоположного знака связаны волны, распространяющиеся в направлении убывания  $\xi$ .

При конкретных краевых условиях в сечениях  $\xi = \text{const}$  можно искать решение уравнений (1.30) в форме

$$u^L = \sum_{j=1}^{\infty} u_j^L, \quad w^L = \sum_{j=1}^{\infty} w_j^L. \quad (1.35)$$

Далее на основе второй из формул (1.29) может быть выписано формальное решение задачи в виде бесконечной суммы контурных интегралов. Например, для  $w$  имеем выражение

$$w = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{a_j - i\infty}^{a_j + i\infty} (\Psi_{1j} w_{1j} + \Psi_{2j} w_{2j}) \exp(s\tau + \lambda_j \xi) ds, \quad (1.36)$$

где контуры интегрирования (т. е. величины  $a_j$ ) должны быть выбраны для каждого интеграла правее от особых точек подынтегральной функции (в том числе правее точек разветвления корней  $\lambda_j$ ).

Построение формальных решений вида (1.36) для конкретных задач сводится к нахождению  $\Psi_{1j}(s)$ ,  $\Psi_{2j}(s)$  из краевых условий при  $\xi = \text{const}$ . Точный метод пока существует лишь для определенного типа краевых условий [1], допускающих вычисление  $\Psi_{1j}(s)$ ,  $\Psi_{2j}(s)$  с применением относительно уравнений (1.30) синус- и косинус-преобразований Фурье по координате  $\xi$ . Другими словами, точный метод вычисления  $\Psi_{1j}(s)$ ,  $\Psi_{2j}(s)$  основывается на применении двукратного интегрального преобразования и на обращении внутреннего интеграла при помощи вычетов; он коротко может быть назван разложением волнового процесса по модам (см. рис. 1).

**Пример.** Рассмотрим начало движения в случае задачи, сформулированной в конце пункта 1. Поскольку в данном случае применима модель полубесконечной плиты, решение должно удовлетворить в сечении  $\xi = 0$  условиям (1.12) и затухая превратиться в нуль при  $\xi \rightarrow \infty$ . Такое решение может быть построено при помощи корней  $\lambda_j$ , удовлетворяющих условию  $\text{Re } \lambda_j \leq 0$  при  $\text{Re } s > 0$ . В работе [4] показано, что в данном случае

$$\Psi_{rj} = \tilde{\Psi}_{rj} \Phi_j^{-1} \quad (r = 1, 2) \quad (1.37)$$

$$\tilde{\Psi}_{1j} = 2(1 - \nu)^{-2} \left( \frac{1 - 2\nu}{2} s^2 + \nu \lambda_j^2 \right) s^{-3}, \quad \tilde{\Psi}_{2j} = -2\nu(1 - \nu)^{-2} \lambda_j^2 \beta_j^2 s^{-3}. \quad (1.38)$$

При этом



$$\Phi_j = \left\{ \gamma^2 \left( \frac{\lambda^4}{2-2\nu} - \frac{5-4\nu}{4-4\nu} \lambda^2 s^2 + k^2 s^2 \right) \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cos \beta - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} \lambda^2 s^2 \alpha^2 \beta^2 \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\sin \beta}{\beta} - \left( \frac{\lambda^2}{2-2\nu} - \frac{s^2}{4} \right) \lambda^2 \beta^2 \cos \alpha \cos \beta \right\} \lambda = \lambda_j. \quad (1.39)$$

4. **Выявление основных разрывов решения и прифронтная асимптотика.** Информация об основных разрывах характеризует решение качественно и нужна при построении надежных конечно-разностных схем расчета. Представляет также интерес качественное исследование прифронтных напряженных состояний, в том числе: а) оценка величины амплитуд, б) оценка скорости изменения напряженных состояний (имеющую, например, значение при выборе шага в конечно-разностных методах), в) выявление роли отдельных мод и аппроксимирующих их приближенных теорий в прифронтных полях.

В динамической теории упругости в настоящее время могут быть указаны три основных метода исследования, которые на рис. 1 обозначены следующим образом: лучевой метод [5-8] — номером 2; обращение двукратных контурных интегралов методом Каньяра [1, 9-12] — номером 3 и асимптотическое при  $s \rightarrow \infty$  обращение контурных интегралов формального решения вида (1.36) — номером 4.

Литература, посвященная применению методов 2, 3, говорит о том, что эти методы позволяют выявить месторасположение и интенсивность фронтов элементарных волн, представляющие интерес в сейсмологических исследованиях. Однако при исследовании переходных волновых процессов в инженерных конструкциях более важно выявление оценок для амплитуд и скорости изменения напряженного состояния всей плиты. Для этой цели оказывается более подходящим метод 4, который нашел применение [13] в рамках теории типа Тимошенко, но, по-видимому, не использован в теории упругости (предварительно о методе 4 сообщалось в [1]).

Остановимся на применении метода 4 в случае волн, распространяющихся в направлении возрастания  $\xi$  и связанных с корнями, удовлетворяющими условию  $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$  при  $\operatorname{Re} s > 0$ . Основная идея метода состоит в разложении изображения при  $s \rightarrow \infty$  в ряд, допускающий почленное обращение по стандартным формулам

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp s \tau_q \frac{ds}{s^{r+1}} = \frac{\tau_q^r}{r!} H(\tau_q) \quad (1.40)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \exp \left( s \tau_q - p \frac{\xi}{s} \right) \frac{ds}{s^{r+1}} = \left( \frac{\tau_q}{p \xi} \right)^{\frac{r}{2}} \begin{cases} J_r(2\sqrt{|p| \xi \tau_q}) H(\tau_q) & \text{при } p > 0 \\ I_r(2\sqrt{|p| \xi \tau_q}) H(\tau_q) & \text{при } p < 0, \end{cases} \quad (1.41)$$

где  $\tau_q = \tau_1 = \tau - k\xi$  у фронта волны сжатия и  $\tau_q = \tau_2 = \tau - \xi$  у фронта волны сдвига;  $J_r, I_r$  — бесселевы функции.

Рассмотрим отдельно напряженное состояние у фронта волны сжатия и сдвига.

А. У фронта волны сжатия используем группу корней  $\lambda_j = \lambda_n$  ( $j = 2, 4, 6, \dots, \infty$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ), которая на полуплоскости  $\operatorname{Re} s > a_j > 0$  имеет при  $|s| \rightarrow \infty$  разложение вида [1]



$$\lambda_n = -ks - \frac{n^2 \pi^2}{2ks} \left[ 1 - \frac{2(1-2v)\sqrt{2-2v}}{v^2} \frac{\operatorname{tg} is_*}{is} \right] + O\left(\frac{1}{s^3}\right), \quad (1.42)$$

$$\text{где } s_* = \frac{s}{\sqrt{2-2v}}. \quad (1.43)$$

Подставлением (1.42) в (1.32), (1.39) получим:

$$\begin{aligned} \frac{u_{1n}}{\Phi_n} &\sim \frac{(2-2v)(1-2v)}{kv^2} \frac{1}{s} \left[ \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} \frac{\sin \alpha \zeta}{\alpha \cos \alpha} - \frac{1}{vs_*} \frac{\sin \beta \zeta}{\beta \cos \beta} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] \\ \frac{u_{2n}}{\Phi_n} &\sim \frac{4(1-v)^2}{kv} \frac{1}{s^3} \left[ \frac{\sin \alpha \zeta}{\alpha \cos \alpha} - \frac{\sin \beta \zeta}{v\beta \cos \beta} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] \\ \frac{w_{1n}}{\Phi_n} &\sim -\frac{4(1-v)^2}{v^2} \frac{1}{s^2} \left[ \frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} \frac{\cos \alpha \zeta}{\cos \alpha} + \frac{1-2v}{vs_*} \frac{\cos \beta \zeta}{\cos \beta} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] \\ &\quad (1.44) \end{aligned}$$

$$\frac{w_{2n}}{\Phi_n} \sim -\frac{8(1-v)^3}{(1-2v)v} \frac{1}{s^4} \left[ \frac{\cos \alpha \zeta}{\cos \alpha} + \frac{1-2v}{v} \frac{\cos \beta \zeta}{\cos \beta} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right],$$

$$\text{где } \alpha \sim n\pi, \quad \beta \sim is_*, \quad i = \sqrt{-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (1.45)$$

Подставляя (1.45) в (1.44) и выражая тригонометрические функции от  $\beta$  и  $\beta\zeta$  через экспоненциальные, получим выражения, при помощи которых контурные интегралы (1.36) могут быть приближенно вычислены на основе (1.40), (1.41), если  $\Psi_{1n}$ ,  $\Psi_{2n}$  допускают разложение по целым отрицательным степеням  $s$ .

Рассмотрим случай, когда величина

$$\tilde{\Psi}_n = \frac{4(1-v)^2\sqrt{1-2v}}{v^2} \left[ \tilde{\Psi}_{1n} + \frac{v}{k\sqrt{1-2v}} \frac{1}{s} \tilde{\Psi}_{2n} \right] \quad (1.46)$$

представима при  $|s| \rightarrow \infty$  в форме

$$\tilde{\Psi}_n \sim \Psi(n) s^{-m} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right], \quad (1.47)$$

где  $m$  равно 0 или является целым положительным числом.

Тогда в первом приближении

$$u \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(n) \left\{ \frac{\sin n\pi\zeta}{n\pi \cos n\pi} G_{n,m+2} - \frac{\sqrt{2-2v}}{v} [K_{n,m+3}(\zeta) - K_{n,m+3}(-\zeta)] \right\} \quad (1.48)$$

$$w \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\Psi(n) \left\{ \frac{\cos n\pi\zeta}{k \cos n\pi} G_{n,m+3} + \frac{1-2v}{kv} [K_{n,m+3}(\zeta) + K_{n,m+3}(-\zeta)] \right\}$$

$$\sigma_{11} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(n) \left\{ -\frac{1}{2k} \frac{\sin n\pi\zeta}{n\pi \cos n\pi} G_{n,m+1} + \frac{\sqrt{1-2v}}{v} [K_{n,m+2}(\zeta) - K_{n,m+2}(-\zeta)] \right\}$$



$$\sigma_{13} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \Psi(n) \left\{ \frac{\cos n \pi \xi}{\cos n \pi} G_{n, m+2} - [K_{n, m+2}(\xi) + K_{n, m+2}(-\xi)] \right\}$$

$$\sigma_{33} \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\Psi(n) \left\{ \frac{v}{\sqrt{(1-2v)(2-2v)}} \frac{\sin n \pi \xi}{n \pi \cos n \pi} G_{n, m+1} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{1-2v}}{v} [K_{n, m+2}(\xi) - K_{n, m+2}(-\xi)] \right\}, \quad (1.49)$$

где

$$G_{n, m+p} \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{a_n - i\infty}^{a_n + i\infty} \frac{1}{s^{m+p}} \exp \left[ s(\tau - k\xi) - b_n \frac{\xi}{s} \right] \left[ 1 + 0 \left( \frac{1}{s}, \frac{\xi}{s^2} \right) \right] ds$$

$$K_{n, m+p}(\pm \xi) \sim \frac{1}{2\pi i} \int_{a_n - i\infty}^{a_n + i\infty} \frac{1}{s^{m+p}} \exp \left[ s(\tau - k\xi) - b_n \frac{\xi}{s} \right] \left[ e^{-s_* \pm s_* \xi} + \right. \\ \left. + e^{-3s_* \pm s_* \xi} + e^{-5s_* \pm s_* \xi} + \dots \right] \left[ 1 + 0 \left( \frac{1}{s}, \frac{\xi}{s^2} \right) \right] ds \quad (1.50)$$

$$b_n = \frac{n^2 \pi^2}{2k}.$$

На основе (1.41) контурные интегралы (1.50) могут быть обращены по формулам

$$G_{n, m+p} \sim \left( \frac{\tau_1}{b_n \xi} \right)^{\frac{m+p-1}{2}} J_{m+p-1}(2\sqrt{b_n \xi \tau_1}) H(\tau_1) [1 + 0 \tau_1(1, \tau_1 \xi)]$$

$$K_{n, m+p}(\pm \xi) \sim \sum_{r=1, 3, 5, \dots} \left( \frac{\tau_{1r}^{\pm}}{b_n \xi} \right)^{\frac{m+p-1}{2}} J_{m+p-1}(2\sqrt{b_n \xi \tau_{1r}^{\pm}}) H(\tau_{1r}^{\pm}) [1 + 0 \tau_{1r}^{\pm}(1, \tau_{1r}^{\pm} \xi)]. \quad (1.51)$$

Характер основных разрывов наглядно виден из следующих формул полученных на основе (1.40):

$$G_{n, m+p} \sim \frac{(\tau_1)^{m+p-1} H(\tau_1)}{(m+p-1)!} \left[ 1 - \frac{b_n \xi \tau_1}{m+p} + 0(\tau_1, \xi \tau_1^2) \right]$$

$$K_{n, m+p} \sim \sum_{r=1, 3, 5, \dots} \frac{(\tau_{1r}^{\pm})^{m+p-1} H(\tau_{1r}^{\pm})}{(m+p-1)!} \left\{ 1 - \frac{b_n \xi \tau_{1r}^{\pm}}{m+p} + 0[\tau_{1r}^{\pm}, \xi(\tau_{1r}^{\pm})^2] \right\}. \quad (1.52)$$

В формулах (1.51), (1.52) приняты обозначения

$$\tau_1 = \tau - k\xi, \quad \tau_{1r}^{\pm} = \tau_1 + \frac{\pm \xi - r}{\sqrt{2-2v}}. \quad (1.53)$$

Указанным путем в районе волны сжатия выявлены наиболее существенные разрывы (фронты элементарных волн) и связанные с ними напряженные состояния. Кроме них существуют еще более слабые разрывы на криволинейных фронтах.



В изложенных формулах слагаемые  $n=1, 2, 3, \dots$  аппроксимируют соответственно вклады мод  $j=2, 4, 6, \dots$ ; при этом сами слагаемые выписаны в первом приближении.

Случай  $m=0$ . Из изложенных формул следует:

1. На основном фронте  $\tau_1=0$  имеют конечные разрывы  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$ ,  $\partial_1 u$ ,  $\partial_1^2 w$ ,  $\partial_1 \sigma_{13}$ ; величины  $u$ ,  $w$ ,  $\partial_1 w$ ,  $\sigma_{13}$  неразрывны и равны нулю.

2. На фронтах  $\tau_{1r}^{\pm}=0$  перемещения и все напряжения неразрывны, конечные разрывы имеют первые производные от напряжений и вторые производные — от перемещений.

3. Члены рядов (1.49) для  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$  зависят от  $\xi$ ,  $\tau$  через

$$J_0\left(\xi n \pi \sqrt{\frac{2\tau_1}{k\xi}}\right), \quad \sqrt{\frac{2k\tau_{1r}^{\pm}}{\xi}} \frac{1}{n\pi} J_1\left(\xi n \pi \sqrt{\frac{2\tau_{1r}^{\pm}}{k\xi}}\right). \quad (1.54)$$

Следовательно:

а)  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$ , колеблясь, уменьшаются при удалении от фронта  $\tau_1=0$ . Диаграмма, построенная при  $\tau=\text{const}$ , колеблется тем быстрее, чем меньше  $\tau_1$  и больше  $\xi$ ;

б) благодаря множителю  $\sqrt{\tau_1/\xi}$  перед второй из функций (1.54) влияние фронтов типа  $\tau_{1r}^{\pm}=0$  уменьшается с ростом  $\xi$ . Однако при построении диаграмм  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$  при небольших  $\tau=\text{const}$ ,  $\xi=\text{const}$  важно учитывать разрывы первых производных.

4. Члены ряда (1.49) для  $\sigma_{13}$  зависят от  $\tau$ ,  $\xi$  через

$$\frac{1}{n} \sqrt{\frac{\tau_1}{\xi}} J_1\left(\xi n \pi \sqrt{\frac{2\tau_1}{k\xi}}\right), \quad \frac{1}{n} \sqrt{\frac{\tau_{1r}^{\pm}}{\xi}} J_1\left(\xi n \pi \sqrt{\frac{2\tau_{1r}^{\pm}}{k\xi}}\right). \quad (1.55)$$

Следовательно,  $\sigma_{13}$ , колеблясь, растет при удалении от основного фронта  $\tau_1=0$ . Максимальные значения  $\sigma_{13}$  в районе за фронтом  $\tau_1=0$  уменьшаются с ростом  $\xi$ .

5. Перемещения  $u$ ,  $w$ , колеблясь, растут при удалении от фронта  $\tau_1=0$ . При этом максимальные амплитуды  $u$  могут быть оценены через  $n^{-1}\tau_1^{1/2}\xi^{-1/2}$ , а максимальные амплитуды  $w$  — через  $n^{-2}\tau_1\xi^{-1}$ . Отсюда следует: при  $\xi \gg 1$ ,  $u \gg w$ .

6. С ростом  $\xi$ : а) за основным фронтом  $\tau_1=0$  образуется широкая зона весьма малых перемещений; б) на фоне сравнительно небольших напряжений вырисовывается резкий пик напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$  у самого фронта.

Случай  $m=1$ . Все разрывы будут на один порядок слабее предыдущего случая. Все напряжения и перемещения, колеблясь, медленно растут при удалении от фронта  $\tau_1=0$ . С ростом  $\xi$  перемещения уменьшаются еще быстрее, чем в предыдущем случае.

Аналогично могут быть исследованы случаи  $m=2, 3, \dots$ . Чем мягче нагрузка (больше  $m$ ), тем больше вырисовывается зона малых перемещений и напряжений.

**Пример.** Рассмотрим случай (1.37), (1.38). Получим

$$\Psi(n) = \frac{4k}{1-v} = \text{const}, \quad m=0. \quad (1.56)$$

Следовательно, имеет место случай  $m=0$ , описанный выше. Построение расчетных формул на основе (1.49)—(1.51) не представляет трудностей. В качестве примера выпишем выражение для нормальных перемещений срединной поверхности:



$$\begin{aligned} \omega_0 \sim & \frac{-8k}{(1-v)\pi^2\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{\tau_1}{\cos n\pi} J_2 \left( \xi n \pi \sqrt{\frac{2\tau_1}{k\xi}} \right) H(\tau_1) + \right. \\ & \left. + \frac{2(1-2v)}{v} \sum_{r=1,3,5,\dots}^{\infty} \tau_{1r} J_2 \left( \xi n \pi \sqrt{\frac{2\tau_{1r}}{k\xi}} \right) H(\tau_{1r}) \right\} \\ & \tau_{1r} = \tau_1 - \frac{r}{\sqrt{2-2v}}. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Отметим еще, что по формулам (1.49), (1.52), (1.56) на основном фронте  $\tau_1 = 0$

$$\sigma_{11} = \frac{-2}{1-v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi\xi}{n\pi \cos n\pi} = \frac{\xi}{1-v}, \quad \sigma_{33} = \frac{v}{1-v} \sigma_{11}. \quad (1.58)$$

Следовательно, на этом фронте  $\sigma_{11}$  имеет те же значения, что и в сечении  $\xi = 0$ . Кроме того, в точках  $\xi = \pm 1$  берут начало «поверхностные эффекты», определяемые вторыми и третьими членами в фигурных скобках выражений (1.49).

Из изложенного следует, что разрыв на фронте  $\tau_1 = 0$  образуется в виде ряда Фурье по функциям  $\sin n\pi\xi$ , причем моды  $j = 2, 4, 6, \dots$  определяют соответственно члены ряда  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Если, например, провести расчет плиты с учетом мод  $j = 1, 2$ , то в рядах (1.49), (1.58) определяется лишь один член. Это, конечно, грубое приближение, но с учетом небольшого количества мод оказывается возможным получить практически приемлемые результаты.

Б. У фронта волны сдвига используем группу корней  $\lambda_j = \lambda_m$  ( $j = 3, 5, 7, \dots, \infty$ ;  $m = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ), которая на полуплоскости  $\text{Re } s \geq 0$  имеет при  $|s| \rightarrow \infty$  разложение вида [1]

$$\lambda_m \sim -s - \frac{(m - \frac{1}{2})^2 \pi^2}{2s} + \frac{4(m - \frac{1}{2})^2 \pi^2}{\sqrt{2-2v} s^2} + O\left(\frac{1}{s^3}\right). \quad (1.59)$$

В работе [14] разложение типа (1.59) было использовано для аппроксимации диаграмм  $\lambda_m = im(\omega)$  на мнимой оси  $s = i\omega$ .

Подставлением (1.59) в (1.32), (1.39) получим:

$$\begin{aligned} \frac{u_{1m}}{\Phi_m} & \sim \frac{8(1-v)}{s^3} \left[ -\frac{\sin \alpha \xi}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \frac{\sin \beta \xi}{\sin \beta} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] \\ \frac{u_{2m}}{\Phi_m} & \sim \frac{8\sqrt{2-2v}}{s^4} \left[ -\frac{\sin \alpha \xi}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \text{ctg } \alpha \frac{\sin \beta \xi}{\sin \beta} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] \\ \frac{w_{1m}}{\Phi_m} & \sim -\frac{4(1-v)}{s^2} \left[ -\frac{2\alpha \cos \alpha \xi}{s \sin \alpha} + \frac{\cos \beta \xi}{\beta \sin \beta} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right] \\ \frac{w_{2m}}{\Phi_m} & \sim \frac{4\sqrt{2-2v}}{s^3} \left[ -\frac{2\alpha \cos \alpha \xi}{s \sin \alpha} + \text{ctg } \alpha \frac{\cos \beta \xi}{\beta \sin \beta} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right], \end{aligned} \quad (1.60)$$

где

$$\alpha \sim s_*, \quad \beta \sim \left(m - \frac{1}{2}\right) \pi, \quad s_* = \frac{s}{\sqrt{2-2v}}, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (1.61)$$

Дифференцируя (1.60), нетрудно вывести формулы для напряжений.

На основе (1.60) могут быть исследованы быстроизменяющиеся напряженные состояния, связанные основным фронтом сдвига  $\tau_2 = \tau - \xi = 0$ . Однако в районе этого фронта существуют, кроме того, еще медленно изменяющиеся поля. Итак, формулы типа (1.60), в отличие от формул



случая «А», не позволяют определить полное напряженное состояние, что является основной целью при расчете инженерных конструкций. Поэтому ограничимся применением (1.60) к анализу разрыва на основном фронте  $\tau_2 = 0$ .

**Пример.** Рассмотрим случай (1.38). В первом приближении для напряженного состояния, связанного фронтом сдвига, имеем для членов рядов (1.35) следующие формулы первого приближения:

$$\begin{aligned} u_m^L &\sim \frac{8}{1-\nu} \frac{1}{s^4} \left[ -\frac{\sin \alpha \xi}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \frac{\sin \beta \xi}{\sin \beta} \right] \\ w_m^L &\sim -\frac{4}{1-\nu} \frac{1}{s^3} \left[ -\frac{2\alpha \cos \alpha \xi}{s^2 \sin \alpha} + \frac{\cos \beta \xi}{\beta \sin \beta} \right] \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11m}^L &\sim \frac{4}{1-\nu} \frac{1}{s^3} \left[ \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{\sin \alpha \xi}{\sin \alpha} - \frac{\sin \beta \xi}{\sin \beta} \right] \\ \sigma_{13m}^L &\sim \frac{8}{1-\nu} \frac{1}{s^2} \left[ -\frac{\alpha \cos \alpha \xi}{s^2 \sin \alpha} + \frac{\cos \beta \xi}{4\beta \sin \beta} \right] \\ \sigma_{33m}^L &\sim -\frac{4}{1-\nu} \frac{1}{s^3} \left[ -\frac{\sin \alpha \xi}{\sin \alpha} + \frac{\sin \beta \xi}{\sin \beta} \right]. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Из (1.62) видно, что перемещения и напряжения не имеют разрывов на фронте  $\tau_2 = 0$ ; из первых производных разрывным является только  $\partial_1 \sigma_{13}$ .

**Замечание 1.** Поскольку в (1.42), (1.59) вторые члены являются отрицательными, то напряженные состояния, связанные фронтами  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = 0$ , аналогичны в том смысле, что напряженные состояния за ними выражаются через бесселевы функции  $J_j$ .

**Замечание 2.** Разрывные на фронте  $\tau_2 = 0$  величины могут быть представлены в виде ряда Фурье по функциям  $\sin(m - \frac{1}{2})\pi\xi$  или  $\cos(m - \frac{1}{2})\pi\xi$ . При этом члены  $m = 1, 2, 3, 4, \dots$  определяют соответственно вклады мод  $j = 3, 5, 7, 8, \dots$ .

**Замечание 3.** При построении разрывов на основных фронтах  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = 0$  остался неиспользованным первый корень  $\lambda_1$  уравнения Релея-Лэмба, который на мнимой оси  $s = i\omega$  при  $\omega \rightarrow \infty$  приближается к пределу  $\lambda_1 \rightarrow -i\omega k_R$  (здесь  $k_R = c_R/c_2$ ,  $c_R$  — скорость распространения поверхностных волн Релея). Корень  $\lambda_1$  связан с условным фронтом  $\tau_R = \tau - \xi/k_R = 0$  поверхностных волн. Одна формула аппроксимации  $\lambda_1$  при больших  $\omega$  дана в [1].

**Замечание 4.** Поскольку в районах фронтов  $\tau_2 = 0$ ,  $\tau_R = 0$  при достаточно больших  $\tau$  напряженное состояние имеет тенденцию распадаться в быстро и медленно изменяющиеся компоненты, то представлял бы интерес их раздельное построение. Это, по-видимому, может быть достигнуто подбором контура интегрирования (при обращении контурных интегралов) таким образом, что медленно изменяющиеся части напряженного состояния оказывается возможным вычислить методом перевала, а быстроизменяющиеся части — аппроксимацией изображений при  $s \rightarrow \infty$ .

**Замечание 5.** Изложенный метод позволяет охарактеризовать быстроизменяющиеся компоненты напряженного состояния, но полученные результаты (за исключением разрывов на основных фронтах  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 = 0$ ) являются принципиально приближенными, ибо область применимости выражений типа (1.42), (1.44), (1.59), (1.60) фактически ограничена. Принципиально точные (имеющие лишь вычислительную погрешность) результаты могут быть получены построением всех элементарных волн методом Каньяра, если провести интегрирование на комплексной плоскости



численно. Правда, решение прикладных задач таким путем едва ли является возможным на существующих вычислительных машинах; кроме того, возникает вопрос, в какой степени оправданы такие точные расчеты при применении идеализированной модели (системы уравнений и краевых условий), не учитывающей такие физические явления, как внутреннее поглощение энергии, излучение и т. д. Возможно, что в будущем метод Каньяра станет важным средством численного изучения быстроизменяющихся малоамплитудных полей, представляющих, например, интерес в сейсмологии. Однако качественные результаты [9–12], полученные методом Каньяра, заслуживают большого внимания уже в настоящее время.

Пусть речь идет о задачах, при которых нагрузка равномерно распределена по линиям  $\xi=0$ ,  $\xi=1$  и  $\xi=0$ ,  $\xi=-1$  или же задана в виде напряжений  $\sigma_{11}$  или перемещений  $u$ , линейно распределенными по толщине плиты в сечении  $\xi=0$ . Тогда для определенного класса краевых условий, указанных в [1], существует методика построения формальных решений в виде двукратных контурных интегралов. Изображения двукратного интегрального преобразования перемещений могут быть представлены в виде суммы «частного» и «общего» решения уравнений, полученных из (1.5) двукратным интегральным преобразованием. «Частное» решение, как правило, допускает точное обращение и определяет напряженное состояние, которое может иметь разрывы только на основных фронтах  $\tau_1=0$ ,  $\tau_2=0$ . «Общее» решение точному обращению не поддается; оно определяет систему элементарных волн, которые могут быть физически интерпретированы как вызванные источниками, равномерно распределенными по линиям  $\xi=0$ ,  $\xi=1$  и  $\xi=0$ ,  $\xi=-1$ . Месторасположение фронтов этих элементарных волн является лишь функцией от времени, не зависит от рассматриваемой конкретной задачи и может быть установлено лучевым методом. В работе [13] интенсивность фронтов элементарных волн (разрывов) была вычислена для некоторых симметричных задач методом Каньяра с приближенным обращением контурных интегралов методом перевала. Если применить эту методику в случае примера данной статьи, то (используя формальное решение в виде двукратных контурных интегралов, приведенных в [4]) легко установить, что: а) разрывы на фронтах головных волн  $\tau_{1r}^{\pm}=0$  будут иными, чем было установлено при помощи вышеизложенного метода; б) существуют фронты, которые не были обнаружены при применении вышеизложенного метода. Это говорит о том, что описанный выше приближенный метод осуществляет аппроксимацию в некотором усредненном смысле.

Определение интенсивности элементарных волн за их фронтом может быть осуществлено численным интегрированием по контуру Каньяра. Однако автору известен лишь один пример [20] реализации этой идеи, который относится к весьма частному случаю  $c_1=c_2$ .

**5. О методе перевала для построения асимптотического при  $t \rightarrow \infty$  решения.** Рассмотрим точки, находящиеся достаточно далеко от первого фронта  $\tau_1=0$ . За исключением, быть может, непосредственной близости фронтов  $\tau_2=0$ ,  $\tau_R=0$ , здесь доминирует при  $\tau \gg 1$  сравнительно медленно изменяющееся напряженное состояние, которое может быть приближенно построено методом перевала с учетом вклада седловых точек, находящихся на мнимой оси  $s=i\omega$  и определяющих на лучах  $\xi/\tau=\psi=\text{const}$  неэкспоненциально затухающие волны. Эти седловые точки определяются из условия

$$\tau + \xi \frac{d\lambda_j}{ds} = 0, \quad (1.63)$$

откуда следует

$$\xi/\tau = \psi = - \left( \frac{d\lambda_j}{ds} \right)^{-1}. \quad (1.64)$$



Применению метода перевала (метод 5 на рис. 1) посвящено несколько работ, указанных в [1]. В работе [4] этот метод был применен в случае задачи, рассмотренной в данной статье другими методами. Результаты работы [4], полученные с учетом вклада седловых точек шести первых мод, будут использованы в § 3.

## § 2. О методах применения теории типа Тимошенко и Кирхгоффа

1. О применении теории типа Тимошенко. Дополнительно к обозначениям, введенным в п. 1 § 1, примем следующие:  $k_T^2$  — коэффициент сдвига,  $c_\Pi$ ,  $c_T$  — скорости распространения первого и второго фронта в теории типа Тимошенко для плоской деформации плиты. При этом

$$c_\Pi = c_2 k_\Pi^{-1}, \quad c_T = c_2 k_T, \quad k_\Pi = \sqrt{\frac{1-\nu}{2}}. \quad (2.1)$$

Коэффициент сдвига  $k_T^2$  может быть подобран в теории типа Тимошенко по различным соображениям; в примерах данной статьи он выбран на основе условия  $c_T = c_R$ , который при  $\nu = 0,3$  дает  $k_T^2 = k_R^2 = 0,860$ . Отметим еще, что при  $\nu = 0,3$   $k = \sqrt{\frac{2}{7}}$ ,  $k_\Pi = \sqrt{\frac{7}{20}}$ . Следовательно, первый фронт движется по теории типа Тимошенко в  $k/k_\Pi = \sqrt{\frac{40}{49}} \approx \frac{19}{21}$  раза медленнее, чем в трехмерной теории упругости.

Теория типа Тимошенко приводит к интегрированию уравнения

$$-\frac{1}{2} \partial_\tau^2 \Psi - \frac{1}{3(1-\nu)} \left( \partial_1^2 - \frac{1-\nu}{2} \partial_\tau^2 \right) \left( \partial_1^2 - \frac{1}{k_T^2} \partial_\tau^2 \right) \Psi = 0. \quad (2.2)$$

Расчетные в теории типа Тимошенко величины  $u_1$ ,  $W$ ,  $M$ ,  $Q$  (см. § 1, п. 1) выражаются через разрешающую функцию  $\Psi$  по формулам

$$u_1 = -\partial_1 \Psi, \quad W = \left[ 1 - \frac{2}{3(1-\nu)k_T^2} \left( \partial_1^2 - \frac{1-\nu}{2} \partial_\tau^2 \right) \right] \Psi$$

$$M = -\frac{2}{3(1-\nu)} \partial_1^2 \Psi, \quad Q = k_T^2 \partial_1 (W - \Psi). \quad (2.3)$$

Вопрос вычисления напряжений по  $M$ ,  $Q$  в теории типа Тимошенко, вообще говоря, остается открытым. Однако при сопоставлении трехмерной теории и теории типа Тимошенко условно предполагаем, что имеет место линейное распределение  $\sigma_{11}$  по толщине плиты и определим безразмерные краевые напряжения по формуле

$$\sigma_{11}^1 = \frac{2}{3} M. \quad (2.4)$$

Отметим, что краевые условия примера данной статьи (см. § 1, п. 1) приобретают в теории типа Тимошенко следующий вид:



$$\begin{aligned} \text{при } \xi = 0: \quad M &= \frac{2}{3(1-\nu)} H(\tau), \quad W = 0; \\ \text{при } \xi = \frac{L}{h} \Rightarrow \xi_0: \quad M &= 0, \quad W = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В численном примере принято  $\xi_0 = 30$ .

Основные методы интегрирования уравнения (2.2) указаны на рис. 1 и списаны в [1]. Сравнительно малым объемом подготовительной работы и широкой областью применимости особо выделяются: а) метод сеток с предварительным выделением частных решений, переносящих разрывы, который был предложен и применен в [15]; б) метод перевала для вычисления асимптотического при  $t \rightarrow \infty$  приближения контурных интегралов формального решения, полученного при помощи преобразования Лапласа. Этот метод, по-видимому, впервые применялся в работе [13] и был использован также в [4].

При сопоставлении методов и анализе точности теории Тимошенко в § 3 будут использованы результаты работ [4, 15], полученные вышеуказанными двумя методами. Это, конечно, никак не уменьшает значения других методов (см. схему на рис. 1), особенно энергетического метода [16-18], при котором аппроксимируют изменение напряженного состояния по  $\xi$ .

Остановимся еще коротко на прифронтных полях, построенных по теории типа Тимошенко.

Изображение Лапласа для полубесконечной плиты при краевых условиях (2.5) может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} u_1^L &= \frac{1}{2s} \left\{ [1 - G(s)] \lambda_1^{-1} e^{\lambda_1 \xi} + [1 + G(s)] \lambda_2^{-1} e^{\lambda_2 \xi} \right\} \\ W^L &= \frac{-G(s)}{s^3 \left( \frac{1}{k_T^2} - \frac{1-\nu}{2} \right)} (e^{\lambda_1 \xi} - e^{\lambda_2 \xi}) \\ M^L &= \frac{1}{3(1-\nu)s} \left\{ [1 - G(s)] e^{\lambda_1 \xi} + [1 + G(s)] e^{\lambda_2 \xi} \right\} \\ Q^L &= \frac{-G(s)}{s \left( \frac{1}{k_T^2} - \frac{1-\nu}{2} \right)} (\lambda_1^{-1} e^{\lambda_1 \xi} - \lambda_2^{-1} e^{\lambda_2 \xi}), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\text{где} \quad G(s) = \left( 1 - \frac{1}{s^2 H^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad H^2 = \frac{\left( \frac{1}{k_T^2} - \frac{1-\nu}{2} \right)^2}{6(1-\nu)} \quad (2.7)$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{s}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{k_T^2} + \frac{1-\nu}{2}} \pm \left( \frac{1}{k_T^2} - \frac{1-\nu}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{s^2 H^2}}. \quad (2.8)$$

При  $s \rightarrow \infty$  имеем:

$$\lambda_1 \sim -\frac{s}{k_T} + \frac{3}{2s} \frac{k_T}{2 - (1-\nu)k_T^2}, \quad \lambda_2 \sim -s \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} - \frac{3}{2s} \frac{\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}}{\frac{1}{k_T^2} - \frac{1-\nu}{2}} \quad (2.9)$$



$$\begin{aligned}
 u_1^L &\sim \frac{1}{s^2} \left[ 0 \left( \frac{1}{s^2} \right) e^{\lambda_1 \xi} - \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} e^{\lambda_2 \xi} \right] \\
 W^L &\sim - \frac{1}{s^3 \left( \frac{1}{k_T^2} - \frac{1-\nu}{2} \right)} (e^{\lambda_1 \xi} - e^{\lambda_2 \xi}) \\
 M^L &\sim \frac{2}{3(1-\nu)} \frac{1}{s} \left[ 0 \left( \frac{1}{s^2} \right) e^{\lambda_1 \xi} + e^{\lambda_2 \xi} \right] \\
 Q^L &\sim - \frac{1}{s^2 \left( \frac{1}{k_T^2} - \frac{1-\nu}{2} \right)} \left[ -k_T e^{\lambda_1 \xi} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1-\nu}{2}}} e^{\lambda_2 \xi} \right].
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь корень  $\lambda_2$  (вторая мода) связан с первым фронтом и корень  $\lambda_1$  (первая мода) — со вторым фронтом решения.

На основе (1.40), (1.41) из (2.10) следует, что

а) на первом фронте  $\tau - k_T \xi = 0$ :  $u_1$ ,  $W$ ,  $\partial_1 W$  равны нулю;  $\partial_1 u_1$ ,  $\partial_1^2 W$ ,  $M$ ,  $\partial_1 Q$  имеют конечные разрывы;

б) на втором фронте  $\tau - k_T^{-1} \xi = 0$ :  $u_1$ ,  $W$ ,  $M$ ,  $Q$  сами неразрывны; конечные разрывы имеют их производные  $\partial_1^2 W$ ,  $\partial_1^3 u_1$ ,  $\partial_1^2 M$ ,  $\partial_1 Q$ ;

в) за первым фронтом искомые величины выражаются через бесселевы функции  $J_r$ ;  $u_1$ ,  $W$ ,  $Q$ , колеблясь, медленно растут при удалении от первого фронта,  $M$  имеем максимальное значение на первом фронте и, колеблясь, убывает при удалении от него;

г) у второго фронта, быстроизменяющаяся часть решения выражается через бесселевы функции  $I_r$  и, следовательно, весьма быстро изменяется по модулю при удалении от этого фронта.

Сопоставляя сказанное с результатами, полученными в п. 4 § 1 на основе теории упругости, видим, что вторая мода теории типа Тимошенко, аппроксимирующая вклад второй моды (или вообще четных мод теории упругости), определяет у первого фронта напряженное состояние, которое в некоторой степени похоже на решение по теории упругости, хотя фронт сам движется с неправильной скоростью\* и колебания за ним более плавные. Разрывов на основном фронте волны сдвига теория типа Тимошенко аппроксимировать, конечно, не может, так как они определяются модами  $j = 3, 5, 7, \dots$ , не рассматриваемыми в теории типа Тимошенко. Первая мода теории типа Тимошенко аппроксимирует (в интервальном смысле) при  $s \rightarrow \infty$  быстроизменяющееся напряженное состояние у условного фронта поверхностных волн Релея.

**2. О применении теории Кирхгофа.** Известно [19], что параболическая теория Кирхгофа дает (метод 7 на рис. 1) для переходного процесса деформации полубесконечной плиты ( $0 \leq \xi \leq \infty$ ) решение, убывающее при  $\xi \rightarrow \infty$  и выражаемое через изученные функции. Для примера, приведенного в данной статье, такое решение может быть представлено в форме

\* При выборе коэффициентов, обеспечивающих правильную скорость движения первого фронта, ухудшается аппроксимация медленно изменяющихся напряженных состояний.

В работе [18] предложена система уравнений четвертого порядка, которая, в отличие от теории Тимошенко, определяет две пары волн, распространяющихся соответственно со скоростями  $c_1$ ,  $c_2$ . Эта модель оправдывает себя в весьма узкой (и сужающейся с ростом  $\tau$ ) области за первым фронтом, но в областях больших перемещений она хуже теории типа Тимошенко.



$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{\tau}{g^2} T_1 - \frac{\xi}{2} u_1, & u_1 &= -\frac{\sqrt{2\tau}}{g\sqrt{\pi}} T_4 - \xi T_2 \\ \sigma_{11}^1 &= -\frac{3}{2} g^{-4} T_2, & Q &= -\frac{1}{g^3 \sqrt{2\pi\tau}} T_3, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где 
$$g = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu)}{2}} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} T_1 &= C(z) - S(z), & T_2 &= C(z) + S(z) - 1 \\ T_3 &= \cos z + \sin z, & T_4 &= \cos z - \sin z \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$z = \frac{g^2 \xi^2 \tau}{4}. \quad (2.14)$$

Здесь  $C(z)$ ,  $S(z)$  интегралы Френеля, численное значение которых удобно взять из таблиц, задавая  $z$ . Поэтому для сопоставления с теорией Тимошенко (при  $\nu = 0,3$ ) в моменты времени, когда первый фронт по теории Тимошенко успел дойти в сечения  $\xi_j = 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$ , были проведены расчеты по следующим видоизмененным формулам:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sqrt{\xi_j}}{g \sqrt{3,5}}, & \xi &= 2R\sqrt{z}, & g &= \sqrt[4]{1,05} \\ \omega_0 &= R^2 T_1 - R u_1 \sqrt{z}, & u_1 &= -R \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_4 + 2\sqrt{z} T_2 \right] \\ \sigma_{11}^1 &= -\frac{3}{2} g^{-4} T_2, & Q &= -\frac{\sqrt[4]{3,5}}{g^3 \sqrt{2\pi\xi_j}} T_3. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При этом  $T_1, T_2, \dots$  были найдены по таблицам, задавая значения  $z$  в диапазоне  $0 \leq z \leq 10,5$ .

При сопоставлении приближенных методов будут использованы также результаты применения метода перевала, взятые из [4].

В § 3 даны также диаграммы сопоставления результатов по схеме бегущих волн с результатами разложения волнового процесса по стоячим волнам (метода Фурье). С точностью теории Кирхгоффа для свободно опертой плиты при краевых условиях (2.5) метод Фурье дает следующее решение:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -\frac{2}{3} H(\tau) \xi_0^2 \left[ -\frac{1}{2} \xi' + \frac{3}{4} (\xi')^2 - \frac{1}{4} (\xi')^3 + \frac{3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \omega_n \tau}{n^3} \sin n \pi \xi' \right] \\ u_1 &= \frac{2}{3} H(\tau) \xi_0 \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \xi' - \frac{3}{4} (\xi')^2 + \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \omega_n \tau}{n^2} \cos n \pi \xi' \right] \\ M &= \frac{4}{3(1-\nu)} H(\tau) \left[ \frac{1-\xi'}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \omega_n \tau}{n} \sin n \pi \xi' \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$



$$Q = \frac{4}{3(1-\nu)\xi_0} H(\tau) \left[ -\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \cos \omega_n \tau \cos n \pi \xi' \right]$$

где

$$\omega_n = \sqrt{\frac{2}{3(1-\nu)}} \frac{n^2 \pi^2}{\xi_0^2}, \quad \xi' = \frac{\xi}{\xi_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \infty. \quad (2.17)$$

### § 3. Сопоставление методов и некоторые выводы

1. **Некоторые численные результаты для полубесконечной плиты.** Представим некоторые результаты для примера, сформулированного в конце первого пункта § 3. На рис. 4—8 показаны результаты, полученные методом трехмерных сеток в моменты времени  $\tau = 84rl_\tau$  ( $r = 1, 2, 3, 4, 5$ ;  $l_\tau = k/38$ ), т. е. в моменты, когда первый фронт находится соответственно в сечениях  $\xi = \frac{x_1}{h} = \frac{42r}{19}$  ( $r = 1, 2, 3, 4, 5$ ). В верхней части каждого рисунка показаны перемещения (искажение сетки), в нижней части — эпюры напряжений в сечениях  $19\xi = 10, 25, 40, 55, 70$ ; данные относятся к верхней половине плиты.

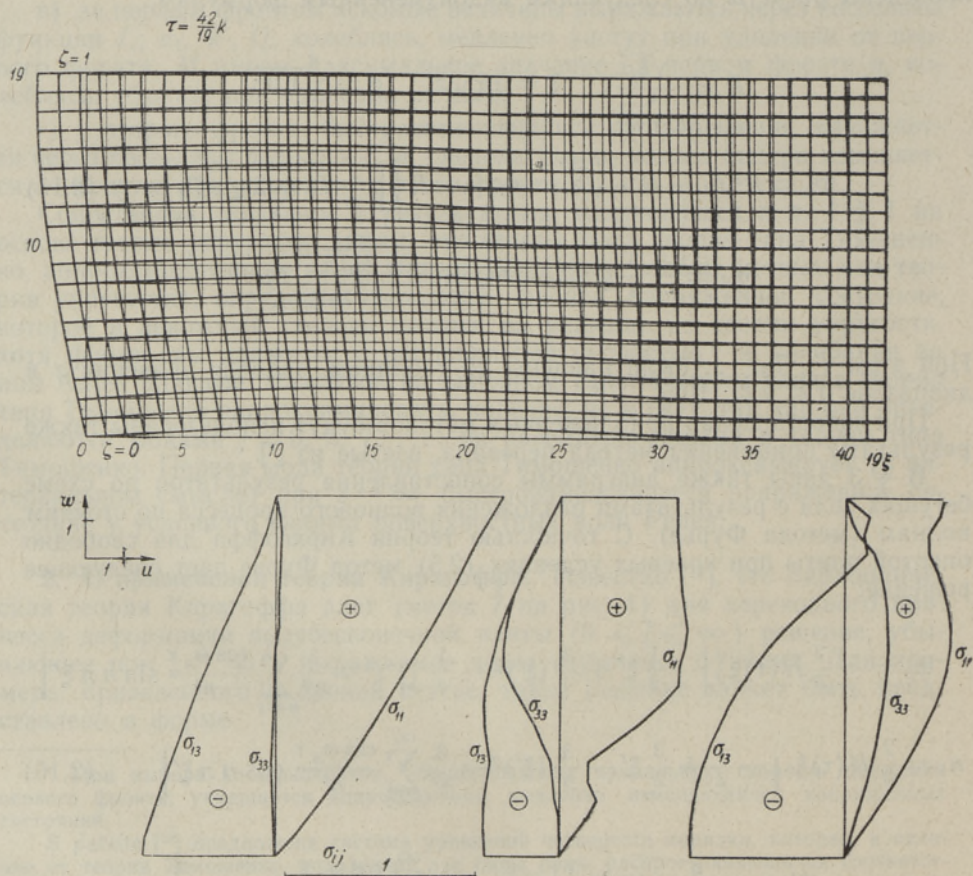


Рис. 4.



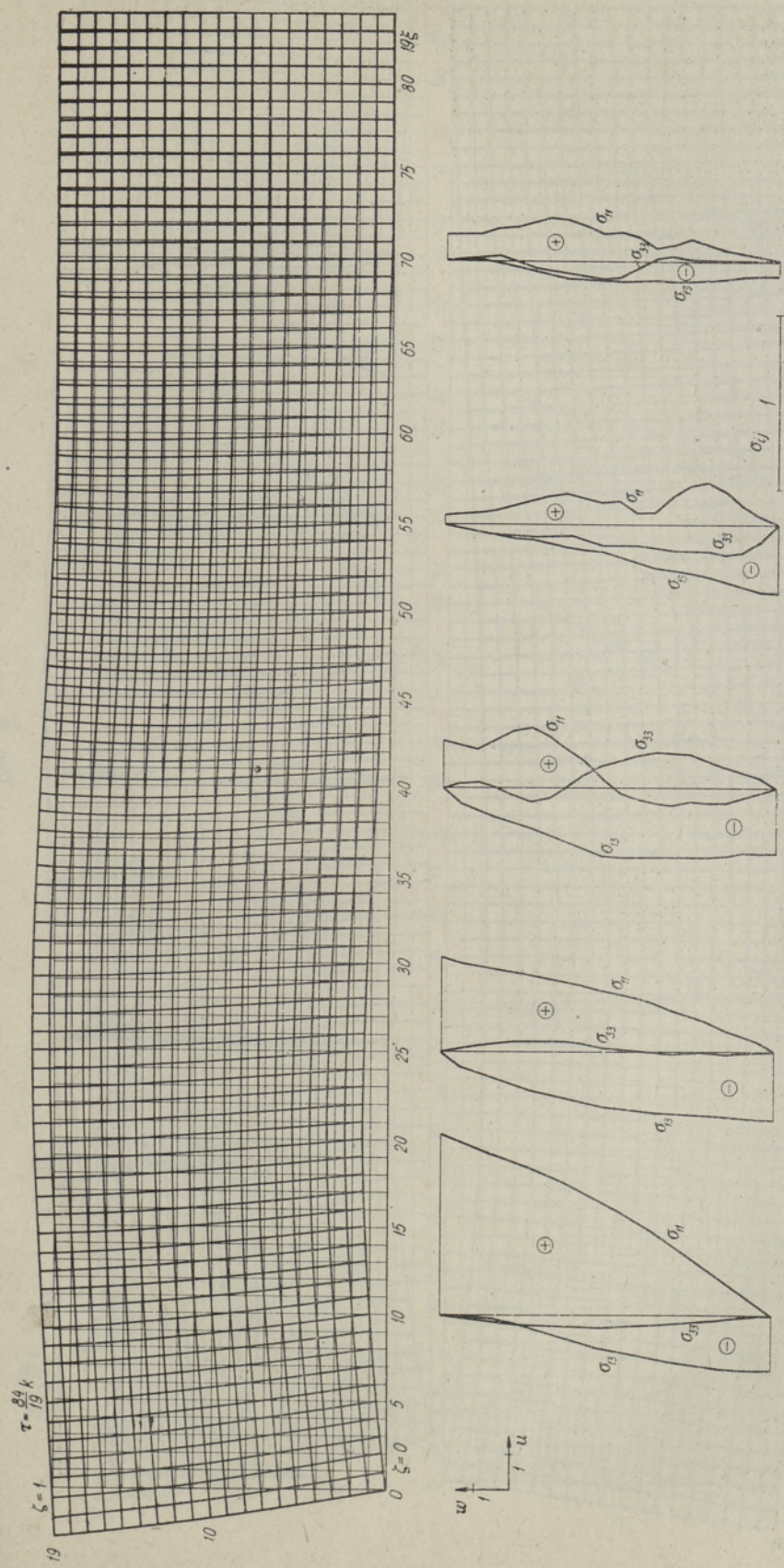


Рис. 5.



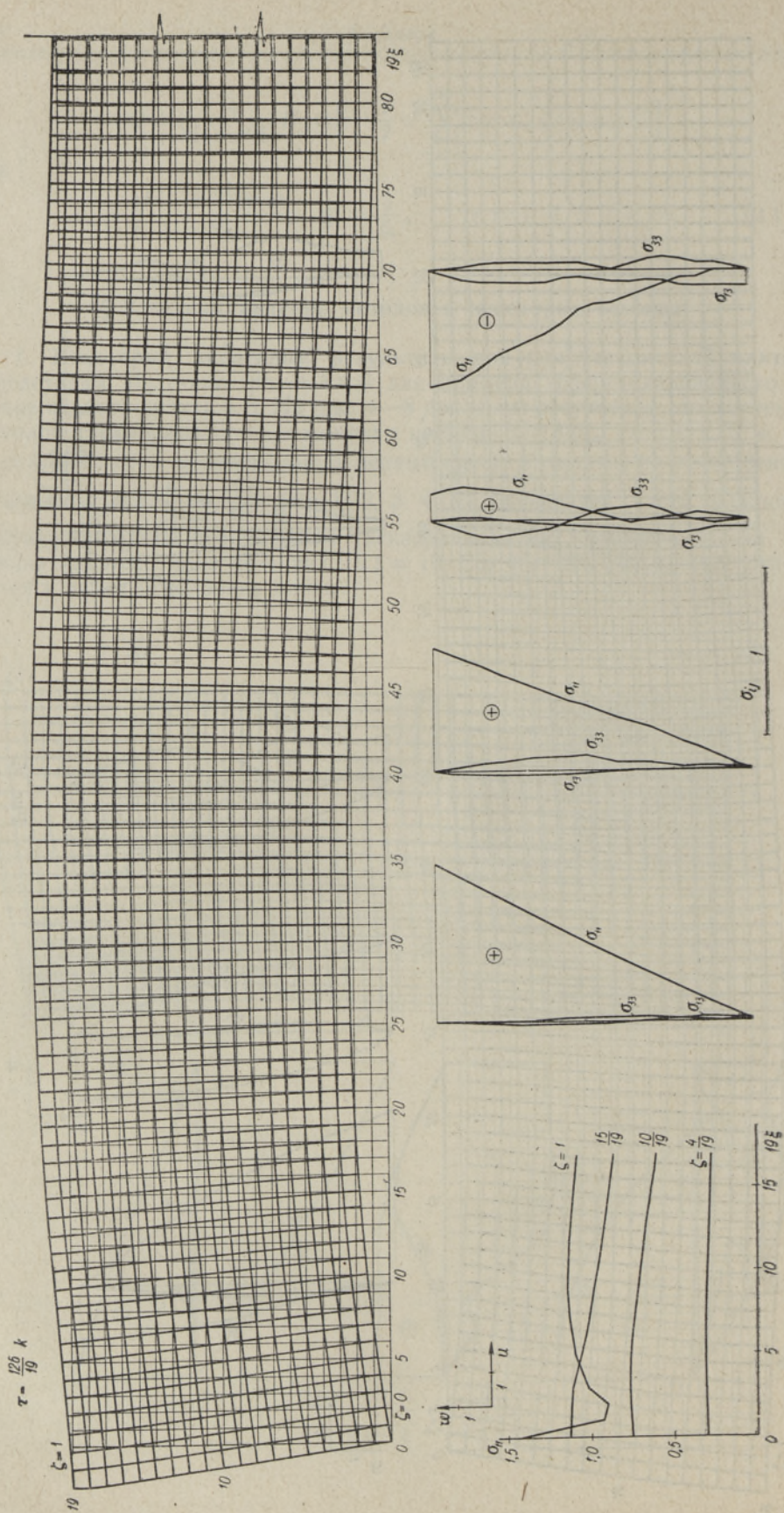


Рис. 6.



$$\nu = \frac{103}{119} k$$

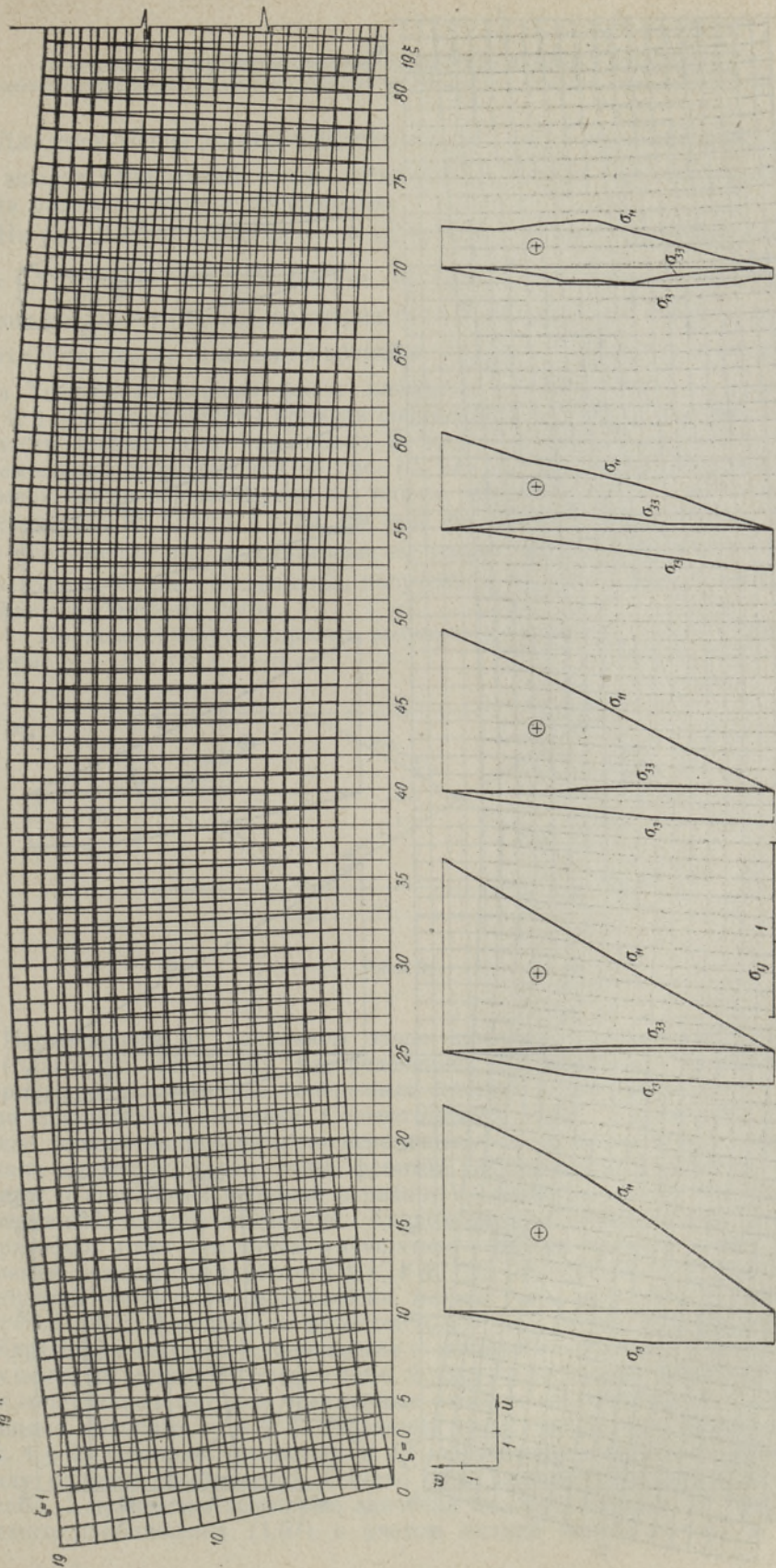


Рис. 7.



$$\tau = \frac{210}{19} k$$

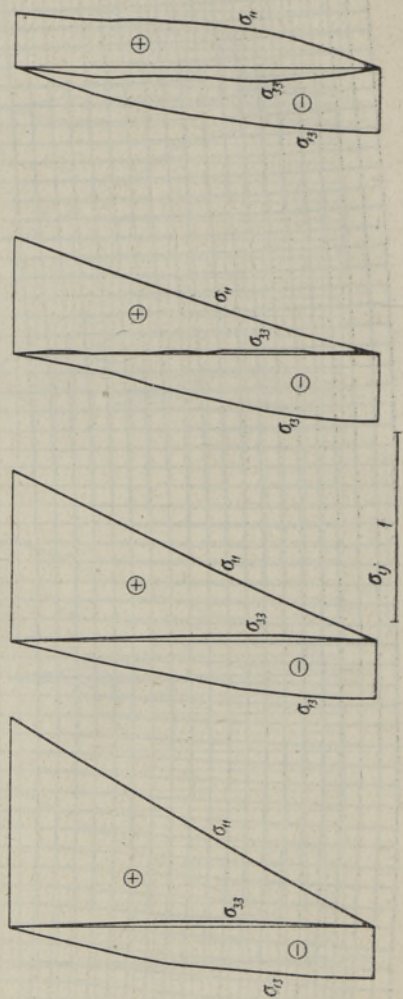
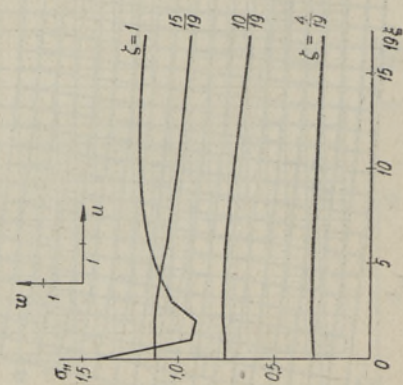
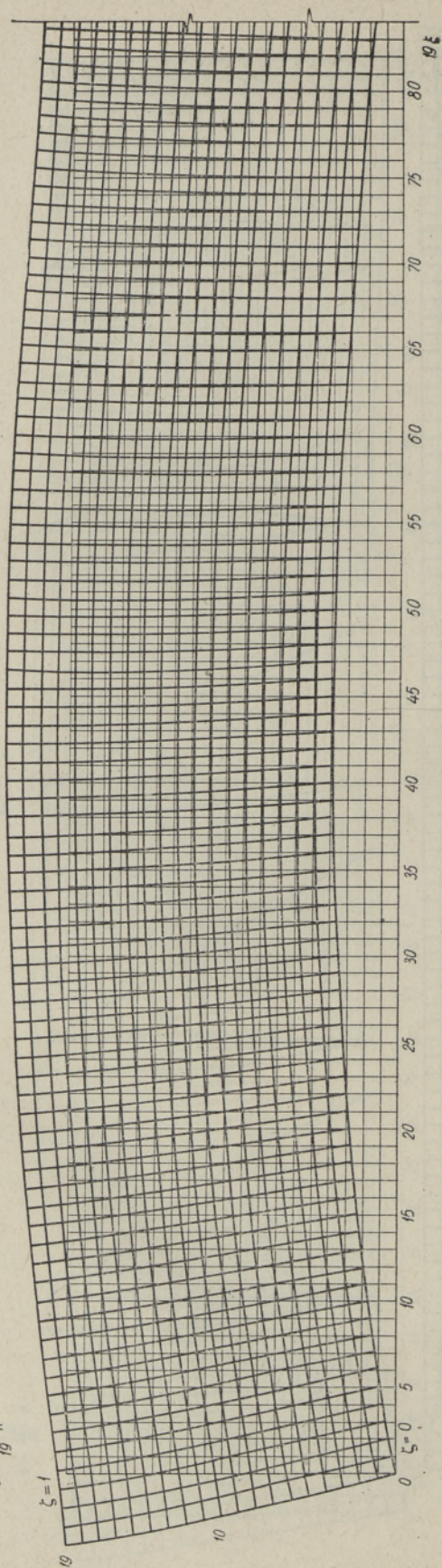


Рис. 8.



Для уменьшения размеров диаграммы рис. 6, 7, 8 отрезаны при  $\xi = \frac{84}{19}$ . На эпюрах напряжений точки соединены прямыми без округления и учета разрывов первых производных.

На рис. 9 дана схема фронтов  $\tau_{1r}^+ = 0$  при наших численных данных ( $\nu = 0,3$ ;  $k = \sqrt{\frac{2}{7}}$ ;  $l = \frac{1}{19}$ ). На рис. 10, 11 сопоставлены перемещения по теории упругости ( $w_0, u_1$ ), по теории типа Тимошенко ( $W, u_1$ ) и по теории Кирхгоффа ( $w_0, u_1$ ) в моменты времени  $\tau = \frac{84}{19}k$ ,  $\tau = \frac{168}{19}k$ , когда по теории типа Тимошенко первый фронт находится соответственно в сечениях  $\xi = 4$ ,  $\xi = 8$  (эти моменты времени совпадают с таковыми для рис. 5, 7). В части теории типа Тимошенко и теории Кирхгоффа сопоставление перемещений продолжается на рис. 12, 13, 14, где изображены моменты времени, когда первый фронт по теории типа Тимошенко находится в сечениях  $\xi = 12$ ,  $\xi = 16$ ,  $\xi = 20$ . На этих же рисунках сопоставлены крайние напряжения  $\sigma_{11}^1$ , подсчитанные по теории типа Тимошенко и теории Кирхгоффа. На рис. 15 даны  $\sigma_{11}^1$ , полученные на основе теории упругости методом трехмерных сеток.

Прокомментируем коротко результаты расчетов, иллюстрированные рис. 4—15 и табл. 2—5.

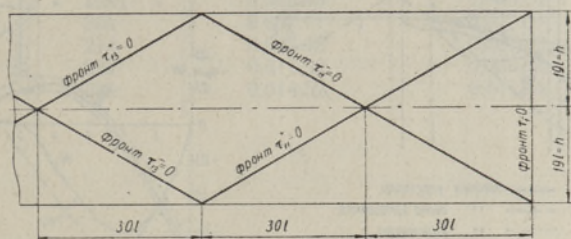


Рис. 9.

Перемещения на начальном этапе движения сравнительно малы, и (благодаря линейному распределению приложенных напряжений) искривление и искажение поперечных сечений в рассматриваемом примере сравнительно невелики. Соответственно этому теория типа Тимошенко хорошо аппроксимирует перемещения за фронтом  $\tau_2 = 0$  с самого начала движения; перед этим фронтом аппроксимация быстро ухудшается и становится негодной в районе за фронтом  $\tau_1 = 0$ , где, однако, перемещения совсем маленькие. Аппроксимация перемещений теорией Кирхгоффа имеет тенденцию улучшаться с ростом времени и дает приемлемые результаты в области  $\xi \leq K_1\tau$ , где величина  $K_1 < 1$  зависит от требуемой точности, но практически может быть подобрана в пределах  $K_1 = 0,5 - 0,7$ . В районе за фронтом  $\tau_1 = 0$ , где теории типа Тимошенко и Кирхгоффа негодны, перемещения в масштабе представленных рисунков почти не видны. Поэтому в табл. 2 дана иллюстрация численных данных, полученных методом трехмерных сеток и согласующихся с качественными выводами п. 4 § 2. Численный расчет по методу, изложенному в п. 4 § 2, довольно трудоемок и не представляет большого интереса ввиду малости перемещений. Однако для взаимной проверки методов в табл. 3 приведены некоторые значения  $w_0$ , вычисленные по формуле первого приближения (1.57) с учетом вклада одной ( $n = 1$ ) и двух



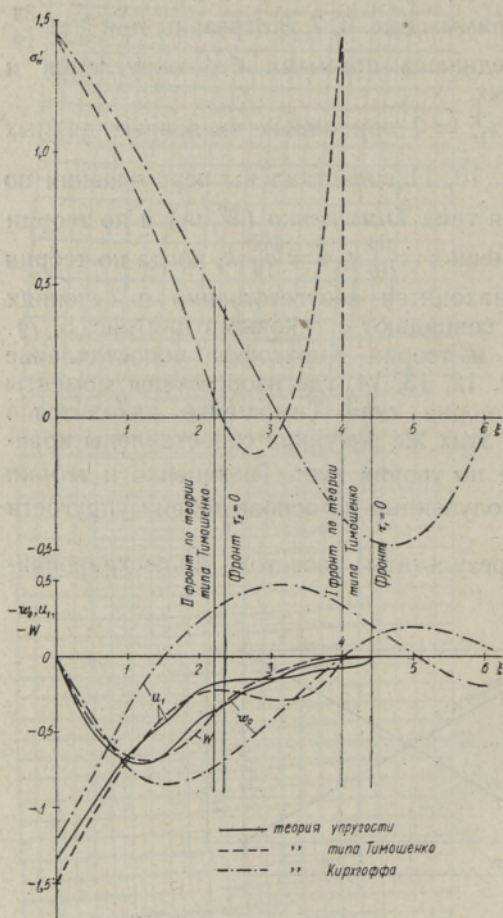


Рис. 10.

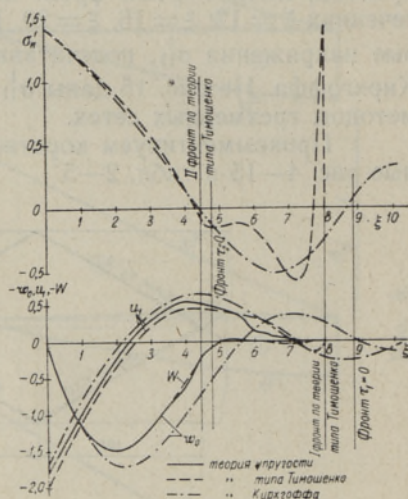


Рис. 11.

( $n=1,2$ ) мод. Поскольку такое аналитическое приближение является весьма грубым и, с другой стороны, метод трехмерных сеток в рассматриваемой области сравнительно малоточен (в связи с малостью перемещений), то некоторое различие в результатах (см. табл. 3) естественно. По мере удаления от фронта  $\tau_1=0$  приходилось бы в расчете по аналитическим формулам учитывать все большее количество мод и применять формулы следующих приближений.

Напряжения имеют на начальном этапе движения такой же порядок величины, как и в дальнейших стадиях деформации. Аппроксимация напряжений при помощи приближенных теорий типа Тимошенко и Кирхгоффа вообще (а в самом начале движения особенно) хуже, чем аппроксимация перемещений. Это в существенной мере связано с разрывами на фронтах  $\tau_1=0$ ,  $\tau_{1r}^+=0$ .

У фронта  $\tau_1=0$  имеется пик напряжений  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{33}$ , который с ростом  $\tau$  становится все более узким. Как видно из формулы (1.58), разрыв (и вообще пик) у фронта  $\tau_1=0$  образуется в основном первыми четными модами ( $j=2, 4, 6, \dots$ ); с ростом  $\tau_1$  быстро растет относительное значение следующих четных мод, но напряжения по модулю уменьшаются.



Таблица 2

Значения  $\omega_0$ ,  $\omega_1$ ,  $u_1$  вблизи первого фронта при  $\tau = \frac{168k}{19}$ 

$19\xi$	$19\tau_1$	$\omega_0$	$\omega_1$	$u_1$
168	0	0	0	0
167	$k$	0,000.59	-0,008.96	-0,035.76
166	$2k$	0,002.36	-0,010.55	-0,046.39
165	$3k$	0,004.63	-0,009.97	-0,044.40
164	$4k$	0,006.55	-0,006.13	-0,036.41
163	$5k$	0,007.47	-0,002.94	-0,028.44
162	$6k$	0,007.06	0,000.39	-0,021.14
161	$7k$	0,005.61	0,003.14	-0,015.49
160	$8k$	0,004.04	0,004.50	-0,011.98
159	$9k$	0,003.52	0,005.22	-0,010.82
158	$10k$	0,004.76	0,004.88	-0,011.61
157	$11k$	0,007.22	0,003.62	-0,013.81
156	$12k$	0,009.31	0,002.41	-0,016.82
155	$13k$	0,009.63	0,001.44	-0,018.90
154	$14k$	0,008.43	0,001.41	-0,019.03
153	$15k$	0,007.46	0,002.63	-0,017.23
152	$16k$	0,008.36	0,004.30	-0,013.90
151	$17k$	0,010.68	0,005.88	-0,011.04
150	$18k$	0,011.86	0,006.78	-0,010.06
149	$19k$	0,009.98	0,006.84	-0,010.45
148	$20k$	0,007.11	0,007.00	-0,011.10
147	$21k$	0,007.48	0,007.93	-0,010.14
146	$22k$	0,011.32	0,009.65	-0,006.95
145	$23k$	0,014.52	0,011.64	-0,003.49

Таблица 3

Значения  $\omega_0$  вблизи первого фронта

$\tau$	$\xi$	$\tau_1$	По формуле (1.57)		По методу трехмерных сеток
			с учетом члена $n = 1$	с учетом членов $n = 1, n = 2$	
$\frac{84k}{19}$	$\frac{84}{19}$	0	0	0	0
	$\frac{83}{19}$	$\frac{k}{19}$	0,0015	0,0012	0,0008
	$\frac{82}{19}$	$\frac{2k}{19}$	0,0039	0,0034	0,0033
	$\frac{81}{19}$	$\frac{3k}{19}$	0,0054	0,0062	0,0070
$\frac{168k}{19}$	$\frac{168}{19}$	0	0	0	0
	$\frac{167}{19}$	$\frac{k}{19}$	0,00096	0,00084	0,00059
	$\frac{166}{19}$	$\frac{2k}{19}$	0,0012	0,0012	0,0024



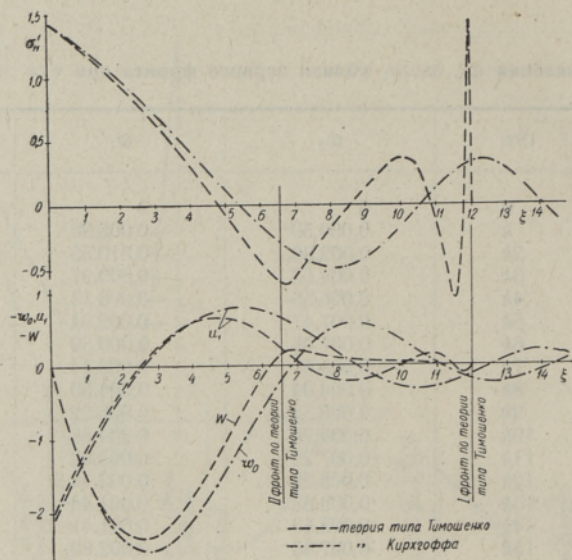


Рис. 12.

Теория Кирхгоффа указанного пика не аппроксимирует. Теория типа Тимошенко определяет его с погрешностью как в смысле месторасположения, так и в смысле формы.

На напряженное состояние в районе за фронтом  $\tau_1 = 0$  оказывают существенное влияние первые из фронтов  $\tau_{1r}^+ = 0$  (см. рис. 9), где

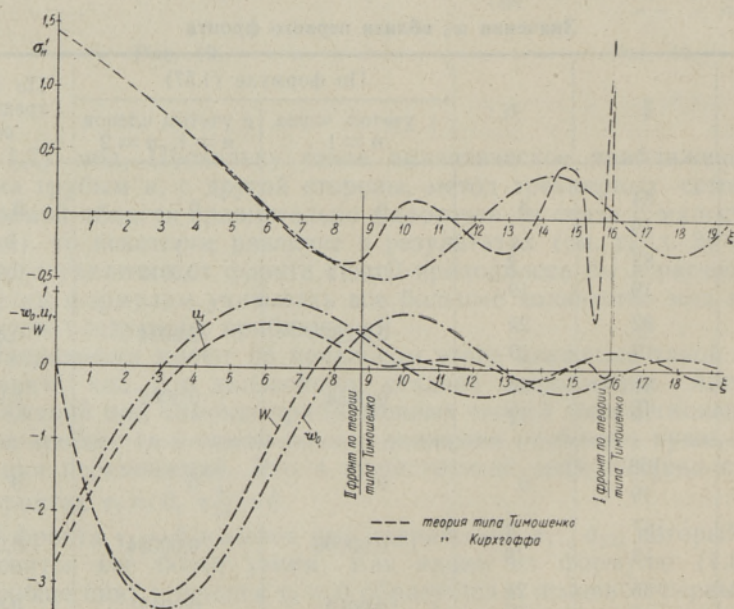


Рис. 13.



Таблица 4

Значения  $\sigma_{11}$  вблизи первого фронта при  $\tau = \frac{168k}{19}$

$\xi$	161/19	162/19	163/19	164/19	165/19	166/19	167/19	168/19
1	-0,1243	-0,1757	-0,2072	-0,2165	-0,1355	0,1172	0,6296	1,4286
18/19	-0,1287	-0,1789	-0,2068	-0,2018	-0,1391	0,1387	0,6722	1,3534
17/19	-0,1027	-0,1470	-0,1547	-0,1390	-0,1319	0,0797	0,6234	1,2782
16/19	-0,0743	-0,0678	-0,0460	-0,1758	-0,2344	0,0584	0,6010	1,2030
15/19	+0,0179	+0,0604	-0,0894	-0,3107	-0,2745	0,0773	0,5870	1,1279
14/19	+0,1351	+0,0303	-0,2199	-0,3711	-0,2540	0,0988	0,5640	1,0527
13/19	+0,1181	-0,0577	-0,2804	-0,3715	-0,2266	0,1107	0,5354	0,9775
12/19	+0,0897	-0,0882	-0,3007	-0,3634	-0,2030	0,1172	0,5036	0,9023
11/19	+0,1092	-0,1093	-0,3190	-0,3499	-0,1789	0,1200	0,4690	0,8271
10/19	+0,1084	-0,1421	-0,3265	-0,3276	-0,1553	0,1192	0,4322	0,7519
9/19	+0,0813	-0,1661	-0,3192	-0,3001	-0,1335	0,1152	0,3935	0,6767
8/19	+0,0548	-0,1762	-0,3019	-0,2700	-0,1135	0,1085	0,3532	0,6015
7/19	+0,0338	-0,1765	-0,2774	-0,2380	-0,0952	0,0996	0,3117	0,5263
6/19	+0,0160	-0,1681	-0,2469	-0,2050	-0,0785	0,0888	0,2690	0,4511
5/19	+0,0030	-0,1518	-0,2118	-0,1712	-0,0632	0,0763	0,2255	0,3760
4/19	-0,0048	-0,1289	-0,1732	-0,1372	-0,0491	0,0626	0,1812	0,3008
3/19	-0,0079	-0,1010	-0,1320	-0,1030	-0,0360	0,0478	0,1364	0,2256
2/19	-0,0074	-0,0694	-0,0890	-0,0687	-0,0236	0,0323	0,0912	0,1504
1/19	-0,0043	-0,0353	-0,0448	-0,0343	-0,0117	0,0163	0,0456	0,0752

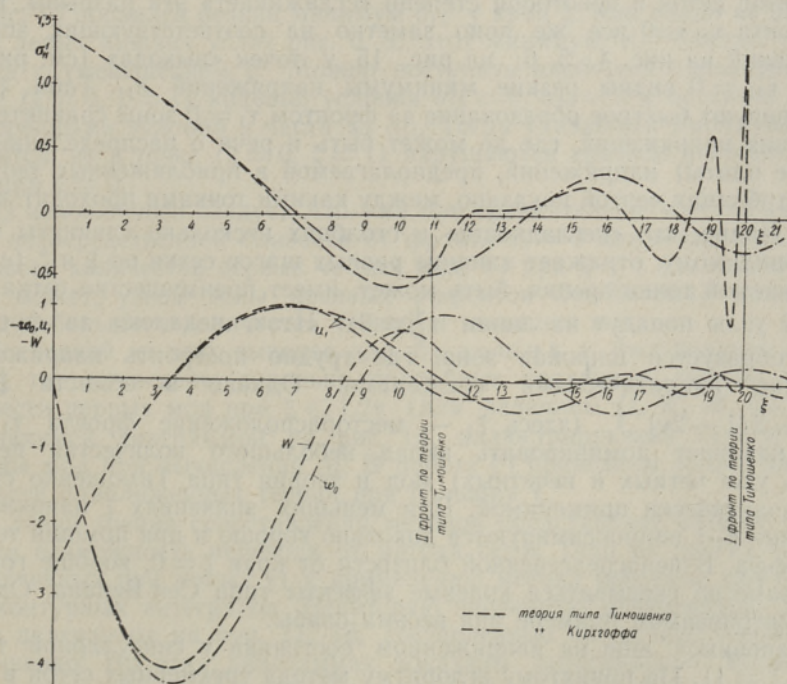


Рис. 14.



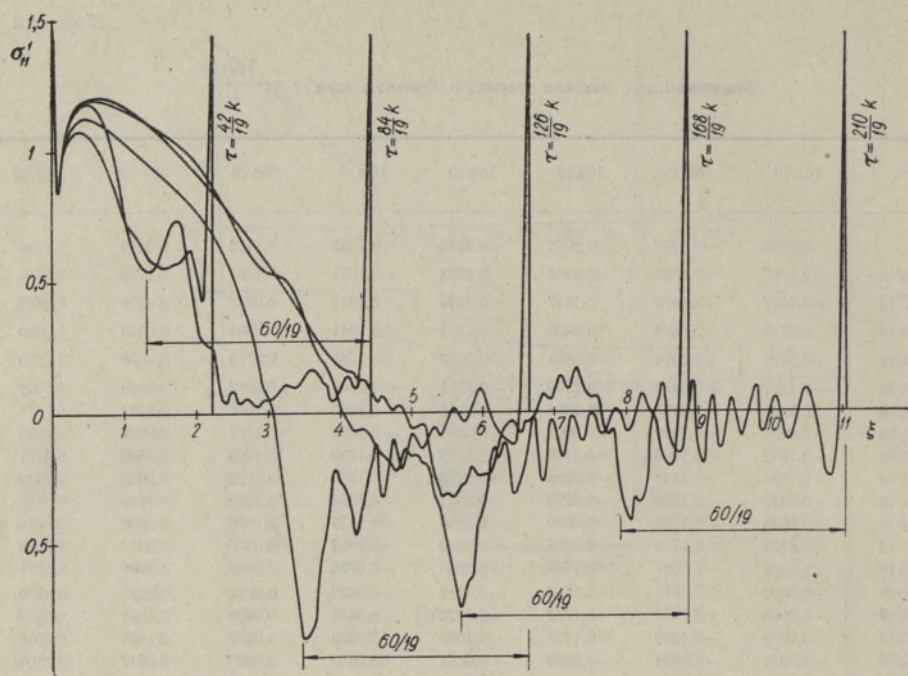


Рис. 15.

претерпевают разрывы первые производные от напряжений (см. § 2, п. 4). Хотя метод сеток в некоторой степени «сглаживает» эти разрывы, влияние фронта  $\tau_{11} = 0$  все же явно заметно на соответствующих эпюрах напряжений на рис. 4, 5, 6; на рис. 15 у точек «выхода» (см. рис. 9) фронта  $\tau_{11} = 0$  видны резкие минимумы напряжений  $\sigma_{11}$ . Табл. 4 и 5 иллюстрируют быстрое образование за фронтом  $\tau_1 = 0$  зоны сравнительно небольших напряжений, где не может быть и речи о распределении (по толщине плиты) напряжений, предполагаемой в приближенных теориях. В этих таблицах чертой показано, между какими точками проходит линия  $\tau_{11}^+ = 0$ . Видно, что «негладкости» в столбцах несколько сдвинуты вниз, что, по-видимому, отражает влияние равных шагов сетки по  $\xi$  и  $\zeta$  (с рассматриваемой точки зрения, быть может, имеет преимущество сетка, при которой узлы попадут на линии  $\tau_{11}^+ = 0$ ). Итак, недалеко за фронтом  $\tau_1 = 0$  образуется широкая зона, где трудно построить напряженное состояние аналитическими средствами. Однако в области  $\xi < \tau$ ,  $\xi < \xi_1 - 2(1 - 2\nu)^{-\frac{1}{2}}$  (здесь  $\xi_1$  — месторасположение фронта  $\tau_1 = 0$ ) снова начинает доминировать вклад небольшого количества первых (теперь уже четных и нечетных) мод и теория типа Тимошенко становится практически применимой. При меньших значениях  $\xi$  напряжения (особенно  $\sigma_{11}$ ) аппроксимируются довольно хорошо и при помощи теории Кирхгофа. В непосредственной близости от края  $\xi = 0$ , вообще говоря, могут заметно сказываться краевые эффекты типа Сен-Венана. Однако в рассматриваемом примере они весьма слабы.

Остановимся еще на напряженном состоянии у сингулярной точки ( $\xi = 0, \zeta = 1$ ). По принятому алгоритму метода трехмерных сеток в этой точке удовлетворяются условия  $\omega = 0$ ,  $\sigma_{11} = \zeta(1 - \nu)^{-1}H(\tau)$ , но остаются



Таблица 5

Значения  $\sigma_{13}$  вблизи первого фронта при  $\tau = \frac{168k}{19}$ 

$\xi$	$\xi$	161/19	162/19	163/19	164/19	165/19	166/19	167/19	168/19
1		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
18/19		+0,0002	-0,0111	-0,0190	-0,0313	-0,0316	+0,0000	+0,0019	0,0000
17/19		-0,0062	-0,0171	-0,0468	-0,0562	-0,0259	-0,0121	-0,0128	0,0000
16/19		-0,0133	-0,0462	-0,0739	-0,0494	-0,0126	-0,0100	-0,0146	0,0000
15/19		-0,0365	-0,0749	-0,0670	-0,0229	-0,0036	-0,0130	-0,0160	0,0000
14/19		-0,0589	-0,0706	-0,0376	-0,0056	-0,0058	-0,0191	-0,0187	0,0000
13/19		-0,0554	-0,0466	-0,0171	-0,0031	-0,0124	-0,0245	-0,0208	0,0000
12/19		-0,0410	-0,0297	-0,0096	-0,0060	-0,0185	-0,0286	-0,0223	0,0000
11/19		-0,0335	-0,0206	-0,0063	-0,0093	-0,0235	-0,0319	-0,0236	0,0000
10/19		-0,0277	-0,0123	-0,0040	-0,0127	-0,0279	-0,0346	-0,0246	0,0000
9/19		-0,0187	-0,0046	-0,0032	-0,0162	-0,0318	-0,0369	-0,0254	0,0000
8/19		-0,0087	+0,0012	-0,0035	-0,0196	-0,0351	-0,0389	-0,0261	0,0000
7/19		-0,0001	+0,0053	-0,0044	-0,0227	-0,0379	-0,0405	-0,0267	0,0000
6/19		+0,0072	+0,0084	-0,0055	-0,0255	-0,0403	-0,0418	-0,0272	0,0000
5/19		+0,0133	-0,0105	-0,0066	-0,0278	-0,0422	-0,0429	-0,0276	0,0000
4/19		+0,0182	+0,0120	-0,0077	-0,0297	-0,0438	-0,0438	-0,0279	0,0000
3/19		+0,0219	-0,0131	-0,0086	-0,0312	-0,0450	-0,0444	-0,0282	0,0000
2/19		+0,0245	+0,0137	-0,0093	-0,0323	-0,0459	-0,0449	-0,0283	0,0000
1/19		+0,0260	+0,0141	-0,0097	-0,0329	-0,0464	-0,0452	-0,0284	0,0000

ся неудовлетворенными краевые условия  $\sigma_{13} = 0$ ,  $\sigma_{33} = 0$ . В связи с этим на рис. 15 появился резкий минимум  $\sigma_{11}^1$  у края  $\xi$ . Как видно из диаграммы в левых нижних углах рис. 6, 8, этот минимум  $\sigma_{11}^1$  быстро расплывается с уменьшением  $\xi$ . Можно поступить наоборот: удовлетворить в точке ( $\xi = 0$ ,  $\zeta = 1$ ) краевые условия  $\sigma_{13} = 0$ ,  $\sigma_{33} = 0$  и оставить неудовлетворенными условия в части  $\omega$ ,  $\sigma_{11}$ . Тогда указанный минимум  $\sigma_{11}^1$  не появится, но в точке ( $\xi = 0$ ,  $\zeta = 1$ ) нарушаются краевые условия, заданные при  $\xi = 0$ .

Из изложенного следует, что уже при сравнительно небольших  $\tau$ : а) в непосредственной близости от фронта  $\tau_1 = 0$  доминирует вклад небольшого количества первых четных мод; б) при  $\xi < \tau$  (за исключением, быть может, узкой зоны краевых эффектов Сен-Венана) доминирует вклад небольшого количества четных и нечетных мод.

Последний из этих выводов для больших  $\tau$  был получен в работе [4], где приведены довольно подробные численные данные о вкладе шести первых мод при  $\xi \leq 1,2\tau$  (для величины  $U$ ,  $W$ ,  $M$ ,  $Q$ ). Здесь ограничимся диаграммой на рис. 16, иллюстрирующей относительные вклады мод при вычислении  $M$ . В работе [4] приведены также данные о точности приближенных теорий при больших  $\tau$ .

С точки зрения сопоставления методов представляет интерес практическая возможность перехода от метода сеток (или от других методов, эффективных при малых  $\tau$ ) к применению метода перевала для обращения контурных интегралов. Некоторую численную информацию об этом дают диаграммы на рис. 17, 18, составленные на основе теории типа Тимошенко. На этих диаграммах показаны интегральные нормальные перемещения  $W$ , вычисленные методом сеток и по формулам первого приближения метода перевала для лучей  $\xi = 0,7\tau$ ,  $\xi = 0,9\tau$ .



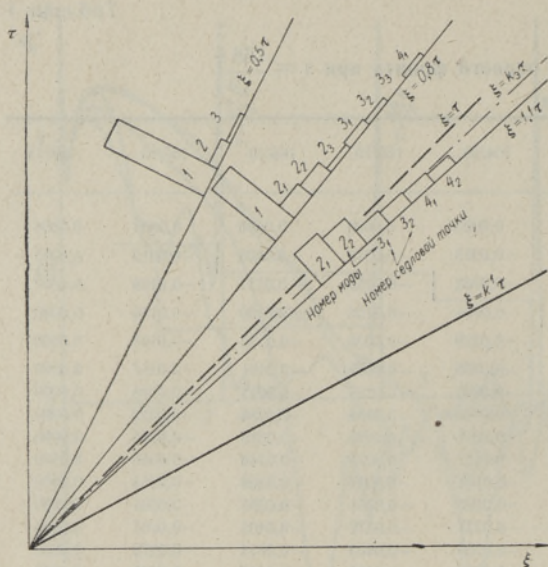


Рис. 16.

Следует отметить, что  $W$  аппроксимируется формулами первого приближения метода перевала хуже всех остальных расчетных величин теории типа Тимошенко;  $M$  и  $Q$  аппроксимируются по этим формулам при  $\xi \leq 0,9\tau$  весьма хорошо почти с самого начала движения. Отметим, что в теории Кирхгофа формулы первого приближения метода перевала дают для  $M$  и  $Q$  те же выражения, что и точное обращение контурных интегралов.

**2. Об областях обоснованной и эффективной применимости приближенных методов в случае полубесконечных и бесконечных плит.** Пусть речь идет о плоской или осесимметричной деформации изгиба плиты, зависящей от одной безразмерной (деленной на  $h$ ) координаты ( $\xi$ ) срединной поверхности, безразмерной нормальной координаты ( $\zeta$ ) и безразмерного времени  $\tau$ . Рассмотрим область положительных значений  $\xi$ . Вышеизложенные результаты совместно с результатами работ [4, 15] и данными литературы [1, 18] позволяют сделать в рамках линейной теории упругости некоторые выводы относительно областей применимости отдельных приближенных методов, иллюстрированные схемой на рис. 19. Эта схема имеет качественный характер, ибо конкретный выбор границ применения отдельных методов зависит от требуемой точности, вычисляемых величин, характера нагрузки, точности реализации того или иного метода, возможностей используемой вычислительной машины и т. д.

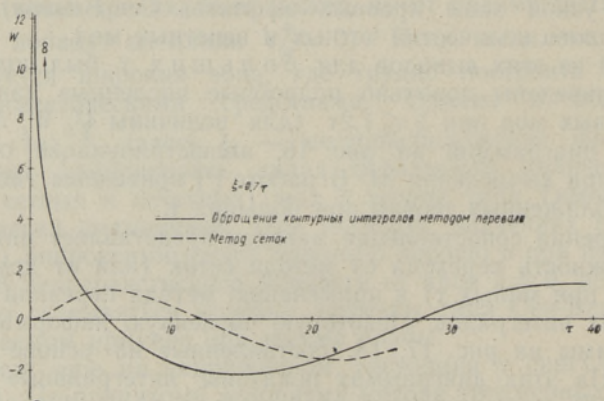


Рис. 17.



В начале движения (область AGO на рис. 19) перемещения малы, а максимальные и минимальные напряжения достигают при резких динамических нагрузках таких же значений, как на следующих этапах движения. При этом напряженное состояние существенно зависит от  $\xi$  и для надежного вычисления напряжений необходимо применить уравнения теории упругости. Указанная область больше в случае сосредоточенных нагрузок, приложенных к поверхностям  $\xi = \pm h$  или  $\xi = \text{const}$ , и сравнительно мала при нагрузке, линейно распределенной в

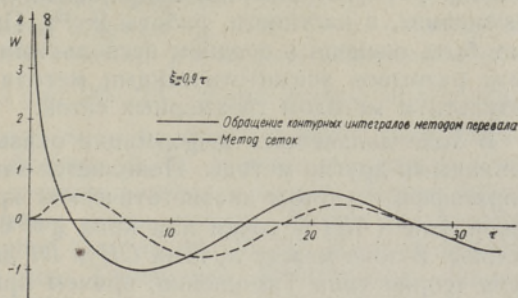


Рис. 18.

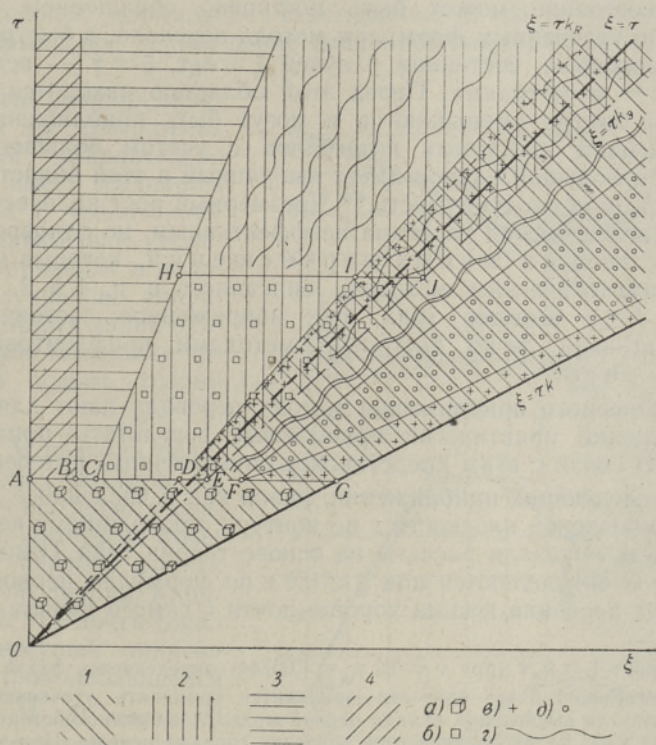


Рис. 19.

1 — теория упругости, 2 — теория типа Тимошенко, 3 — теория Кирхгоффа, 4 — квазистатические краевые эффекты; а — методы интегрирования уравнений теории упругости при малых значениях  $\tau$ : метод трехмерных сеток, лучевой метод, асимптотические методы обращения контурных интегралов; б — конечно-разностные и энергетические методы интегрирования уравнений теории типа Тимошенко; в — методы прифронтной асимптотики; г — обращение контурных интегралов методом перевала; д — область малых перемещений, качественно характеризуемая методом, описанным в п. 4 § 2.



сечения  $\xi = \text{const}$ . Анализу напряженного состояния в указанной области посвящены, в частности, работы [8–12]. Протяженность этой области может быть оценена в среднем несколькими толщинами плиты. После анализа разрывов асимптотическими методами можно получить численные результаты методом трехмерных сеток.

В ходе дальнейшей деформации оказываются эффективными и обоснованными другие методы. Появляется зона (AC), где применима теория Кирхгоффа с учетом квазистатических краевых эффектов Сен-Венана в узкой зоне (AB) у точки или края  $\xi = 0$ , если эти эффекты достаточно сильны. В зоне между лучами *CH* и *DI* дает удовлетворительные результаты теория типа Тимошенко, причем при небольших  $\tau$  эффективны конечно-разностные и энергетические методы, а при  $\tau \gg 1$  — метод перевала. В зоне между лучами *DI* и *EI* (т. е. в зоне между районами условного фронта релеевских волн и квазифронта, связанным фазой Эри первой моды), теория типа Тимошенко позволяет получить некоторое представление о интегральных величинах типа  $U$ ,  $W$ ,  $M$ ,  $Q$  (особенно в том случае, если эти величины не претерпевают разрыва на фронте сдвига  $\tau = \xi$ ), но для более детального анализа необходимо применение уравнений теории упругости.\* При этом более медленно изменяющееся напряженное состояние может быть построено обращением контурных интегралов по уточненным формулам метода перевала, а быстроизменяющиеся напряженные состояния у лучей  $\xi = k\tau$ ,  $\xi = \tau$  — асимптотическими при  $s \rightarrow \infty$  методами. Перед этой областью находится зона, где перемещения быстро уменьшаются и могут быть приближенно определены обращением контурных интегралов с учетом большого количества мод. Чем больший наклон имеет выбранный в этой области луч, тем большее число мод следует учесть.\*\* Чрезмерный рост количества учитываемых мод делает метод перевала неэффективным, но одновременно наступает зона весьма малых перемещений, которые могут быть оценены асимптотическим методом, описанном в п. 4 § 2. У самого фронта  $\xi = k^{-1}\tau$  имеется зона, где напряженное состояние может быть сравнительно легко построено методами прифронтной асимптотики.

Формулы первого приближения метода перевала дают для нормальных перемещений практически приемлемые результаты примерно при  $\tau \geq 30$ –50. В связи с этим представляет определенный интерес применение формул следующих приближений, равно как и численного интегрирования на комплексной плоскости  $s$  по контуру, проходящему через седловые точки. Как показали расчеты на основе теории типа Тимошенко, величины  $M$  и  $Q$  определяются при  $\xi < 0,9\tau$  по формулам первого приближения метода перевала весьма хорошо почти с самого начала движения.

\* Квазифронт  $\xi = k_3\tau$  (при  $\nu = 0,3$   $k_3 = 1,00744$ ) определяется фазой Эри первой моды и соответственно в его близости приходится применять уточненные формулы метода перевала для вычисления вклада первой моды. Аналогично обстоит дело у фаз Эри следующих мод, но их практическое значение гораздо меньше. При  $\nu = 0,3$  фазы Эри второй моды определяют, например, следующие квазифронты  $\xi = 0,69062\tau$ ,  $\xi = 1,18313\tau$ .

Теория типа Тимошенко аппроксимирует фазу Эри первой моды; ее вторая мода фаз Эри не имеет.

\*\* В области  $\xi/\tau \leq k_3$  доминирует вклад первых двух мод, но при  $\xi/\tau > k_3$  с ростом соотношения  $\xi/\tau$  быстро увеличивается роль следующих мод. Численную иллюстрацию этого явления можно найти в работе [4], где с учетом шести мод удалось получить более или менее приемлемые результаты при  $\xi/\tau \leq 1,2$ .

Необходимость учета большого количества мод на рис. 19 условно показана двойной волнистой линией.



3. Движение плиты-полосы конечной ширины. Рассмотрим свободно опертую плиту-полосу относительной ширины  $\xi_0 = 30$  (т. е. с пролетом  $L = 30h$ ), нагруженную в опорном сечении  $\xi = 0$  сосредоточенным моментом  $\tilde{M} = -\frac{3(1-\nu)}{2} M = 1$ . На рис. 20—23 сопоставлены результаты, полученные в [15] по схеме бегущих волн на основе теории типа Тимошенко, и результаты применения формул (2.16), основывающихся на разложении волнового процесса по стоячим волнам в рамках теории Кирхгоффа; показаны моменты времени, когда первый фронт (по теории типа Тимошенко) прошел расстояние  $\xi_n = 45, 60, 75, 90$ . Жирной линией показаны результаты по теории типа Тимошенко, пунктирными линиями — по теории Кирхгоффа; последние построены с учетом  $N = 1, N = 4, N = 7$  членов в бесконечных рядах формул (2.16). На каждом рисунке приведены четыре диаграммы, на которых соответственно показаны:

- а) безразмерный момент  $\tilde{M} = -\frac{3(1-\nu)}{2} M$ ;
- б) безразмерная поперечная сила  $\tilde{Q} = Q k_T^{-2}$ ;
- в) безразмерное краевое тангенциальное перемещение  $u_1$ ;
- г) усредненное нормальное перемещение  $W$  по теории типа Тимошенко и нормальное перемещение срединной поверхности  $w_0$  по теории Кирхгоффа.

Видно, что разница между линиями на диаграммах перемещений сравнительно невелика и имеет тенденцию уменьшаться с увеличением  $N$ . Однако чрезмерное увеличение  $N$  не приводит к дальнейшему улучшению аппроксимации жирных линий пунктирными, ибо последние построены на основе теории Кирхгоффа.

В части  $\tilde{M}$  разница большая в районах быстрой осцилляции — особенно у первого фронта. Интересно отметить, что у первого фронта диаграмма по теории Кирхгоффа при  $N = 7$  почти точно является «несущей линией» для быстроколеблющейся диаграммы  $\tilde{M}$ . В части  $\tilde{Q}$  разница результатов, полученных по рассматриваемым методам, еще более существенна и охватывает также районы сравнительно медленного изменения  $\tilde{Q}$ .

Судя по рис. 20—23, быстроизменяющееся прифронтовое напряженное состояние, построенное по теории типа Тимошенко, охватывает по мере роста времени (числа отражений), все более широкую зону и аппрок-

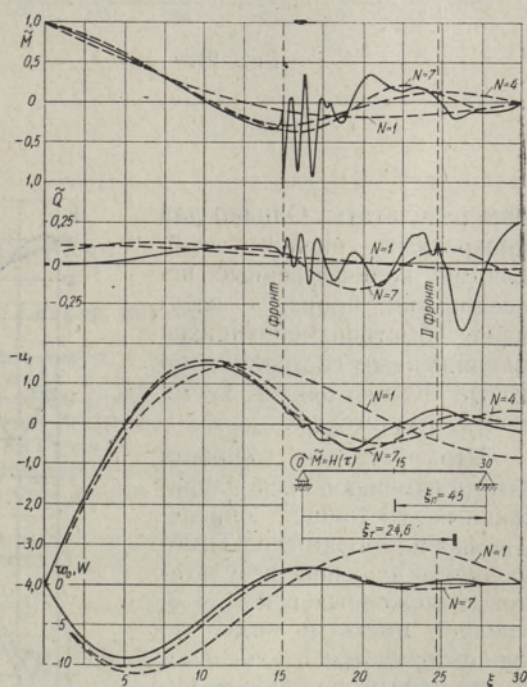


Рис. 20.



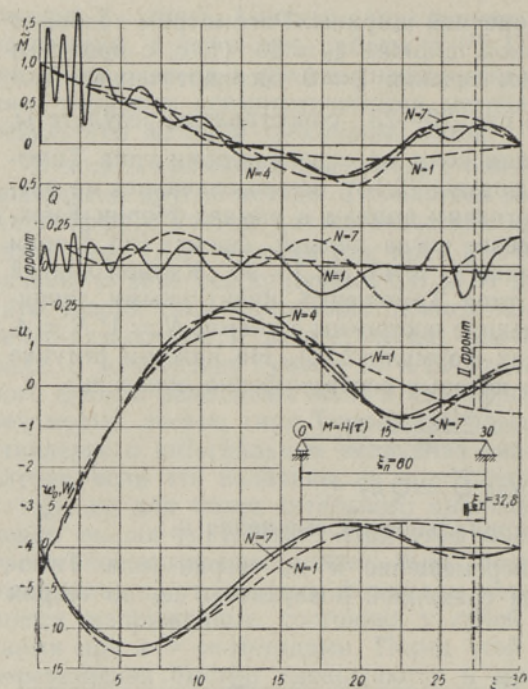


Рис. 21.

шие результаты. Однако для конкретных оценок необходимы количественные исследования процесса затухания быстроизменяющихся напряженных состояний, которые в настоящее время почти отсутствуют.

Что касается точности быстроизменяющихся напряженных состояний, определяемых по теории типа Тимошенко, то на основе результатов, изложенных в п. 1 § 3, следует иметь в виду, что они отличаются от таковых, вычисленных по теории упругости. Необходимо также напомнить, что быстроизменяющиеся участки диаграмм на рисунках 20—23 имеют численную погрешность, связанную с применением метода сеток.

симиляция диаграмм  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{Q}$  стоячими волнами не улучшает. Это связано с тем, что нами не учтены затухающие факторы (внутреннее поглощение энергии, излучение, неидеальность опор), вызывающие в первую очередь затухание быстроизменяющихся прифронтных напряженных состояний и затем всего волнового процесса и приводящие наконец к вырождению динамического напряженного состояния в статическое, хорошо описываемое теорией Кирхгоффа. После некоторого затухания быстроизменяющихся напряженных состояний аппроксимация волнового процесса стоячими волнами теории Кирхгоффа дает, очевидно, луч-

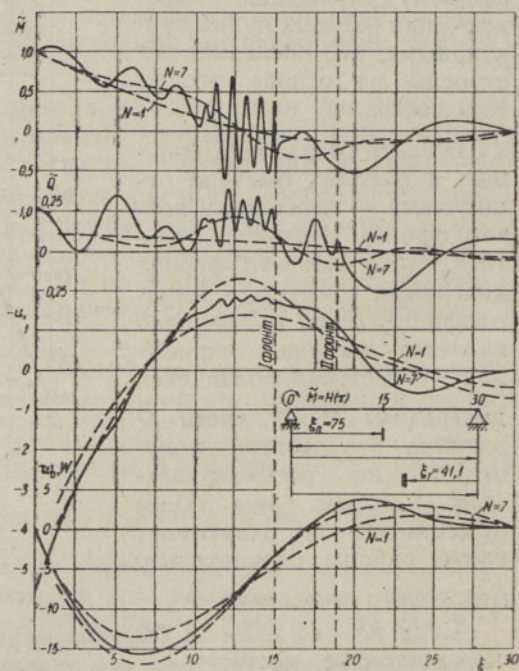


Рис. 22.



На основании изложенного можно констатировать, что при  $\xi_0 \gg 1$  применение метода Фурье на базе теории Кирхгоффа дает хорошую аппроксимацию перемещений уже во время первых пробегов волн до опоры; напряжения и интегральные величины  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{Q}$  аппроксимируются гораздо хуже — их аппроксимация улучшается по мере воздействия затухающих факторов. Теория типа Тимошенко позволяет оценить точность теории Кирхгоффа, но построенные на ее основе быстроизменяющиеся напряженные состояния отличаются от таковых, полученных на основе уравнений теории упругости.

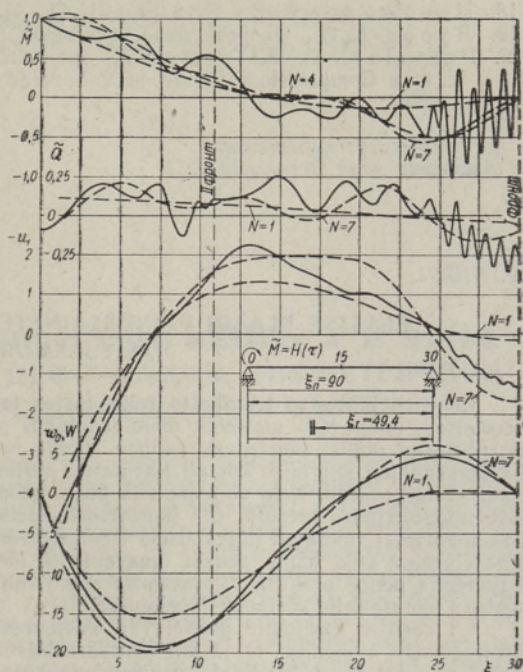


Рис. 23.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Айнола Л., Нигул У., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 14, № 1, 3—63 (1965).
2. Мянниль А., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 14, № 3, 423 (1965).
3. Нигул У., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 12, № 2, 146—155 (1963).
4. Нигул У. К., ПММ, 27, вып. 6, 1044—1056 (1963).
5. Бабич В. М., Алексеев А. С., Изв. АН СССР. Сер. геофиз., № 1, 17—31 (1958).
6. Алексеев А. С., Бабич В. М., Гельчинский Б. Я., Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, т. V, Л., 1961, стр. 3—24.
7. Бабич В. М., Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, т. V, Л., 1961, стр. 25—35.
8. Бабич В. М., Геометро-оптические методы в теории нестационарных волн и фундаментальные решения гиперболических уравнений (докторская диссертация), Новосибирск, 1961, 201 стр.
9. Петрашень Г. И., Сб. Динамические задачи теории упругости, т. V, Л., 1956, стр. 5—57.
10. Петрашень Г. И., Сб. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, т. I, Л., 1957, стр. 70—163.
11. Broberg K. B., Trans. Roy. Inst. Techn., Stockholm, Rep. No. 139 (Mech. Eng. 3), 26 pp. (1959).
12. Rosenfeld R. L., Miklowitz J., Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1, 293—303 (1962).
13. Flügge W., Zajac E. E., Ingr.-Arch., 28, 59—70 (1959).
14. Нигул У., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, 12, № 3, 284—294 (1963).
15. Векслер Н. Д., Мянниль А. И., Нигул У. К., Прикладная механика, 1 (1965). (В печати).
16. Boley B. A., J. Appl. Mech., 22, No. 1, 69—76 (1955).
17. Boley B. A., Chao C. C., J. Appl. Mech., 25, No. 1, 31—36 (1958).



18. Новожилов В. В., Слепян Л. И., ПММ, 29, вып. 2, 261—281 (1965).
19. Лурье А. И., Операционное исчисление, М.-Л., 1951.
20. Pekeris C. L., Alterman Z., Abramovici F., Jarosch H., Propagation of a Compressional Pulse in a Layered Solid, The Weizmann Institute, Israel, 1964.

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
28/IV 1965

U. NIGUL

## ELASTSE PLAADI PAINDELAINETE UURIMISE MEETODITEST JA TULEMUSTEST

Mõnedes tähtsates tehnilistes rakendustes toimivad plaatidele väga järsud impulsskoormised, mida võib vaadelda üleminekutüüpi pingelainete allikaina. Viimastel aastatel on pööratud olulist tähelepanu selliste lainete leviku probleemidele nii joonkoormise kui ka keskendatud koormise korral. Kasutatud uurimismeetodid on näidatud joonisel 1. Kõik nad on ligikaudsed. Neid võib jaotada kahte gruppi: (a) lineaarse elastsusteooria võrrandite integreerimise meetod, (b) lineaarsest elastsusteooriast teatavatel eeldustel (kasutades hüpoteese) tuletatud ligikaudsete teooriate võrrandite integreerimise meetodid. On oluline võrrelda neid kahte gruppi omavahel ja neisse kuuluvaid üksikuid meetodeid ning kujundada nende praktilise kasutamise efektiivne süsteem. Käesolev artikkel püüab anda teatava panuse selle küsimuse lahendusse.

§ 1 käsitleb meetodite gruppi (a), kusjuures kahte neist — kolmemõõtmelise võrgu meetodit (№ 1 joonisel 1) ja üht kontuurintegraalide arvutamise asümptootilist meetodit (№ 4 joonisel 1) — kirjeldatakse üksikasjalikult. Seni pole neid meetodeid vaadeldavate ülesannete numbrilisel uurimisel kasutatud.

§ 2 kirjeldab lühidalt mõningaid grupi (b) meetodeid, mida on kasutatud numbrilistes näidetes (vt. § 3).

§-s 3 esitatakse mõningad numbrilised tulemused, võrreldakse meetodeid ja tehakse järeldused. Poollõpmatu plaadi uurimise numbrilised tulemused esitatakse joon. 4—18 ja kvalitatiivsed järeldused joon. 19. Lõpliku plaadi jaoks on Timoshenko tüüpi teooria ja elementaarse teooria võrdlus toodud joon. 20—23.

U. NIGUL

## ON METHODS AND RESULTS OF INVESTIGATIONS ON TRANSIENT BENDING WAVES IN AN ELASTIC PLATE

In some important technical applications, elastic plates are subjected to very sharp impulsive loads which could be considered as sources of transient stress waves. In recent years, considerable attention has been given to the transient wave propagation problem both in the case of the line load and in the case of the point load. The methods used in the investigations are shown in fig. 1. All these methods are approximate. They could be divided into two groups: (a) the methods of integration of the equations of the linear theory of elasticity, (b) the methods of integration of the equations of the approximate theories derived from the linear theory of elasticity by some assumptions (using hypotheses). It is an important task now to compare these two groups of methods as well as several methods in them and to build up an efficient system of their practical application. This paper is an attempt to give some contribution to the solution of this general problem.

§ 1 is devoted to the methods of the group (a). Two of them — the method of three-dimensional networks (No. 1 in fig. 1) and an asymptotic method for evaluation of the contour integrals (No. 4 in fig. 1) — proposed by the author previously in the second part of the paper [1], but probably not yet used in numerical research into problems treated, are described here in detail.

In § 2 of the methods of the group (b) used in the numerical examples (in § 3) are briefly described.

In § 3 some numerical results are given, methods compared and conclusions made. The numerical results for an infinite plate are given in figs. 4—18, and the qualitative conclusions in fig. 19. For a finite plate problem the comparison of the Timoshenko type theory with the elementary theory is presented in figs. 20—23.