EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 3

Л. АЙНОЛА

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ТИПА ТИМОШЕНКО ДЛЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Общая геометрически нелинейная теория упругих оболочек, базирующаяся на гипотезах Кирхгоффа-Лява, разработана весьма обстоятельно. В последнее время большое внимание уделяется уточнению линейной теории оболочек, чтобы расширить область ее применения, с одной стороны, на не очень тонкие оболочки и, с другой стороны, для изучения динамических явлений в оболочках. Поскольку нелинейную теорию применяют в случае довольно тонких оболочек, в первом случае нет необходимости в смягчении гипотез Кирхгоффа-Лява. Но в задачах динамики может оказаться необходимым уточнить классическую нелинейную теорию оболочек.

Самым распространенным вариантом уточненных теорий является теория типа Тимошенко. При решении динамических задач эта теория более удобна, чем классическая, так как по ней возмущения в оболочке распространяются с конечной скоростью.

В настоящей работе приводится самый простой вариант геометрически нелинейной теории типа Тимошенко для упругих оболочек. Теория оболочек выводится из обобщенного вариационного принципа Гамильтона, варьируемыми величинами в котором являются как перемещения, так и напряжения. Как частные случаи из нелинейной теории получаются линейная теория типа Тимошенко и нелинейная теория, базирующаяся на гипотезах Кирхгоффа-Лява. Приводятся также уравнения теории типа Тимошенко динамической устойчивости для произвольной оболочки.

Ранее нелинейная теория динамики, учитывающая деформацию сдвига и инерцию вращения, рассмотрена для пластинок в работах [1–4] и для цилиндрической оболочки в работе [5].

1. Геометрия оболочки. Приведем некоторые необходимые данные геометрически нелинейной теории упругости.

Пусть x^i — система криволинейных координат; t — время и $\overline{R}(x^1, x^2, x^3)$ — радиус-вектор произвольной точки. Соответствующие главные векторы $\overline{R}_i$ и метрический тензор g_{ik} недеформированного тела будут

$$\overline{R}_i = \frac{\partial \overline{R}}{\partial x^i}, \quad g_{ik} = \overline{R}_i \overline{R}_k \qquad (i, k = 1, 2, 3). \tag{1.1}$$

Если $\overline{U}(x^1, x^2, x^3, t)$ — вектор перемещений, то радиус-вектор $\overset{*}{\overline{R}}$, основные векторы $\overset{*}{\overline{R}}_i$ и метрический тензор $\overset{*}{g}_{ik}$ деформированного тела определяются формулами

$$\overset{*}{\overline{R}} = \overline{R} + \overline{U}, \quad \overset{*}{\overline{R}}_i = \overline{R}_i + \frac{\partial \overline{U}}{\partial x^i}, \quad \overset{*}{g}_{ik} = \overset{*}{\overline{R}}_i \overset{*}{\overline{R}}_k. \tag{1.2}$$

Тензор деформации γ_{ik} выражается через вектор перемещений формулой

$$\gamma_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial x^k} \overline{R}_i + \frac{\partial \overline{U}}{\partial x^i} \overline{R}_k + \frac{\partial \overline{U}}{\partial x^i} \overline{R}^e \frac{\partial \overline{U}}{\partial x^k} \overline{R}_e\right). \tag{1.3}$$

Рассмотрим оболочку постоянной толщины h и воспользуемся обычными криволинейными координатами оболочки

$$\bar{R} = \bar{r}(x^1, x^2) + x^3 \bar{n}(x^1, x^2). \tag{1.4}$$

Здесь $\bar{r}$, $\bar{n}$ — радиус-вектор и единичный вектор нормали к срединной поверхности недеформированной оболочки.

Пусть далее $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — тензоры первой и второй квадратичной формы срединной поверхности, т. е.

$$a_{\alpha\beta} = \bar{r}_\alpha \bar{r}_\beta, \qquad b_{\alpha\beta} = -\bar{r}_\alpha \bar{n}_\beta, \tag{1.5}$$

где
$$\bar{r}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha}, \quad \bar{n}_\beta = \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2) \tag{1.6}$$

и ∇_α — символ ковариантного дифференцирования в метрике $a_{\alpha\beta}$.

Вектор смещения можно записать в виде

$$\bar{U} = u^\alpha \bar{r}_\alpha + u_3 \bar{n}. \tag{1.7}$$

Тогда
$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x^\alpha} = \varepsilon_{\alpha\gamma} \bar{r}^\gamma + \vartheta_\alpha \bar{n}, \qquad \frac{\partial \bar{U}}{\partial x^3} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^3} \bar{r}^\alpha + \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \bar{n}, \tag{1.8}$$

где
$$\varepsilon_{\alpha\gamma} = \nabla_\alpha u_\gamma - b_{\alpha\gamma} u_3, \qquad \vartheta_\alpha = \nabla_\alpha u_3 + b_{\alpha\gamma} u^\gamma. \tag{1.9}$$

2. Вариационная формула и гипотезы теории. Уравнения движения и соотношения упругости оболочки будем выводить из вариационного принципа Гамильтона-Рейсснера трехмерного тела:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_V \left(\frac{1}{2} E_{iklm} \sigma^{ik} \sigma^{lm} - \sigma^{ik} \gamma_{ik} + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u^i}{\partial t} \right) dV + \right.$$
$$\left. + \int_{S_1} P^i u_i dS_1 \right\} dt = 0. \tag{2.1}$$

Здесь E_{iklm} — тензор упругости; σ^{ik} — тензор напряжения; P^i — вектор внешней нагрузки, не зависящий от перемещений; V, S_1 — объем и та часть поверхности, где задана внешняя нагрузка недеформированного тела.

В функционале (2.1) варьируемыми величинами являются как перемещения u_i, так и напряжения σ^{ik}.

Для приведения трехмерной теории к двумерной теории оболочек используем следующие гипотезы:

1. Считаем $x^3 b_{\alpha\beta}$ достаточно малой величиной по сравнению с единицей ($x^3 b_{\alpha\beta} \ll 1$), так что метрика по толщине оболочки не изменяется.

2. Перемещения распределены по толщине оболочки по линейному закону

$$u_\alpha = v_\alpha(x^1, x^2, t) + x^3 \varphi_\alpha(x^1, x^2, t), \qquad u_3 = w(x^1, x^2, t) + x^3 \psi(x^1, x^2, t). \tag{2.2}$$

3. Распределение напряжений соответствует закону

$$\sigma^{\alpha\beta}=\frac{1}{h}T^{\alpha\beta}(x^1,x^2,t)+\frac{12x^3}{h^3}M^{\alpha\beta}(x^1,x^2,t)$$

$$\sigma^{\alpha 3}=\frac{2}{h}N^{\alpha}(x^1,x^2,t)f_{(\alpha)}(x^3),\ \sigma^{33}=\frac{1}{h}R(x^1,x^2,t)f_{(3)}(x^3), \tag{2.3}$$

где $f_{(i)}$ — заданные функции, удовлетворящие условиям

$$f_{(i)}(-x^3)=f_{(i)}(x^3),\quad \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}f_{(i)}dx^3=1,\quad \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2}f^2_{(i)}dx^3=k_{(i)}. \tag{2.4}$$

4. В функционале (2.1) пренебрегаем членами, содержащими моменты второго порядка, инерционными членами, обусловленными ψ, и членами третьего порядка, содержащими функцию ψ.

Различные варианты уточненных теорий отличаются друг от друга тем, как в них аппроксимируются перемещения u_3, напряжения σ^{33} и как выбираются значения для коэффициента $k_{(i)}$. Принятый здесь вариант является самым простым, учитывающим влияния напряжения σ^{33}.

В соответствии с первым допущением

$$\bar{R}_\alpha=\bar{r}_\alpha,\quad \bar{R}_3=\bar{n},\quad g_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta},\quad \sqrt{\frac{g}{a}}=1,\quad dV=\sqrt{a}\,dSdx^3 \tag{2.5}$$

(S — срединная поверхность оболочки).

Из (2.3) вытекает, что

$$T^{\alpha\beta}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma^{\alpha\beta}dx^3,\quad M^{\alpha\beta}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma^{\alpha\beta}x^3dx^3,\quad N^{\alpha}=\frac{1}{2}\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma^{\alpha 3}dx^3,\quad R=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma^{33}dx^3$$

$$\int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma^{\alpha 3}x^3dx^3=0,\quad \int\limits_{-h/2}^{h/2}\sigma^{33}x^3dx^3=0. \tag{2.6}$$

Пусть для внешних нагрузок введены следующие обозначения:

$$p_\alpha=P_\alpha\Big|_{x^3=-h/2}^{x^3=h/2},\quad p=P_3\Big|_{x^3=-h/2}^{x^3=h/2},\quad m_\alpha=P_\alpha x^3\Big|_{x^3=-h/2}^{x^3=h/2},\quad m=P_3x^3\Big|_{x^3=-h/2}^{x^3=h/2}$$

$$Q_n=\int\limits_{-h/2}^{h/2}P_ndx^3,\quad Q_s=\int\limits_{-h/2}^{h/2}P_sdx^3,\quad Q=\int\limits_{-h/2}^{h/2}P_3dx^3$$

$$K_n=\int\limits_{-h/2}^{h/2}P_nx^3dx^3,\quad K_s=\int\limits_{-h/2}^{h/2}P_sx^3dx^3. \tag{2.7}$$

Из (1.3), (1.8), (2.5) для деформаций γ_{ik} получим выражения

$$\gamma_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\beta}+\varepsilon_{\beta\alpha}+\varepsilon_{\alpha}^{\cdot\gamma}\varepsilon_{\beta\gamma}+\vartheta_\alpha\vartheta_\beta)$$

$$\gamma_{\alpha 3}=\frac{1}{2}\left(\vartheta_\alpha+\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^3}+\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^3}\varepsilon_{\alpha\gamma}+\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\vartheta_\alpha\right)$$

$$\gamma_{33}=\frac{1}{2}\left(2\frac{\partial u_3}{\partial x^3}+\frac{\partial u^\gamma}{\partial x^3}\frac{\partial u_\gamma}{\partial x^3}+\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right), \tag{2.8}$$

где по (1.9), (2.2)

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=e_{\alpha\beta}+x^3\varkappa_{\alpha\beta},\quad e_{\alpha\beta}=\nabla_\alpha v_\beta-b_{\alpha\beta}w,\quad \varkappa_{\alpha\beta}=\nabla_\alpha\varphi_\beta-b_{\alpha\beta}\psi$$
$$\vartheta_\alpha=\omega_\alpha+x^3\mu_\alpha,\quad \omega_\alpha=\nabla_\alpha w+b_{\alpha\gamma}v^\gamma,\quad \mu_\alpha=\nabla_\alpha\psi+b_{\alpha\gamma}\varphi^\gamma. \tag{2.9}$$

3. Уравнения движения и соотношения упругости. Если ввести деформации, напряжения и перемещения по (2.8), (2.3), (2.2) в функционал (2.1), учесть сделанные предположения и провести интегрирование по x^3, получим

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big\langle\int_S\Big\{\frac{1}{4\mu\, h}(P_{\alpha\beta\gamma\vartheta}T^{\alpha\beta}T^{\gamma\vartheta}+\frac{12}{h^2}P_{\alpha\beta\gamma\vartheta}M^{\alpha\beta}M^{\gamma\vartheta}+$$
$$+8k_{(\alpha)}N^\alpha N_\alpha+\frac{2\nu}{1+\nu}a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}R+\frac{1}{1+\nu}k_{(3)}R^2)-$$
$$-\frac{1}{2}T^{\alpha\beta}(e_{\alpha\beta}+e_{\beta\alpha}+a^{\gamma\vartheta}e_{\alpha\gamma}e_{\beta\vartheta}+\omega_\alpha\omega_\beta)- \tag{3.1}$$
$$-\frac{1}{2}M^{\alpha\beta}[\varkappa_{\alpha\beta}+\varkappa_{\beta\alpha}+a^{\gamma\vartheta}(e_{\alpha\gamma}\nabla_\beta\varphi_\vartheta+e_{\beta\vartheta}\nabla_\alpha\varphi_\gamma)+b_{\alpha\gamma}\omega_\beta\varphi^\gamma+b_{\beta\gamma}\omega_\alpha\varphi^\gamma]-$$
$$-N^\alpha(\omega_\alpha+\varphi_\alpha+\varphi^\gamma e_{\alpha\gamma})-\frac{1}{2}R(2\psi+\varphi^\gamma\varphi_\gamma)+$$
$$+\frac{1}{2}\varrho h(\dot v_\alpha\dot v^\alpha+\dot w^2)+\frac{1}{24}\varrho h^3\dot\varphi_\alpha\dot\varphi^\alpha+p^\alpha v_\alpha+pw+m^\alpha\varphi_\alpha+m\psi\Big\}dS+$$
$$+\int_{C_1}(Q_nv_n+Q_sv_s+Qw+K_n\varphi_n+K_s\varphi_s)dC\Big\rangle dt=0.$$

Здесь
$$P_{\alpha\beta\gamma\vartheta}=a_{\alpha\gamma}a_{\beta\vartheta}-\frac{\nu}{1+\nu}a_{\alpha\beta}a_{\gamma\vartheta}, \tag{3.2}$$

а C_1 — та часть контура недеформированной оболочки, где задана внешняя нагрузка.

Из (3.1) вытекают нижеследующие уравнения и соотношения.

Уравнения движения:

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta}-b^\beta_\alpha N^\alpha+\nabla_\gamma(e_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}T^{\alpha\gamma})-b^\beta_\gamma\omega_\alpha T^{\alpha\gamma}+\nabla_\alpha(\nabla_\gamma\varphi^\beta M^{\alpha\gamma})-$$
$$-b^\beta_\gamma b^\vartheta_\alpha\varphi_\vartheta M^{\alpha\gamma}+\nabla_\alpha(\varphi^\beta N^\alpha)-\varrho h\ddot v^\beta+p^\beta=0 \tag{3.3}$$

$$\nabla_\alpha N^\alpha+b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}+\nabla_\beta(\omega_\alpha T^{\alpha\beta})+b_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}e_{\alpha\gamma}T^{\alpha\beta}+\nabla_\beta(b^\gamma_\alpha\varphi_\gamma M^{\alpha\beta})+$$
$$+b_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\nabla_\alpha\varphi_\gamma M^{\alpha\beta}+b_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\varphi_\beta N^\alpha-\varrho h\ddot w+p=0 \tag{3.4}$$

$$\nabla_\alpha M^{\alpha\beta}-N^\beta-e_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}N^\alpha+\nabla_\gamma(e_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}M^{\alpha\gamma})-b^\beta_\alpha\omega_\gamma M^{\alpha\gamma}-$$
$$-\varphi^\beta R-\frac{1}{12}\varrho h^3\ddot\varphi^\beta+m^\beta=0 \tag{3.5}$$

$$b_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}-R+m=0. \tag{3.6}$$

Соотношения упругости:

$$P_{\alpha\beta\gamma\vartheta}T^{\gamma\vartheta}-\mu h(e_{\alpha\beta}+e_{\beta\alpha}+e_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}e_{\beta\gamma}+\omega_\alpha\omega_\beta)+\frac{\nu}{1+\nu}a_{\alpha\beta}R=0 \tag{3.7}$$

$$P_{\alpha\beta\gamma\vartheta}M^{\gamma\vartheta}-\frac{\mu h^3}{12}(\varkappa_{\alpha\beta}+\varkappa_{\beta\alpha}+e_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}\nabla_\beta\varphi_\gamma+e_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\nabla_\alpha\varphi_\gamma+b_{\beta\cdot}^{\cdot\gamma}\omega_\kappa\varphi_\gamma+b_{\alpha\cdot}^{\cdot\gamma}\omega_\beta\varphi_\gamma)=0 \tag{3.8}$$

$$k_{(\alpha)}N_\alpha-\frac{\mu h}{4}(\omega_\alpha+\varphi_\alpha+\varphi^\gamma e_{\alpha\gamma})=0 \tag{3.9}$$

$$k_{(3)}R+\nu a_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}-\frac{Eh}{2}(2\psi+\varphi^{\gamma}\varphi_{\gamma})=0. \tag{3.10}$$

Статические граничные условия на контуре C_1

$$(\delta^{\gamma}_{\alpha}+e^{\cdot\gamma}_{\alpha\cdot})T^{\alpha\beta}n_{\beta}n_{\gamma}+\nabla_{\gamma}\varphi^{\beta}M^{\alpha\gamma}n_{\alpha}n_{\beta}+\varphi^{\alpha}N^{\beta}n_{\alpha}n_{\beta}-Q_n=0 \tag{3.11}$$

$$(\delta^{\gamma}_{\alpha}+e^{\cdot\gamma}_{\alpha\cdot})T^{\alpha\beta}n_{\beta}t_{\gamma}+\nabla_{\gamma}\varphi^{\beta}M^{\alpha\gamma}n_{\alpha}t_{\beta}+\varphi^{\alpha}N^{\beta}n_{\alpha}t_{\beta}-Q_s=0 \tag{3.12}$$

$$N^{\alpha}n_{\alpha}+\omega_{\alpha}T^{\alpha\beta}n_{\beta}+b^{\cdot\gamma}_{\alpha\cdot}\varphi_{\gamma}M^{\alpha\beta}n_{\beta}-Q=0 \tag{3.13}$$

$$(\delta^{\gamma}_{\alpha}+e^{\cdot\gamma}_{\alpha\cdot})M^{\alpha\beta}n_{\beta}n_{\gamma}-K_n=0 \tag{3.14}$$

$$(\delta^{\gamma}_{\alpha}+e^{\cdot\gamma}_{\alpha\cdot})M^{\alpha\beta}n_{\beta}t_{\gamma}-K_s=0. \tag{3.15}$$

Геометрические граничные условия на контуре C_2 (однородные)

$$v_{\alpha}n^{\alpha}=0,\quad v_{\alpha}t^{\alpha}=0,\quad w=0,\quad \varphi_{\alpha}n^{\alpha}=0,\quad \varphi_{\alpha}t^{\alpha}=0, \tag{3.16}$$

где n_{α}, t_{α} — компоненты единичного вектора нормали и единичного тангенциального вектора контура недеформированной оболочки.

Уравнения (3.3), (3.4), (3.5) составляют основную систему движения оболочки. Шестое уравнение равновесия (3.6) будет использовано для исключения R из уравнений равновесия моментов (3.5) и соотношений упругости (3.7). Усилия и моменты $T^{\alpha\beta}$, N^{α}, $M^{\alpha\beta}$ выражаются через пять искомых величин v_{α}, w, φ_{α} при помощи соотношений (3.7)—(3.9). Соотношение (3.10) будет использовано для определения функции ψ.

Начальные условия для полученной системы имеют вид

$$v_{\alpha}(x^{\gamma},\ t_0)=\bar{v}_{\alpha}(x^{\gamma}),\ \ w(x^{\gamma},\ t_0)=\bar{w}(x^{\gamma}),\ \ \varphi_{\alpha}(x^{\gamma},\ t_0)=\bar{\varphi}_{\alpha}(x^{\gamma})$$

$$\dot{v}_{\alpha}(x^{\gamma},\ t_0)=\dot{\bar{v}}_{\alpha}(x^{\gamma}),\ \ \dot{w}(x^{\gamma},\ t_0)=\dot{\bar{w}}(x^{\gamma}),\ \ \dot{\varphi}_{\alpha}(x^{\gamma},\ t_0)=\dot{\bar{\varphi}}_{\alpha}(x^{\gamma}), \tag{3.17}$$

где $\bar{v}_{\alpha}$, $\bar{w}$, $\bar{\varphi}_{\alpha}$, $\dot{\bar{v}}_{\alpha}$, $\dot{\bar{w}}$, $\dot{\bar{\varphi}}_{\alpha}$, — заданные перемещения и углы поворота и их скорости в начале движения при $t=t_0$.

Как частный случай из выведенной нелинейной теории типа Тимошенко можно получить классическую нелинейную теорию. Для этого надо ввести дополнительные допущения $\gamma_{\alpha_3}=0$, $\sigma^{33}=0$. По (2.3), (2.8) они приводят к соотношениям

$$\varphi_{\alpha}=-\omega_{\alpha}+e^{\cdot\beta}_{\alpha\cdot}\omega_{\beta},\quad R=0. \tag{3.18}$$

4. Линейная теория. Если пренебречь всеми нелинейными членами в уравнениях (3.3) — (3.10) и взять $\psi=0$, получим простейшую линейную теорию типа Тимошенко. Соответствующие уравнения будут:

уравнения равновесия

$$\nabla_{\alpha}T^{\alpha\beta}-b^{\beta}_{\alpha}N^{\alpha}-\varrho h\ddot{v}^{\beta}+p^{\beta}=0 \tag{4.1}$$

$$\nabla_{\alpha}N^{\alpha}+b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta}-\varrho h\ddot{w}+p=0 \tag{4.2}$$

$$\nabla_{\alpha}M^{\alpha\beta}-N^{\beta}-\frac{1}{12}\varrho h^3\ddot{\varphi}^{\beta}+m^{\beta}=0, \tag{4.3}$$

соотношения упругости

$$T^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}BE^{\alpha\beta\gamma\delta}(e_{\gamma\delta}+e_{\delta\gamma}) \tag{4.4}$$

$$M^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}DE^{\alpha\beta\gamma\delta}(\varkappa_{\gamma\delta}+\varkappa_{\delta\gamma}) \tag{4.5}$$

$$N^{\alpha}=\frac{1-\nu}{8k_{(\alpha)}}B(\omega^{\alpha}+\varphi^{\alpha}) \tag{4.6}$$

$$B=\frac{Eh}{1-\nu^2},\quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\quad E^{\alpha\beta\gamma\delta}=a^{\alpha\gamma}a^{\beta\delta}+\nu c^{\alpha\gamma}c^{\beta\delta}, \tag{4.7}$$

статические граничные условия на C_1

$$T^{\alpha\beta}n_{\alpha}n_{\beta}-Q_n=0,\quad T^{\alpha\beta}n_{\alpha}t_{\beta}-Q_s=0,\quad N^{\alpha}n_{\alpha}-Q=0$$

$$M^{\alpha\beta}n_{\alpha}n_{\beta}-K_n=0,\quad M^{\alpha\beta}n_{\alpha}t_{\beta}-K_s=0. \tag{4.8}$$

Геометрические граничные условия и начальные условия имеют соответственно вид (3.16) и (3.17).

5. Уравнения динамической устойчивости. Рассматриваем два возможных состояния движения оболочки. Первое из них пусть будет определено перемещениями $\overset{0}{v}_{\alpha}$, w^0, $\overset{0}{\varphi}_{\alpha}$, кинематическими величинами $\overset{0}{e}_{\alpha\beta}$, $\overset{0}{\omega}_{\alpha}$, $\overset{0}{\varkappa}_{\alpha\beta}$ и усилиями $T_0^{\alpha\beta}$, $M_0^{\alpha\beta}$, N_0^{α}, причем эти величины удовлетворяют уравнениям и соотношениям линейной теории (4.1)—(4.8) при внешних нагрузках $\overset{0}{p}_{\alpha}$, p^0, $\overset{0}{m}_{\alpha}$, краевых усилиях Q_n^0, Q_s^0, Q^0, K_n^0, K_s^0 и начальных перемещениях и скоростях $\bar{v}_{\alpha}^0$, $\bar{w}^0$, $\bar{\varphi}_{\alpha}^0$, $\dot{\bar{v}}_{\alpha}^0$, $\dot{\bar{w}}^0$, $\dot{\bar{\varphi}}_{\alpha}^0$.

Второе возможное состояние движения пусть будет задано величинами $v_{\alpha},\ldots,e_{\alpha\beta},\ldots,T^{\alpha\beta},\ldots$, причем эти величины удовлетворяют нелинейным уравнениям и соотношениям (3.3)—(3.17) при внешних нагрузках $p_{\alpha},\ldots$, краевых усилиях $Q_n,\ldots$, и начальных перемещениях и скоростях $\bar{v}_{\alpha},\ldots,\dot{\bar{v}}_{\alpha},\ldots$.

Предположим, что переход от начального состояния движения ко второму состоянию движения можно осуществить возмущением, обозначенным величинами с индексом 1. Тогда

$$v_{\alpha}=\overset{0}{v}_{\alpha}+\overset{1}{v}_{\alpha},\ldots,\quad e_{\alpha\beta}=\overset{0}{e}_{\alpha\beta}+\overset{1}{e}_{\alpha\beta},\ldots,\quad T^{\alpha\beta}=T_0^{\alpha\beta}+T_1^{\alpha\beta},\ldots. \tag{5.1}$$

Соответственно внешние нагрузки и краевые усилия выражаем в виде

$$\begin{gathered} p_{\alpha}=\overset{0}{p}_{\alpha}+\Delta\overset{0}{p}_{\alpha}+\overset{1}{p}_{\alpha}\\ \cdots\cdots\cdots\\ Q_n=Q_n^0+\Delta Q_n^0+Q_n^1,\\ \cdots\cdots\cdots \end{gathered} \tag{5.2}$$

где $\Delta\overset{0}{p}_{\alpha},\ldots,\Delta Q_n^0,\ldots$ — приращения внешних нагрузок и усилий, обусловленные возмущением; $\overset{1}{p}_{\alpha},\ldots,\overset{1}{Q}_n,\ldots$ — добавочные внешние нагрузки и краевые усилия, вызывающие возмущенное состояние движения.

Начальные условия имеют вид

$$\bar{v}_\alpha = \bar{v}^0_\alpha + \bar{v}^1_\alpha, \ldots, \qquad \dot{\bar{v}}_\alpha = \dot{\bar{v}}^0_\alpha + \dot{\bar{v}}^1_\alpha, \ldots, \tag{5.3}$$

где $\bar{v}^1_\alpha, \ldots, \dot{\bar{v}}^1_\alpha, \ldots$ — добавочные перемещения и скорости в начале движения при $t = t_0$.

Введем величины (5.1)—(5.3) в уравнения (3.3)—(3.17) и сделаем следующие упрощения: 1) отбросим члены второго и высшего порядка возбужденного состояния, 2) считаем, что $\psi_1 = 0$. Учитывая, что величины начального состояния удовлетворяют уравнениям (4.1)—(4.8), получим следующие уравнения и соотношения для определения возмущенного движения.

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned}&\nabla_\alpha \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta} - b^\beta_\alpha \overset{1}{N}{}^\alpha + \nabla_\gamma\left(\overset{0}{T}{}^{\alpha\gamma} \overset{1}{e}{}^{\beta}_{\alpha}\right) + \nabla_\gamma\left(\overset{0}{e}{}^{\beta}_{\alpha} \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}\right) - b^\beta_\gamma \overset{0}{T}{}^{\alpha\gamma} \overset{1}{\omega}_\alpha - \\ &- b^\beta_\gamma \overset{0}{\omega}_\alpha \overset{1}{T}{}^{\alpha\gamma} + \nabla_\alpha\left(\overset{0}{M}{}^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma \overset{1}{\varphi}{}^\beta\right) + \nabla_\alpha\left(\nabla_\gamma \overset{0}{\varphi}{}^\beta \overset{1}{M}{}^{\alpha\gamma}\right) - b^\beta_\gamma b^\vartheta_\alpha \overset{0}{M}{}^{\alpha\gamma} \varphi_\vartheta - \\ &- b^\beta_\gamma b^\vartheta_\alpha \overset{0}{\varphi}_\vartheta \overset{1}{M}{}^{\alpha\gamma} + \nabla_\alpha\left(\overset{0}{N}{}^\alpha \overset{1}{\varphi}{}^\beta\right) + \nabla_\alpha\left(\overset{0}{\varphi}{}^\beta \overset{1}{N}{}^\alpha\right) - \varrho h \ddot{v}^\beta_1 + \Delta p^\beta_0 + p^\beta_1 = 0\end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned}&\nabla_\alpha \overset{1}{N}{}^\alpha + b_{\alpha\beta} \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta} + \nabla_\beta\left(\overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} \overset{1}{\omega}_\alpha\right) + \nabla_\beta\left(\overset{0}{\omega}_\alpha \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta}\right) + \\ &+ b^\gamma_\beta \overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} \overset{1}{e}_{\alpha\gamma} + b^\gamma_\beta \overset{0}{e}_{\alpha\gamma} \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta} + \nabla_\beta\left(b^\gamma_\alpha \overset{0}{M}{}^{\alpha\beta} \overset{1}{\varphi}_\gamma\right) + \\ &+ \nabla_\beta\left(b^\gamma_\alpha \overset{0}{\varphi}_\gamma \overset{1}{M}{}^{\alpha\beta}\right) + b^\gamma_\beta \overset{0}{M}{}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \overset{1}{\varphi}_\gamma + b^\gamma_\beta \nabla_\alpha \overset{0}{\varphi}_\gamma \overset{1}{M}{}^{\alpha\beta} + \\ &+ b^\beta_\alpha \overset{0}{N}{}^\alpha \overset{1}{\varphi}_\beta + b^\beta_\alpha \overset{0}{\varphi}_\beta \overset{1}{N}{}^\alpha - \varrho h \ddot{w}_1 + \Delta p_0 + p_1 = 0\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}&\nabla_\alpha \overset{1}{M}{}^{\alpha\beta} - \overset{1}{N}{}^\beta - \overset{0}{N}{}^\alpha \overset{1}{e}{}^\beta_\alpha - \overset{0}{e}{}^\beta_\alpha \overset{1}{N}{}^\alpha + \nabla_\gamma\left(\overset{0}{M}{}^{\alpha\gamma} \overset{1}{e}{}^\beta_\alpha\right) + \\ &+ \nabla_\gamma\left(\overset{0}{e}{}^\beta_\alpha \overset{1}{M}{}^{\alpha\gamma}\right) - b^\beta_\alpha \overset{0}{M}{}^{\alpha\gamma} \overset{1}{\omega}_\gamma - b^\beta_\alpha \overset{0}{\omega}_\gamma \overset{1}{M}{}^{\alpha\gamma} - \\ &- \frac{1}{12} \varrho h^3 \ddot{\varphi}{}^\beta_1 + \Delta m^\beta_0 + m^\beta_1 = 0.\end{aligned} \tag{5.6}$$

Соотношения упругости имеют вид (4.4)—(4.7). Статические граничные условия будут следующие:

$$\begin{aligned}&\left(\delta^\gamma_\alpha + \overset{0}{e}{}^\gamma_\alpha\right) \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta} n_\beta n_\gamma + \overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} \overset{1}{e}{}^\gamma_\alpha n_\beta n_\gamma + \overset{0}{M}{}^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma \overset{0}{\varphi}{}^\beta n_\alpha n_\beta + \\ &+ \nabla_\gamma \overset{0}{\varphi}{}^\beta \overset{1}{M}{}^{\alpha\gamma} n_\alpha n_\beta + \overset{0}{N}{}^\alpha \overset{1}{\varphi}{}^\beta n_\alpha n_\beta + \overset{0}{\varphi}{}^\beta \overset{1}{N}{}^\alpha n_\alpha n_\beta - \Delta \overset{0}{Q}_n - \overset{1}{Q}_n = 0\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}&\left(\delta^\gamma_\alpha + \overset{0}{e}{}^\gamma_\alpha\right) \overset{1}{T}{}^{\alpha\beta} n_\beta t_\gamma + \overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} \overset{1}{e}{}^\gamma_\alpha n_\beta t_\gamma + \overset{0}{M}{}^{\alpha\gamma} \nabla_\gamma \overset{0}{\varphi}{}^\beta n_\alpha t_\beta + \\ &+ \nabla_\gamma \overset{0}{\varphi}{}^\beta \overset{1}{M}{}^{\alpha\gamma} n_\alpha t_\beta + \overset{0}{N}{}^\alpha \overset{1}{\varphi}{}^\beta n_\alpha t_\beta + \overset{0}{\varphi}{}^\beta \overset{1}{N}{}^\alpha n_\alpha t_\beta - \Delta Q_s - \overset{1}{Q}_s = 0\end{aligned} \tag{5.8}$$

$$N_1^{\alpha} n_\alpha + T_0^{\alpha\beta} \overset{1}{\omega}_\alpha n_\beta + \overset{0}{\omega}_\alpha T_1^{\alpha\beta} n_\beta + b_\alpha^\gamma M_0^{\alpha\beta} \overset{1}{\varphi}_\gamma n_\beta +$$
$$+ b_\alpha^\gamma \overset{0}{\varphi}_\gamma M_1^{\alpha\beta} n_\beta - \Delta Q_0 - Q_1 = 0 \tag{5.9}$$

$$\left(\delta_\alpha^\gamma + e_\alpha^{0\gamma}\right) M_1^{\alpha\beta} n_\gamma n_\beta + M_0^{\alpha\beta} e_\alpha^{1\gamma} n_\gamma n_\beta - \Delta \overset{0}{K_n} - \overset{1}{K_n} = 0 \tag{5.10}$$

$$\left(\delta_\alpha^\gamma + e_\alpha^{0\gamma}\right) M_1^{\alpha\beta} n_\gamma t_\beta + M_0^{\alpha\beta} e_\alpha^{1\gamma} n_\gamma t_\beta - \Delta \overset{0}{K_s} - \overset{1}{K_s} = 0. \tag{5.11}$$

Геометрические граничные условия имеют вид (3.16).
Начальные условия будут:

$$\overset{1}{v}_\alpha (x^\gamma, t_0) = \overline{\overset{1}{v}}_\alpha, \dots, \quad \dot{\overset{1}{v}}_\alpha (x^\gamma, t_0) = \dot{\overline{\overset{1}{v}}}_\alpha, \dots . \tag{5.12}$$

Свойства решения системы (5.3)—(5.6) при соответствующих граничных и начальных условиях позволяют судить об устойчивости начального состояния движения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Eringen C., J. Appl. Mech., 22, No. 4, 563—567 (1955).
2. Medwadowski S. J., J. Appl. Mech., 25, No. 4, 437—443 (1958).
3. Селезов И. Т., Прикл. мех., 5, вып. 4, 444—448 (1959).
4. Herrmann G., Armenakas A. E., J. Engin. Mech. Div., 86, EM 3, 65—94 (1960).
5. Herrmann G., Armenakas A. E., Dynamic behavior of cylindrical shells under initial stress. Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1962, t. 2, N. Y., 1963.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
15/III 1965

L. AINOLA

MITTELINEAARNE TIMOSHENKO TÜÜPI ELASTSETE KOORIKUTE TEOORIA

Esitatakse geomeetriliselt mittelineaarsete koorikute dünaamika täpsustatud teooria lihtsaim variant (3.3)—(3.10). Teooria tuletatakse kolmemõõtmelise elastsusteooria üldistatud Hamiltoni printsiibi (2.1) abil, kasutades paigutuste ja pingete jaoks aproksimatsioone (2.2), (2.3). Mittelineaarse teooria erijuhuna saadakse lineaarne Timoshenko tüüpi koorikute teooria (4.1)—(4.7) üldistes koordinaatides.

Tuletatakse dünaamilise stabiilsuse Timoshenko tüüpi võrrandid (5.4)—(5.6) meelevaldse kooriku jaoks.

L. AINOLA

THE NONLINEAR TIMOSHENKO TYPE THEORY OF ELASTIC SHELLS

The Timoshenko type equations of motion of the geometrically nonlinear shell theory (3.3)—(3.10) is presented. The shell theory is derived from the general Hamilton's principle of three-dimensional elastic theory (2.1) by approximations (2.2), (2.3) for displacements and stresses. As a special case, the linear Timoshenko type shell theory (4.1)—(4.7) in tensor form is given.

The Timoshenko type equation of dynamic stability of elastic shells (5.4)—(5.6) is also found.