EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1964, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1964, № 3

ПРИНЦИП МАЖОРАНТ И МЕТОД ХОРД

С. УЛЬМ,
кандидат физико-математических наук

А. С. Сергеев [3] и Й. В. Шмидт [5, 6] обобщили метод хорд для приближенного решения нелинейных уравнений в линейных нормированных пространствах. Ими доказаны теоремы, дающие достаточные условия для сходимости метода хорд к решению уравнения. В данной статье мы используем для исследования сходимости метода хорд принцип мажорант, успешно примененный Л. В. Канторовичем [1] для метода Ньютона. При этом из доказанных ниже теорем вытекают как частные случаи результаты А. С. Сергеева и Й. В. Шмидта в уточненном виде. Отметим еще, что некоторые соображения о применении принципа мажорант для исследования сходимости метода хорд были опубликованы автором ранее (см. [4]).

Пусть $P(x)$ — нелинейный оператор, переводящий линейное нормированное пространство X в пространство Y того же типа.

Определение 1. Оператор $P(x', x'')$ называется аналогом разделенных разностей первого порядка оператора $P(x)$, если

1° для каждого фиксированного $x', x'' \in X$ оператор $P(x', x'') \in (X \to Y)$, т. е. является линейным оператором;

2° $P(x', x'')(x' - x'') = P(x') - P(x'')$;

3° $P(x, x) = P'(x)$, где $P'(x)$ производная оператора $P(x)$ в смысле Гато.

Отметим, что от своих аргументов $x', x'' \in X$ оператор $P(x', x'')$ зависит в общем нелинейно.

Для приближенного решения уравнения

$$P(x) = 0 \tag{1}$$

рассмотрим итерационные методы

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_1 P(x_n), \tag{2}$$

и

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_n P(x_n), \tag{3}$$

где $\Lambda_n = [P(x_n, x_{n-1})]^{-1}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$; x_0, x_1 — два различных начальных приближения к решению x^* уравнения (1). Методы (2) и (3) являются соответственно модифицированным и основным методами хорд.

Вместе с уравнением (1) рассмотрим вещественное мажорантное уравнение

$$Q(t) = 0 \tag{4}$$

и для его решения методы

$$t_{n+1} = t_n + Q(t_n), \tag{5}$$

$$t_{n+1} = t_n - \frac{Q(t_n)}{Q(t_n, t_{n-1})}, \tag{6}$$

где $n = 1, 2, \ldots$; t_0, t_1 — начальные приближения к решению t^* уравнения (4); $t_0 < t_1 = 0$.

В дальнейшем предположим существование в интересующих нас областях разделенных разностей первого порядка оператора P и функции Q. Предположим, что P (соответственно Q) является непрерывным в окрестности x^* (соответственно t^*). Через E обозначим тождественный оператор банахового пространства X. Через $S[\bar{x}, r]$ обозначим закрытую сферу $\| x - \bar{x} \| \leqslant r$ пространства X.

Вначале докажем некоторые теоремы о сходимости метода (2).

Теорема 1. *Пусть*

1° $\| x_1 - x_0 \| \leqslant -t_0$;

2° *существует* $\Lambda_1 = [P(x_1, x_0)]^{-1}$, *причем* $\| \Lambda_1 P(x_1) \| \leqslant Q(0)$;

3° $\| E - \Lambda_1 P(x', x'') \| \leqslant 1 + Q(t', t'')$, *если* $x', x'' \in S[x_1, t^*]$ *и*

$$\| x' - x'' \| \leqslant t' - t'', \ \| x' - x_1 \| \leqslant t', \ \| x'' - x_1 \| \leqslant t''; \ t', t'' \leqslant t^*;$$

4° *уравнение* (4) *имеет положительное решение.*

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S[x_1, t^*]$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (2) *со скоростью*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant t^* - t_n \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

где t^* — *наименьший положительный корень уравнения* (4);
t_n — *n-ое приближение по методу* (5) *к* t^*.

Доказательство. Прежде всего покажем, что в условиях теоремы последовательность (5) сходится к t^*. Используем принцип полной индукции. Допустим, что

$$0 = t_1 < t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t^*$$

и покажем, что $t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant t^*$.

По формуле (5) $t_{n+1} - t_n = Q(t_n) \geqslant 0$, так как $Q(0) = Q(t_1) > 0$* и t^* — наименьшее положительное решение уравнения (4). Дальше получим

$$t^* - t_{n+1} = t^* - t_n - Q(t_n) = t^* - t_n + [Q(t^*) - Q(t_n)] =$$
$$= [1 + Q(t^*, t_n)](t^* - t_n) \geqslant 0,$$

так как по условию 3° $1 + Q(t^*, t_n) \geqslant 0$. Последовательность $\{t_n\}$ является монотонно возрастающей и ограниченной. Итак, существует $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = \bar{t}$. Переходя к пределу в (5) $(n \to \infty)$, получим, что $Q(\bar{t}) = 0$, т. е. $\bar{t} = t^*$.

Из условия 2° вытекает, что $\| x_2 - x_1 \| = \| \Lambda_1 P(x_1) \| \leqslant Q(0) = t_2 - t_1$. Используем опять принцип полной индукции. Допустив, что $\| x_k - x_{k-1} \| \leqslant t_k - t_{k-1}$ $(k \leqslant n)$, покажем, что $\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant t_{n+1} - t_n$.

* Если $Q(t_1) = 0$, то начальное приближение x_1 является решением уравнения (1).

На основании формулы (2) и определения 1

$$
\begin{aligned}
\| x_{n+1} - x_n \| &= \| \Lambda_1 P(x_n) \| = \\
&= \| \Lambda_1 \{ P(x_{n-1}) + P(x_1, x_0)(x_n - x_{n-1}) + \\
&+ [P(x_n, x_{n-1}) - P(x_1, x_0)](x_n - x_{n-1}) \} \| = \\
&= \| \Lambda_1 [P(x_n, x_{n-1}) - P(x_1, x_0)](x_n - x_{n-1}) \| \leqslant \\
&\leqslant \| E - \Lambda_1 P(x_n, x_{n-1}) \| \, \| x_n - x_{n-1} \|. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

С другой стороны

$$
\begin{aligned}
t_{n+1} - t_n &= Q(t_n) = Q(t_{n-1}) + Q(t_n, t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) = \\
&= t_n - t_{n-1} + Q(t_n, t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) = \\
&= [1 + Q(t_n, t_{n-1})](t_n - t_{n-1}). \qquad (8)
\end{aligned}
$$

По условию 3° $\| E - \Lambda_1 P(x_n, x_{n-1}) \| \leqslant 1 + Q(t_n, t_{n-1})$, так как $\| x_n - x_{n-1} \| \leqslant t_n - t_{n-1}$ и очевидным образом $\| x_n - x_1 \| \leqslant t_n \leqslant t^*$, $\| x_{n-1} - x_1 \| \leqslant t_{n-1} \leqslant t^*$. Значит, $\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant t_{n+1} - t_n$. Отсюда сразу вытекают оценки: $\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant t_{n+p} - t_n$. Переходя здесь к пределу $(p \to \infty)$, заключаем существование x^* и оценки $\| x^* - x_n \| \leqslant t^* - t_n$. Переходя к пределу $(n \to \infty)$ в формуле (2), убеждаемся, что x^* является решением уравнения (1).

Теорема доказана.

Взяв в качестве мажорантного уравнения (4) уравнение

$$
Q(t) \equiv Kt^2 - (1 - K\delta)t + \eta = 0, \qquad (9)
$$

получим, что справедлива (как следствие из теоремы 1)

Теорема 2. *Пусть*

1° $\| x_1 - x_0 \| \leqslant \delta$;

2° $\| \Lambda_1 P(x_1) \| \leqslant \eta$;

3° для каждого $x', x'' \in S[x_1, t^*]$ справедливо

$\| E - \Lambda_1 P(x', x'') \| \leqslant K(\| x' - x_1 \| + \| x'' - x_0 \|)$;

4° $2\sqrt{K\eta} + K\delta \leqslant 1$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S[x_1, t^*]$ *решение* x^*, *к которому последовательность* (2) *сходится. Справедливы оценки:* $\| x^* - x_n \| \leqslant t^* - t_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, *где*

$$
t^* = (2K)^{-1}[1 - K\delta - \sqrt{(1 - K\delta)^2 - 4K\eta}];
$$

t_n — *n-ое приближение по методу* (5) *к решению* t^* *уравнения* (9); $t_0 = -\delta$; $t_1 = 0$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что все условия теоремы 1 выполнены. Неравенство $2\sqrt{K\eta} + K\delta \leqslant 1$ гарантирует существование положительного решения уравнения (9). Так как $Q(0) = \eta$, то выполнено и условие 2° теоремы 1. Если $x', x'' \in S[x_1, t^*]$, $\| x' - x_1 \| \leqslant t'$ и $\| x'' - x_1 \| \leqslant t''$, тогда $\| E - \Lambda_1 P(x', x'') \| \leqslant K(\| x' - x_1 \| + \| x'' - x_0 \|) \leqslant K(t' + t'' + \delta) = 1 + Q(t', t'')$, т. е. выполнено и условие 3° теоремы 1. Выполнение условия 1° теоремы 1 очевидно.

Определение 2. Оператор $P(x', x'', x''')$ называется аналогом разделенных разностей второго порядка оператора $P(x)$, если

1° для каждого фиксированного $x', x'', x''' \in X$ оператор $P(x', x'', x''')$ является билинейным оператором из пространства X в пространство Y.

2° $P(x', x'', x''')\,(x' - x''') = P(x', x'') - P(x'', x''')$.

3° $P(x, x, x) = \frac{1}{2} P''(x)$, где $P''(x)$ — вторая производная оператора $P(x)$ в смысле Гато.

Замечание 1. Если существует $P(x', x'', x''')$, то условие 3° в теореме 2 можно заменить условием
3°′ $\|\Lambda_1 P(x', x'', x''')\| \leqslant K$ для каждого $x', x'', x''' \in S[x_1; \max\{\delta; t^*\}]$.

Действительно, если справедлива 3°′, то справедлива и 3°:

$$\begin{aligned}\|E - \Lambda_1 P(x', x'')\| &= \|\Lambda_1 [P(x_1, x_0) - P(x', x'')]\| = \\ &= \|\Lambda_1 [P(x', x'') - P(x'', x_1) + P(x'', x_1) - P(x_1, x_0)]\| = \\ &= \|\Lambda_1 [P(x', x'', x_1)(x' - x_1) + P(x'', x_1, x_0)(x'' - x_0)]\| \leqslant \\ &\leqslant K(\|x' - x_1\| + \|x'' - x_0\|).\end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть*

1° $\|\Lambda_1 P(x_0)\| \leqslant Q(t_0)$;

2° $\|\Lambda_1 P(x_1)\| \leqslant Q(0)$; $Q(0, t_0) = -1$;

3° $\|E - \Lambda_1 P(x', x'')\| \leqslant 1 + Q(t', t'')$, *если* $x', x'' \in S[x_1, t^*]$
и $\|x' - x''\| \leqslant t' - t''$, $\|x' - x_0\| \leqslant t' - t_0$, $\|x'' - x_1\| \leqslant t''$; $t', t'' \leqslant t^*$;

4° *уравнение* (4) *имеет положительное решение.*

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S[x_1; t^*]$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (2) *со скоростью* $\|x^* - x_n\| \leqslant t^* - t_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, *где* t^* — *наименьший положительный корень уравнения* (4); t_n — *n-ое приближение по методу* (5) *к* t^*.

Доказательство в основном совпадает с доказательством теоремы 1. Только в данном случае не имеет место неравенство $\|x_1 - x_0\| \leqslant t_1 - t_0$, и поэтому возникают некоторые изменения в доказательстве неравенств $\|E - \Lambda_1 P(x_n, x_{n-1})\| \leqslant 1 + Q(t_n, t_{n-1})$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Но последние легко установимы, так как в данном случае имеет место неравенство $\|x_2 - x_0\| \leqslant t_2 - t_0$. Действительно

$$\begin{aligned}\|x_2 - x_0\| &= \|x_1 - \Lambda_1 P(x_1) - x_0\| = \|\Lambda_1 [P(x_1, x_0)(x_1 - x_0) - P(x_1)]\| = \\ &= \|\Lambda_1 [P(x_1) - P(x_0) - P(x_1)]\| = \|\Lambda_1 P(x_0)\| \leqslant Q(t_0) = \\ &= -Q(0, t_0)(-t_0) + Q(0) = Q(0) - t_0 = t_2 - t_0.\end{aligned}$$

Взяв в качестве мажорантного уравнения (4) уравнение

$$Q(t) \equiv Kt^2 - [1 + K(\eta_1 - \eta_0)]t + \eta_1 \tag{10}$$

получим, что справедлива (как следствие из теоремы 3)

Теорема 4. *Пусть*

1° $\|\Lambda_1 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

2° $\|\Lambda_1 P(x_1)\| \leqslant \eta_1$; $\eta_1 \leqslant \eta_0$;

3° $\|E - \Lambda_1 P(x', x'')\| \leqslant K(\|x' - x_0\| + \|x'' - x_1\|)$ *для каждого* $x', x'' \in S[x_1, t^*]$;

4° $\sqrt{K}(\sqrt{\eta_1} + \sqrt{\eta_0}) \leqslant 1$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S[x_1; t^*]$ *решение* x^*, *к которому последовательность* (2) *сходится. Справедливы оценки:* $\|x^* - x_n\| \leqslant t^* - t_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, *где*

$t^* = (2K)^{-1}\{1 + K(\eta_1 - \eta_0) - \sqrt{[1 + K(\eta_1 - \eta_0)]^2 - 4K\eta_1}\}$; t_n — *n-ое приближение по методу* (5) *к решению* t^* *уравнения* (10);

$t_0 = \eta_1 - \eta_0$; $t_1 = 0$.

Замечание 2. Если существует $P(x', x'', x''')$, то аналогично замечанию 1 нетрудно показать, что условие 3° теоремы 4 можно заменить условием

3°′ $\|\Lambda_1 P(x', x'', x''')\| \leqslant K$ для каждого

$$x', x'', x''' \in S[x_1; \max\{\|x_1 - x_0\|; t^*\}].^*$$

Перейдем к исследованию сходимости основного метода хорд (3). Во первых докажем теорему, опубликованную ранее автором [4] без доказательства.

Теорема 5. *Пусть*

1° $\|x_1 - x_0\| \leqslant - t_0$;

2° $\|\Lambda_1 P(x_1)\| \leqslant Q(0)$; $Q(0, t_0) = -1$;

3° $\|\Lambda_1[P(x', x'') - P(x'', x''')]\| \leqslant Q(t', t'') - Q(t'', t''')$, *если* $x', x'', x''' \in S[x_0; t^* - t_0]$ *и* $\|x' - x''\| \leqslant t' - t''$, $\|x'' - x'''\| \leqslant t'' - t'''$; $t_0 \leqslant t''', t'', t' \leqslant t^*$;

4° *уравнение* (4) *имеет положительное решение.*

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S[x_0; t^* - t_0]$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (3) *со скоростью* $\|x^* - x_n\| \leqslant t^* - t_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, *где* t^* — *наименьший положительный корень уравнения* (4); t_n — *n-ое приближение по методу* (6) *к* t^*.

Доказательство. По индукции покажем сходимость последовательности (6) к t^*. Допустив, что $t_0 < t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant t^*$, покажем, что $t_n \leqslant t_{n+1} \leqslant t^*$. Имеют место следующие свойства:

1) $Q(t) > 0$, если $0 \leqslant t < t^*$.

Действительно, $Q(0) > 0$ и $Q(t)$ — непрерывна.

2) $Q(t^*, t') \geqslant Q(t', t'')$, если $0 \leqslant t'' \leqslant t' \leqslant t^*$.

Вытекает непосредственно из условия 3°.

3) $Q(t', t'') < 0$, если $0 \leqslant t'' \leqslant t' < t^*$.

Действительно, $Q(t', t'') \leqslant Q(t^*, t') = \frac{Q(t^*) - Q(t')}{t^* - t'} = -\frac{Q(t')}{t^* - t'} < 0$.

Используя эти свойства, легко получим

$$t_{n+1} - t_n = -[Q(t_n, t_{n-1})]^{-1} Q(t_n) \geqslant 0$$

---

* При этом требуется симметричность оператора $P(x_1, x_0)$, т. е. $P(x_1, x_0) = P(x_0, x_1)$.

и

$$t^* - t_{n+1} = t^* - [Q(t_n, t_{n-1})]^{-1} Q(t^*) - t_n + [Q(t_n, t_{n-1})]^{-1} Q(t_n) =$$
$$= t^* - t_n - [Q(t_n, t_{n-1})]^{-1} Q(t^*, t_n)(t^* - t_n) =$$
$$= \left[1 - \frac{Q(t^*, t_n)}{Q(t_n, t_{n-1})}\right](t^* - t_n) \geqslant 0.$$

Итак, последовательность $\{t_n\}$ монотонно возрастает и ограничена. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \bar{t} \leqslant t^*$. Переходя к пределу в равенствах (6), получим:

$$\bar{t} = \bar{t} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{Q(t_n, t_{n-1})} Q(\bar{t}),$$

откуда $Q(\bar{t}) = 0$, т. е. $\bar{t} = t^*$.

Из условия 2° получим

$$\|x_2 - x_1\| = \|\Lambda_1 P(x_1)\| \leqslant Q(0) = t_1 - t_0 = -t_0.$$

Поскольку по условию 3°

$$\|\Lambda_1[P(x_2, x_1) - P(x_1, x_0)]\| \leqslant Q(t_2, 0) - Q(0, t_0) = Q(t_2, 0) + 1 < 1,$$

то на основании теоремы Банаха существует $\Lambda_2 = [P(x_2, x_1)]^{-1}$ и

$$\|\Lambda_2 P(x_1, x_0)\| \leqslant \|\{E - \Lambda_1[P(x_1, x_0) - P(x_2, x_1)]\}^{-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{1}{Q(t_2, 0)} = \frac{Q(0, t_0)}{Q(t_2, 0)}.$$

Справедливость оценок $\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant t_n - t_{n-1}$ и $\|\Lambda_n P(x_{n-1}, x_{n-2})\| \leqslant \frac{Q(t_{n-1}, t_{n-2})}{Q(t_n, t_{n-1})}$ для любого n покажем по индукции. Получим

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|\Lambda_n P(x_n)\| = \|\Lambda_n \{P(x_{n-1}) + P(x_{n-1}, x_{n-2})(x_n - x_{n-1}) +$$
$$+ [P(x_n, x_{n-1}) - P(x_{n-1}, x_{n-2})](x_n - x_{n-1})\}\| =$$
$$= \|\Lambda_n P(x_{n-1}, x_{n-2}) \Lambda_{n-1} P(x_{n-2}, x_{n-3}) \ldots \Lambda_2 P(x_1, x_0) \Lambda_1 [P(x_n, x_{n-1}) -$$
$$- P(x_{n-1}, x_{n-2})](x_n - x_{n-1})\| \leqslant -[Q(t_n, t_{n-1})]^{-1} Q(t_{n-1}, t_{n-2})[Q(t_{n-1}, t_{n-2})]^{-1} \times$$
$$\times Q(t_{n-2}, t_{n-3}) \ldots [Q(t_2, 0)]^{-1} Q(0, t_0)[Q(0, t_0)]^{-1}[Q(t_n, t_{n-1}) -$$
$$- Q(t_{n-1}, t_{n-2})](t_n - t_{n-1}) = -[Q(t_n, t_{n-1})]^{-1}[Q(t_n, t_{n-1}) -$$
$$- Q(t_{n-1}, t_{n-2})](t_n - t_{n-1}) = t_{n+1} - t_n,$$

и поскольку

$$\|\Lambda_n [P(x_{n+1}, x_n) - P(x_n, x_{n-1})]\| =$$
$$= \|\Lambda_n P(x_{n-1}, x_{n-2}) \Lambda_{n-1} \ldots P(x_1, x_0) \Lambda_1 [P(x_{n+1}, x_n) - P(x_n, x_{n-1})]\| \leqslant$$
$$\leqslant -[Q(t_n, t_{n-1})]^{-1} Q(t_{n-1}, t_{n-2})[Q(t_{n-1}, t_{n-2})]^{-1} \ldots Q(0, t_0)[Q(t_{n+1}, t_n) -$$
$$- Q(t_n, t_{n-1})] = -[Q(t_n, t_{n-1})]^{-1}[Q(t_{n+1}, t_n) - Q(t_n, t_{n-1})] =$$
$$= 1 - [Q(t_n, t_{n-1})]^{-1} Q(t_{n+1}, t_n) < 1,$$

то на основании теоремы Банаха существует Λ_{n+1} и

$$\|\Lambda_{n+1} P(x_n, x_{n-1})\| = \|\{E - \Lambda_n [P(x_n, x_{n-1}) - P(x_{n+1}, x_n)]\}^{-1}\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1 - \{1 - [Q(t_n, t_{n-1})]^{-1} Q(t_{n+1}, t_n)\}} = \frac{Q(t_n, t_{n-1})}{Q(t_{n+1}, t_n)},$$

что и требовалось доказать.

Теперь легко получаются оценки

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant t_{n+p} - t_n,$$

откуда при предельном переходе ($p \to \infty$), получим

$$\|x^* - x_n\| \leqslant t^* - t_n.$$

Следует еще показать, что x^* является решением уравнения (1).

Рассмотрим равенство

$$\Lambda_1 P(x_n) + \Lambda_1 P(x_n, x_{n-1})(x_{n+1} - x_n) = 0. \tag{11}$$

Так как

$$\|\Lambda_1 P(x_n, x_{n-1})\| = \|\Lambda_1 [P(x_n, x_{n-1}) - P(x_{n-1}, x_{n-2}) +$$
$$+ P(x_{n-1}, x_{n-2}) - \ldots - P(x_1, x_0) + P(x_1, x_0)]\| \leqslant Q(t_n, t_{n-1}) -$$
$$- Q(t_{n-1}, t_{n-2}) + Q(t_{n-1}, t_{n-2}) - \ldots - Q(0, t_0) + 1 = 2 + Q(t_n, t_{n-1}) < +\infty,$$

то переходя к пределу ($n \to \infty$) в (11) и используя непрерывность $P(x)$, получим

$$\Lambda_1 P(x^*) = 0 \quad \text{или} \quad P(x^*) = 0.$$

Теорема доказана.

Взяв в качестве мажорантного уравнения $Q(t) = 0$ уравнение (9), получим, что справедлива (как следствие из теоремы 5)

Теорема 6. *Пусть*

1° $\|x_1 - x_0\| \leqslant \delta$;

2° $\|\Lambda_1 P(x_1)\| \leqslant \eta$;

3° $\|\Lambda_1 [P(x', x'') - P(x'', x''')]\| \leqslant K \|x' - x'''\|$ *для каждого* $x', x'', x''' \in S[x_0; t^* + \delta]$;

4° $2\sqrt{K\eta} + K\delta \leqslant 1$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S[x_0; t^* + \delta]$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (3) *со скоростью* $\|x^* - x_n\| \leqslant t^* - t_n$ ($n = 0, 1, \ldots$), *где* t^* — *наименьший положительный корень уравнения* (9); t_n — *n-ое приближение по методу* (6) *к решению* t^*; $t_0 = -\delta$; $t_1 = 0$.

Замечание 3. Если вместо условия 3° теоремы 6 требовать выполнение более общего условия (ср. [5, 6])

$$3°' \quad \|\Lambda_1[P(x', x'') - P(x'', x''')]\| \leqslant$$
$$\leqslant a\|x' - x'''\| + b\|x' - x''\| + b\|x'' - x'''\|$$

для каждого $x', x'', x''' \in S[x_0; t^* + \delta]$, то утверждения теоремы 6 остаются справедливыми, если в них и в уравнении (9) заменить K на $a + b$.

Действительно, если $\|x' - x''\| \leqslant t' - t''$ и $\|x'' - x'''\| \leqslant t'' - t'''$, то

$$\|\Lambda_1 [P(x', x'') - P(x'', x''')]\| \leqslant a\|x' - x'''\| + b\|x' - x''\| + b\|x'' - x'''\| \leqslant$$
$$\leqslant a(t' - t''') + b(t' - t'') + b(t'' - t''') = (a+b)(t' - t''')$$

и следовательно можно выбрать

$$Q(t) = (a+b)t^2 - [1 - (a+b)\delta]t + \eta. \qquad (12)$$

В этом виде теорема 6 уточняет по существу результат Й. В. Шмидта [5, 6].

Аналогично тому, как теорема 3 получена из теоремы 1, из теоремы 5 получается

Теорема 7. *Пусть*

1° $\|\Lambda_1 P(x_0)\| \leqslant Q(t_0)$; $Q(0, t_0) = -1$;

2° $\|\Lambda_1 P(x_1)\| \leqslant Q(0)$;

3° $\|\Lambda_1[P(x', x'') - P(x'', x''')]\| \leqslant Q(t', t'') - Q(t'', t''')$, *если* $x', x'', x''' \in S[x_1; \max\{\|x_1 - x_0\|; t^*\}]$ и $\|x' - x''\| \leqslant t' - t''$, $\|x' - x'''\| \leqslant t' - t'''$; $t_0 \leqslant t''', t'', t' \leqslant t^*$;

4° *уравнение* (4) *имеет положительное решение.*

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S[x_1; \max\{\|x_1 - x_0\|; t^*\}]$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (3) *со скоростью* $\|x^* - x_n\| \leqslant t^* - t_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, *где* t^* — *наименьший положительный корень уравнения* (4); t_n — *n-ое приближение по методу* (6) *к* t^*.

Взяв в качестве мажорантного уравнения $Q(t) = 0$ уравнение (10), получим, что справедлива (как следствие из теоремы 7)

Теорема 8. *Пусть*

1° $\|\Lambda_1 P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

2° $\|\Lambda_1 P(x_1)\| \leqslant \eta_1$; $\eta_1 \leqslant \eta_0$;

3° $\|\Lambda_1[P(x', x'') - P(x'', x''')]\| \leqslant K\|x' - x'''\|$ *для каждого* $x', x'', x''' \in S[x_1; \max\{\|x_1 - x_0\|; t^*\}]$;

4° $\sqrt{K}(\sqrt{\eta_1} + \sqrt{\eta_0}) \leqslant 1$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S[x_0; t^* + \eta_0 - \eta_1]$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* (3) *со скоростью* $\|x^* - x_n\| \leqslant t^* - t_n (n = 0, 1, \ldots)$, *где* t^* — *наименьший положительный корень уравнения* (10); t_n — *n-ое приближение по методу* (6) *к решению* t^*; $t_0 = \eta_1 - \eta_0$; $t_1 = 0$.

Замечание 4. Теоремы 6 и 8 остаются справедливыми, если в них условие 3° заменить условием
$\|\Lambda_1 P(x', x'', x''')\| \leqslant K$ для каждого x', x'', x''' соответственно в сферах $S[x_0; t^* + \delta]$ и $S[x_1; \max\{\|x_1 - x_0\|; t^*\}]$.

Как уже отмечено автором ранее [4], теорема 8 уточняет результаты А. С. Сергеева [3].

Докажем еще две теоремы о сходимости метода (2) в предположении, что известны существование и область расположения решения x^* уравнения (1).

Теорема 9. *Пусть*

1° $\|x^* - x_1\| \leqslant t^* - t_1$;

2° $\|E - \Lambda_1 P(x^*, x)\| \leqslant 1 + Q(t^*, t)$, *если* $\|x^* - x\| \leqslant t^* - t \leqslant t^* - t_1$;

3° *уравнение* (4) *не имеет решений в промежутке* $t_1 < t < t^*$;

4° $Q(t_1) > 0$.

Тогда последовательность (2) *сходится к решению* x^* *уравнения* (1), *причем* $\|x^* - x_n\| \leqslant t^* - t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *где* t^* — *наименьшее положительное решение уравнения* (4): t_n — *n-ое приближение к решению* t^* *по методу* (5); $t_1 = 0$.

Доказательство. По условию 1° $\|x^* - x_1\| \leqslant t^* - t_1 = t^*$. Для доказательства неравенств $\|x^* - x_n\| \leqslant t^* - t_n$ для любого n используем принцип полной индукции

$$\|x^* - x_n\| = \|x^* - x_{n-1} + \Lambda_1 P(x_{n-1}) - \Lambda_1 P(x^*)\| =$$
$$= \|[E - \Lambda_1 P(x^*, x_{n-1})](x^* - x_{n-1})\| \leqslant$$
$$\leqslant [1 + Q(t^*, t_{n-1})](t^* - t_{n-1}) = t^* - t_{n-1} - Q(t_{n-1}) = t^* - t_n.$$

На основании полученных оценок последовательность $\{t_n\}$ ограничена ($\leqslant t^*$). Так как по условиям 3° и 4° функция $Q(t)$ положительна в промежутке $t_1 \leqslant t < t^*$, то $t_{n+1} = t_n + Q(t_n) \geqslant t_n$, т. е. $\{t_n\}$ является и монотонно возрастающей. Итак, существует $\lim t_n = t^*$. Переходя к пределу $(n \to \infty)$ в (4), получим $\bar{t} = \bar{t} + Q(\bar{t})$ или $Q(\bar{t}) = 0$ или $\bar{t} = t^*$. Следовательно $\lim x_n = x^*$. Теорема доказана.

Взяв в качестве мажорантного уравнения $Q(t) = 0$ уравнение

$$Q(t) = [1 - K_2(2t^* - t + \delta) - K_3 t^*](t^* - t) \tag{13}$$

получим, что справедлива (как следствие из теоремы 9)

Теорема 10. *Пусть*

1° *уравнение* (1) *имеет решение в сфере* $\|x^* - x_1\| \leqslant t^*$;

2° $\|x_1 - x_0\| \leqslant \delta$;

3° а) $\|E - \Lambda_1 P(x, x_1)\| \leqslant K_1 \|x - x_0\|$, *если* $x \in S[x_1, t^*]$;

б) $\|E - \Lambda_1 P(x', x'')\| \leqslant K_2 \|x'' - x_0\| + K_3 \|x' - x_1\|$, *если* $x' \in S[x_1, t^*]$ *и* $x'' \in S[x_1, 2t^* - t_2]$;

4° $K_2(1 + K_1 t^*)(t^* + \delta) + K_3 t^* < 1$.

Тогда последовательность (2) *сходится к единственному в сфере* $\|x - x_1\| \leqslant t^*$ *решению* x^* *уравнения* (1). *Справедливы оценки*: $\|x^* - x_2\| \leqslant K_1(t^* + \delta) t^*$; $\|x^* - x_n\| \leqslant t^* - t_n$ $(n = 3, 4, \ldots)$, *где* $t_{n+1} = t_n + Q(t_n)$ $(n = 2, 3, \ldots)$; $t_2 = [1 - K_1(t^* + \delta)] t^*$.

Доказательство. Так как

$$x^* - x_2 = x^* - x_1 + \Lambda_1 P(x_1) - \Lambda_1 P(x^*) = [E - \Lambda_1 P(x^*, x_1)](x^* - x_1),$$

то

$$\|x^* - x_2\| \leqslant K_1(t^* + \delta) t^* = t^* - t_2.$$

Теперь применим теорему 9, рассмотрев в (2) и (5) в качестве начальных приближений соответственно x_2 и t_2. Так как сфера $\|x^* - x\| \leqslant t^* - t_2$ содержится в сфере $\|x - x_1\| \leqslant 2t^* - t_2$, то при $\|x^* - x\| \leqslant t^* - t$

$$\|E - \Lambda_1 P(x^*, x)\| \leqslant K_2 \|x - x_0\| + K_3 \|x^* - x_1\| \leqslant$$
$$\leqslant K_2(\|x - x^*\| + \|x^* - x_0\|) + K_3 \|x^* - x_1\| \leqslant$$
$$\leqslant K_2(2t^* - t + \delta) + K_3 t^* = 1 + Q(t^*, t),$$

т. е. условие 2° теоремы 9 выполнено. Условие 4° данной теоремы соответствует условию $Q(t_2) > 0$. Уравнение (13) не имеет решений в промежутке $t_2 < t < t^*$.

Итак, все условия теоремы 9 выполнены и следовательно $\lim x_n = x^*$. Легко видеть, что решение x^* является единственным в сфере $\|x - x_1\| \leqslant t^*$.

Теорема доказана.

Замечание 5. Из теорем 2, 4, 6, 8, 10 вытекает по существу в предельном случае ($x_1 = x_0$, т. е. $\delta = 0$ и $\eta_1 = \eta_0 = \eta$; $P(x, x, x) = \frac{1}{2} P''(x)$, т. е. если K, K_1, K_2, K_3 заменить $\frac{1}{2}K$) основные утверждения теорем о сходимости метода Ньютона (ср. [1, 2]). Итак, вышеизложенные теоремы можно рассматривать как обобщения теорем Л. В. Канторовича и И. П. Мысовских о сходимости метода Ньютона, который является предельным случаем метода хорд.

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. Н., Вестник ЛГУ, 2, № 7, 68—103 (1957).
2. Мысковских И. П., Вестник ЛГУ, № 11, 25—48 (1953).
3. Сергеев А. С., Сибирский матем. журнал, 2, № 2, 282—289 (1961).
4. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 12, № 1, 24—30 (1963).
5. Schmidt J. W., Z. angew. Math. und Mech., 41, Sonderheft, 61—63 (1961).
6. Schmidt J. W., Z. angew. Math. und Mech., 43, Heft 1/2, 1—8 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
27. II 1964

MAJORANTIDE PRINTSIIP JA KÕÕLUDE MEETOD

S. Ulm,
füüsika-matemaatikateaduste kandidaat

Resümee

Majorantide printsiibi [1] abil tõestatakse rida teoreeme kõõlude meetodi (2, 3) koonduvusest lineaarses normeeritud ruumis. Teoreemid 6 ja 8 täpsustavad vastavalt J. W. Schmidti [5,6] ja A. S. Sergejevi [3] tulemusi. Tõestatud teoreeme võib ühtlasi vaadelda Newtoni meetodi koonduvusteoreemide [1,2] üldistustena.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
27. II 1964

THE PRINCIPLE OF MAJORANTS AND THE SECANT METHOD

S. Ulm

Summary

Using the principle of majorants, some theorems on the convergence of the secant method are proved in the linear normed spaces. The results of J. W. Schmidt [5,6] and A. S. Sergeyev [3] are made more precise by theorems 6 and 8 respectively. The proved theorems may also be considered as generalizations of the theorems on the convergence of Newton's method [1,2].

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Cybernetics

Received
Feb. 27th, 1964