EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1964, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1964, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1964.3.05

ИЗГИБАНИЕ МИНИМАЛЬНОЙ КОНГРУЭНЦИИ V_3 В R_4 *

Л. ТУУЛМЕТС

Конгруэнцией в эвклидовом пространстве R_4 (в собственноэвклидовом пространстве $^0R_4$ или в псевдоэвклидовом пространстве $^1R_4$) называется любая гиперповерхность V_3 ранга 2 в R_4, т. е. любая гиперповерхность V_3, касательная плоскость которой зависит только от двух параметров. Известно, что касательные плоскости такой поверхности V_3 являются касательными вдоль прямолинейных образующих.

Конгруэнция V_3 называется минимальной конгруэнцией, если гиперповерхность V_3 минимальна в смысле известного вариационного определения ([5], стр. 100).

Из теории изгибания многомерных поверхностей известно, что гиперповерхность V_{n-1} в R_n допускает истинное изгибание в том и только в том случае, если ее ранг не больше двух ([5], стр. 159). С другой стороны, в теории минимальных поверхностей V_2 в $^0R_3$ особый интерес представляет истинное изгибание минимальной поверхности в классе минимальных же поверхностей.

В настоящей статье доказывается, что минимальная конгруэнция V_3 в R_4 допускает непрерывное истинное изгибание в классе минимальных конгруэнций V_3 в R_4.

1. Поверхность V_m в пространстве ^0R_n называется минимальной, если вариация объема ее области при закрепленной границе равна нулю. Это определение равносильно требованию равенства нулю вектора средней кривизны во всех точках поверхности (теорема Липшица):

$$\mathfrak{H} = g^{ab} b^{\alpha}_{ab} \mathfrak{e}_{\alpha} = 0 \tag{1}$$

$$(a, b, \ldots = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad \alpha, \beta, \ldots = m, m+1, \ldots, n-1).$$

В пространстве ^1R_n поверхности V_m, характеризуемые равенством (1), называются также минимальными.

Минимальные конгруэнции V_3 в $^0R_4$ рассматривались в статье [4]. Там было доказано, что минимальные конгруэнции существуют и характеризуются как двухпараметрические семейства прямых тем, что дифференциальная окрестность произвольной прямолинейной образующей имеет точно такое же строение, как у изотропной конгруэнции в пространстве $^0R_3$. Соответствующие результаты из [4] известным

* Работа выполнена под руководством доц. Ю. Лумисте.

образом обобщаются на случай таких конгруэнций V_3 в ${}^1R_4$*, образующие которых имеют мнимоединичный направляющий вектор (временно-подобное направление).

2. К каждой точке M_0 конгруэнции V_3 в R_4 (т. е. в ${}^0R_4$ или в ${}^1R_4$) присоединяем ортонормированный подвижный репер так, чтобы единичный (или мнимоединичный) вектор $\mathfrak{e}_0$ был направлен вдоль образующей, единичные векторы $\mathfrak{e}_i$ $(i, j, \ldots = 1, 2)$, были ортогональны к нему и лежали в касательной плоскости, а единичный вектор $\mathfrak{e}_3$ был направлен вдоль нормали к поверхности V_3 в точке M_0 [1, 2]. Тогда в формулах

$$d\mathfrak{M} = \omega^I \mathfrak{e}_I, \qquad d\mathfrak{e}_I = \omega^K{}_I \mathfrak{e}_K, \qquad (I, J, K, \ldots = 0, 1, 2, 3) \tag{2}$$

инфинитезимального смещения подвижного репера имеем

$$\begin{gathered} \omega^3 = 0, \qquad \omega^I{}_J = -\omega^J{}_I, \quad I \neq J, \quad \omega^I{}_I = 0 \quad \text{(нет суммирования)}, \\ \omega^0_\varrho = \varepsilon\omega^\varrho_0, \qquad (\varrho, \sigma, \ldots = 1, 2, 3), \qquad \text{где } \varepsilon = -(\mathfrak{e}_0\mathfrak{e}_0) = \pm 1. \end{gathered} \tag{3}$$

Если продолжить уравнение $\omega^3 = 0$ и учесть, что при перемещении вдоль образующей векторы $\mathfrak{e}_0$ и $\mathfrak{e}_3$ не меняются, то получим пфаффовы уравнения конгруэнции V_3 в следующем виде:

$$\omega^3 = 0, \quad \omega^3{}_0 = 0, \quad \omega^i{}_0 = a^i{}_j\omega^j, \qquad \omega^3{}_i = b_{ij}\omega^j, \tag{4}$$

где $b_{ij} = b_{ji}$, $\quad (i, j, k, \ldots = 1, 2)$.

При продолжении уравнения $\omega^3{}_0 = 0$ получим конечное соотношение

$$a^i{}_j b_{ik} + a^i{}_k b_{ij} = 0, \tag{5}$$

а остальные уравнения из (5) дают [1]

$$\begin{aligned} da^i{}_k &= a^i{}_l\omega^l{}_k - a^j{}_k\omega^i{}_j - a^i{}_j a^j{}_k\,\omega^0 + a^i{}_{kj}\omega^j, \\ db_{ij} &= b_{lk}\,\omega^k{}_j + b_{kj}\omega^k{}_i - a^k{}_j b_{ik}\,\omega^0 + b_{ijk}\omega^k. \end{aligned} \tag{6}$$

В выбранном ортонормированном репере условие минимальности (1) конгруэнции V_3 в R_4 имеет, в силу (4), вид

$$b_{11} + b_{22} = 0. \tag{7}$$

Дифференцирование последнего соотношения (7), в силу (6), дает

$$b_{ik}a^k{}_i = 0. \tag{8}$$

В силу (5—8) пфаффовы уравнения (4) становятся уравнениями минимальной конгруэнции V_3 в R_4 и примут следующий вид (ср. [4]):

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, && \omega^3{}_0 = 0, \\ &\omega^1{}_0 = s\omega^1 + t\omega^2, && \omega^3{}_1 = \mathfrak{f}\omega^1 + c\omega^2, \\ &\omega^2{}_0 = -t\omega^1 + s\omega^2, && \omega^3{}_2 = c\omega^1 - \mathfrak{f}\omega^2, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$s = a^1{}_1, \qquad t = a^1{}_2, \qquad \mathfrak{f} = b_{11}, \qquad c = b_{12}. \tag{10}$$

В дальнейшем предполагаем, что минимальная конгруэнция не является гиперплоскостью, т. е. $\mathfrak{f}^2 + c^2 \neq 0$.

* Отметим, что многие из этих результатов нетрудно перенести также и на случай минимальной конгруэнции V_3 в пространстве R_n (т. е. ${}^0R_n$ и ${}^1R_n$) (ср. [2]).

3. Гиперповерхность V_{n-1} в R_n всегда имеет, как известно, асимптотические направления, образующие конус второго порядка

$$b_{ab}x^a x^b = 0, \qquad (a, b, \ldots = 0, 1, \ldots, n-2).$$

Случай минимальной гиперповерхности характеризуется тем, что этот конус допускает вписанную систему из $n-1$ взаимно ортогональных векторов [6].

В случае конгруэнции V_3 в R_4 асимптотический конус, в силу (4), определяется уравнением

$$b_{ij}x^i x^j = 0, \qquad (i, j, \ldots = 1, 2)$$

и поэтому распадается на две двухмерные плоскости в касательном пространстве к V_3, пересекающиеся вдоль образующей.

Если конгруэнция V_3 в R_4 является минимальной, то эти плоскости, составляющие асимптотический конус, всегда вещественны и ортогональны.

Главные направления и главные кривизны гиперповерхности V_{n-1} в R_n определяются, как известно, из системы

$$(b_{ab} - kg_{ab})x^b = 0.$$

Всегда имеется n взаимно ортогональных главных направлений и n соответствующих главных кривизн, которые определяются из уравнения

$$\det |b_{ab} - kg_{ab}| = 0.$$

Здесь в случае ортонормированного репера имеем соотношения:

$$g_{aa} = \varepsilon_a = \pm 1, \qquad g_{ab} = 0, \qquad (a \neq b).$$

Если в случае минимальной конгруэнции V_3 в R_4 векторы $\mathfrak{e}_1$ и $\mathfrak{e}_2$ направить по асимптотическим направлениям (в силу вышеуказанного, это всегда возможно), то из уравнений (7), (9), (10) следует, что

$$f = b_{11} = -b_{22} = 0 \tag{11}$$

и главные кривизны равны $k_0 = 0$, $k_1 = b_{12} = c$, $k_2 = -c$. Одно из главных направлений совпадает с направлением образующей, а другие два делят пополам линейные углы двухгранного угла, образуемого ортогональными асимптотическими плоскостями.

В каноническом репере, выбранном таким образом, пфаффовы уравнения (9) минимальной конгруэнции V_3 в R_4, в силу (10—11), имеют вид

$$\begin{aligned} &\omega^3 = 0, && \omega^3{}_0 = 0, \\ &\omega^1{}_0 = s\omega^1 + t\omega^2, && \omega^3{}_1 = c\omega^2, \\ &\omega^2{}_0 = -t\omega^1 + s\omega^2, && \omega^3{}_2 = c\omega^1. \end{aligned} \tag{12}$$

Продолженная система для системы (12) имеет вид

$$\begin{aligned} ds &= (t^2 - s^2)\,\omega^0 + \varphi\omega^1 + \psi\omega^2, \\ dt &= -2st\,\omega^0 + \psi\omega^1 - \varphi\omega^2, \\ \omega^2{}_1 &= -\frac{t}{2}\,\omega^0 + \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ dc &= -sc\omega^0 - 2c\tau\omega^1 + 2c\sigma\omega^2. \end{aligned} \tag{13}$$

4. Теорема. *Минимальная конгруэнция V_3 в R_4 допускает непрерывное истинное изгибание в классе минимальных же конгруэнций V_3 в R_4. При этом всегда сохраняются главные кривизны поверхности.*

Доказательство. Первая квадратичная форма заданной минимальной конгруэнции V_3 в ортонормированном репере выражается в виде

$$ds^2 = -\varepsilon(\omega^0)^2 + (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2. \tag{14}$$

Пусть задана еще другая минимальная конгруэнция $V_3^{(\alpha)}$, величины которой обозначаем соответственно $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}^i_j$, $\overline{s}$, $\overline{t}$, $\overline{c}$, . . . Тогда первую квадратичную форму второй поверхности можно выразить в виде

$$d\overline{s^2} = -\varepsilon(\overline{\omega}^0)^2 + (\overline{\omega}^1)^2 + (\overline{\omega}^2)^2. \tag{15}$$

Предположим, что первые квадратичные формы поверхностей V_3 и $V_3^{(\alpha)}$ совпадают. В общем случае асимптотические и главные направления поверхностей V_3 и $V_3^{(\alpha)}$ не соответствуют друг другу. Если образы главных направлений второй поверхности $V_3^{(\alpha)}$ повернуты на угол α относительно главных направлений первой поверхности, то

$$\begin{aligned} \overline{\omega}^1 &= \omega^1 \cos\alpha + \omega^2 \sin\alpha, \\ \overline{\omega}^2 &= -\omega^1 \sin\alpha + \omega^2 \cos\alpha, \end{aligned} \tag{16}$$

и из соотношения $ds^2 = d\overline{s^2}$, в силу (14—16) следует $(\overline{\omega}^0)^2 = (\omega^0)^2$. Направление вектора $\mathfrak{e}_0$ на $V_3^{(\alpha)}$ можно выбрать так, чтобы

$$\overline{\omega}^0 = \omega^0. \tag{17}$$

Из (16) вытекает, что

$$[\overline{\omega}^1\overline{\omega}^2] = [\omega^1\omega^2]. \tag{18}$$

При внешнем дифференцировании уравнения (17) следует, в силу (18), что

$$\overline{t} = t. \tag{19}$$

При продолжении уравнений (16) находим

$$\begin{aligned} \{-d\alpha + (\overline{\omega}^2{}_1 - \omega^2{}_1)\}\sin\alpha + (s - \overline{s})\cos\alpha\,\omega^0 &= x_1\omega^1 + x_2\omega^2, \\ \{d\alpha - (\overline{\omega}^2{}_1 - \omega^2{}_1)\}\cos\alpha + (s - \overline{s})\sin\alpha\,\omega^0 &= x_2\omega^1 - x_1\omega^2, \end{aligned} \tag{20}$$

откуда следует, что

$$(s - \overline{s})\,\omega^0 = (x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha)\,\omega^1 + (x_2\cos\alpha - x_1\sin\alpha)\,\omega^2.$$

В силу линейной независимости форм ω^I отсюда и из соотношений (20) следует, что

$$\overline{s} = s, \tag{21}$$

$$\overline{\omega}^2{}_1 = \omega^2{}_1 + d\alpha. \tag{22}$$

На основании (13), (16—17) и (19) можно писать:

$$\overline{\omega}^2{}_1 = -\frac{t}{2}\,\omega^0 + (\overline{\sigma}\cos\alpha - \overline{\tau}\sin\alpha)\,\omega^1 + (\overline{\sigma}\sin\alpha - \overline{\tau}\cos\alpha)\,\omega^2,$$

$$\omega^2{}_1 = -\frac{t}{2}\,\omega^0 + \sigma\omega^1 + \tau\omega^2.$$

Если из первого соотношения вычесть второе, то, в силу (22), имеем

$$d\alpha = \alpha_i \omega^i, \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \bar{\sigma}\cos\alpha - \bar{\tau}\sin\alpha - \sigma, \\ \alpha_2 &= \bar{\sigma}\sin\alpha + \bar{\tau}\cos\alpha - \tau. \end{aligned} \tag{24}$$

Далее, учитывая (17—19) и (21), имеем

$$D\bar{\omega}^2{}_1 = \{\varepsilon(s^2+t^2)+\bar{c}^2\}[\omega^1\omega^2],$$
$$D\omega^2{}_1 = \{\varepsilon(s^2+t^2)+c^2\}[\omega^1\omega^2].$$

Но поскольку в силу (22) $D\bar{\omega}_1^2 = D\omega_1^2$, то $\bar{c}^2 = c^2$ и при подходящем выборе направления вектора нормали $\mathfrak{e}_3$ поверхности $V_3^{(\alpha)}$ всегда можно добиться, чтобы

$$\bar{c} = c. \tag{25}$$

Тогда в силу (13), (16—17), (21), (24—25) имеем

$$d\bar{c} - dc = -2c\alpha_2\omega^1 + 2c\alpha_1\omega^2. \tag{26}$$

Так как формы ω^1 и ω^2 линейно независимы и имеют место соотношения (23—25), то отсюда следует, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad d\alpha = 0, \quad \alpha = \mathrm{const}, \tag{27}$$

а поскольку имеет место еще (22—24), (27), то имеем

$$\bar{\omega}^2{}_1 = \omega^2{}_1, \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma\cos\alpha + \tau\sin\alpha, \\ \bar{\tau} &= -\sigma\sin\alpha + \tau\cos\alpha. \end{aligned} \tag{29}$$

Из соотношений (13), в силу (16—17), (19) и (21), следует, что

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \varphi\cos\alpha + \psi\sin\alpha, \\ \bar{\psi} &= -\varphi\sin\alpha + \psi\cos\alpha. \end{aligned} \tag{30}$$

После этого анализа нетрудно доказать существование минимальной конгруэнции $V_3^{(\alpha)}$, налагаемой на данную минимальную конгруэнцию V_3 (ср. [3]). За формы $\bar{\omega}^0$, $\bar{\omega}^1$, $\bar{\omega}^2$, $\bar{\omega}^3$, $\bar{\omega}_0^1$, $\bar{\omega}_0^2$, $\bar{\omega}_0^3$, $\bar{\omega}_1^3$, $\bar{\omega}_2^3$, $\bar{\omega}_1^2$, определяющие поверхность $V_3^{(\alpha)}$, можно брать формы, выраженные через исходные пфаффовы формы формулами (16—17), (28) и формулами

$$\bar{\omega}^3 = \omega^3, \quad \bar{\omega}^3{}_0 = \omega^3{}_0,$$
$$\bar{\omega}^1{}_0 = s(\omega^1\cos\alpha + \omega^2\sin\alpha) + t(-\omega^1\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha),$$
$$\bar{\omega}^2{}_0 = -t(\omega^1\cos\alpha + \omega^2\sin\alpha) + s(-\omega^1\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha),$$
$$\bar{\omega}^3{}_1 = c(-\omega^1\sin\alpha + \omega^2\cos\alpha),$$
$$\bar{\omega}^3{}_2 = c(\omega^1\cos\alpha + \omega^2\sin\alpha),$$

где

$$\alpha = \mathrm{const} \qquad (\text{см. } (19),\ (21),\ (25)).$$

Нетрудно доказать, что эти формы связаны соотношениями вида (12—13), где новые коэффициенты $\bar{s}, \bar{t}, \bar{c}$ выражены через старые равенства (19), (21), (25). Кроме того, из условий интегрируемости системы (12—13), определяющей V_3, следуют условия интегрируемости аналогичной системы новых уравнений. Следовательно, существует минимальная конгруэнция $V_3^{(\alpha)}$, причем, как легко видеть, $d\bar{s} = ds$. Угол α можно рассматривать как параметр изгибания; при изменении α поверхность $V_3^{(\alpha)}$ непрерывно изгибается. Из (25) следует, что главные кривизны при этом не меняются. Тем самым теорема доказана.

5. В случае, когда $\alpha = 0$, $V_3^{(0)} \equiv V_3$.

В случае же $\alpha = \frac{\pi}{2}$, в силу (16—17), имеем $\bar{\omega}^0 = \omega^0$, $\bar{\omega}^1 = \omega^2$, $\bar{\omega}^2 = -\omega^1$.

Это означает, что главные направления при этом поменяются местами.

Наконец, в случае $\alpha = \frac{\pi}{4}$, имеем ассоциированную минимальную конгруэнцию $V_3^{\left(\frac{\pi}{4}\right)}$. В том случае

$$\bar{\omega}^0 = \omega^0, \quad \bar{\omega}^1 = \frac{\omega^1 + \omega^2}{\sqrt{2}}, \quad \bar{\omega}^2 = \frac{\omega^2 - \omega^1}{\sqrt{2}}.$$

Асимптотические направления исходной минимальной конгруэнции V_3 переходят при этом в главные направления ассоциированной минимальной конгруэнции $V_3^{\left(\frac{\pi}{4}\right)}$, и наоборот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лумисте Ю. Г., Матем. сб., **50(92): 2**, 203—220 (1960).
2. Лумисте Ю. Г., Матем. сб., **55(97) : 4**, 411—420 (1961).
3. Лумисте Ю. Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, вып. 129, 74—89.
4. Лумисте Ю. Г., Туулметс Л. А., Изв. высш. уч. зав., Математика, **26**, № 1, 74—82 (1962).
5. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, **2**, М., 1948.
6. Pinl Max, Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges., **32**, 21—26 (1933).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 24. X 1963

MINIMAALKONGRUENTSI V_3 PAINUTAMINE RUUMIS R_4

L. Tuulmets

Resümee

Kongruentsiks eukleidilises ruumis R_4 (päriseukleidilises ruumis $^0R_4$ või pseudoeukleidilises ruumis $^1R_4$) nimetatakse suvalist hüperpinda V_3 astakuga 2. On teada, et sellise pinna puutujatasandid puutuvad pinda piki sirgjoonelisi moodustajaid.

Kongruentsi nimetatakse minimaalkongruentsiks, kui hüperpind V_3 on minimaalne ([5], lk. 100).

Mitmemõõtmeliste pindade teooriast on teada, et hüperpind V_{n-1} on ruumis R_n pidevalt painutatav siis ja ainult siis, kui tema astak ei ole suurem kui 2 ([5], lk. 159). Teiselt poolt pakub kahemõõtmeliste minimaalpindade teoorias päriseukleidilises ruumis $^0R_3$ erilist huvi nende painutamine minimaalpindade klassis.

Käesolev artikkel on artikli [4] jätk. Kui viimases tõestati minimaalkongruentsi V_3 olemasolu ja rida geomeetrilisi omadusi ruumis ${}^0R_4$, siis antud töös üldistatakse artikli [4] tulemused ruumi ${}^1R_4$ puhul ja tõestatakse järgmine teoreem:

Minimaalkongruentsi V_3 ruumis R_4 on võimalik pidevalt painutada minimaalkongruentside klassis, kusjuures pinna peakõverused säilivad.

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
24. X 1963

THE BENDING OF THE MINIMAL CONGRUENCE V_3 IN THE SPACE R_4

L. Tuulmets

Summary

A congruence in the Euclidean space R_4 (Euclidean space proper ${}^0R_4$ or pseudoeuclidean space ${}^1R_4$) is defined as an arbitrary hypersurface V_3 with rank 2. It is known that the tangential planes of such a surface V_3 turn out to be tangential planes along a linear generator.

The congruence is called minimal congruence in case the hypersurface V_3 proves minimal ([5], p. 100).

From the theory of many-dimensional surfaces it is known that a hypersurface V_{n-1} in the space R_n may continuously be bent if, and only if its rank does not surpass 2([5], p. 159). On the other hand, the bending of minimal surfaces in the class of minimal surfaces is a matter of no little interest in the theory of two-dimensional minimal surfaces of the Euclidean space proper ${}^0R_3$.

The given article is a continuation of the article [4]. In the article [4] the existence and a number of geometrical properties of the minimal congruence V_3 in the space R_4 have been proved, whereas in this article the results of the article [4] are being generalized into space ${}^1R_4$ and the following theorem is being proved:

The minimal congruence V_3 in the space R_4 can be continuously bent in the class of minimal congruences with retaining the principal curvatures of the surface in the process of bending.

Tartu State University

Received
Oct. 24th, 1963