EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1964, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1964, № 3

О МОДЕЛЯХ ПРОМЕЖУТОЧНОСТИ

Ю. ЛУМИСТЕ,
кандидат физико-математических наук

В работе рассматривается особый класс моделей с одним тернарным отношением — отношением промежуточности («между») —, описываемый конечной системой аксиом. Вводится понятие размерности такой модели. Двухмерные модели (плоскости промежуточности) являются частичными плоскостями (в смысле теории проективных плоскостей). Показывается, что n-мерные модели $n>2$ изоморфны выпуклым областям в линейных пространствах над линейно упорядоченными телами. Определяются особые группы автоморфизмов модели промежуточности — группа движений и группа собственных движений.

1. Любое подмножество f в n-ой декартовой степени $X^n = X \times \ldots \times X$ (n раз) множества X, т. е. в множестве всех упорядоченных систем $(x_1, \ldots, x_n)$ из элементов множества X, называется *n-арным отношением* в X (см. [1], стр. 15).

Говорят, что элементы $x_1, \ldots, x_n \in X$ находятся в отношении f и пишут $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$, если $(x_1, \ldots, x_n) \in f \subset X^n$. Если $(x_1, \ldots, x_n) \in \bar{f} = X^n \setminus f$, то пишут $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Этим определяется функция с n аргументами на X, так называемый *n-местный предикат* на X, которая принимает значения во множестве $E = \{0, 1\}$, состоящем из двух элементов (эти элементы обозначаются условно 0 и 1, и трактуются часто как «ложь» и «истина»). Подмножество $f \subset X^n$ называется определяющим подмножеством для предиката $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Над предикатами определены следующие 1) комбинаторные операции: *фиксирование* какого-нибудь одного аргумента, *отождествление* и *перестановка* каких-нибудь двух аргументов, 2) логические операции: *отрицание* $^-$, *конъюнкция* $\wedge$, *дизъюнкция* $\vee$ и *импликация* $\rightarrow$, 3) кванторы: *квантор общности* $\forall$ и *квантор существования* $\exists$.

Следующие примеры разъясняют, в каком смысле применяются в дальнейшем эти операции и кванторы.

Если заданы тернарное отношение $f \subset X^3$ и бинарное отношение $g \subset X^2$, то

1. *a*) $f(x_1 x_2 a)$, *b*) $f(x_1 x_2 x_1)$, *c*) $g(x_2 x_1)$ обозначают двухместные предикаты, определяющие подмножества которых в X^2 состоят из тех пар (x_1, x_2), для которых *a*) $(x_1, x_2, a) \in f$, *b*) $(x_1, x_2, x_1) \in f$, *c*) $(x_2, x_1) \in g$;

2. $\overline{g(x_1 x_2)}$ определяется подмножеством $\bar{g} \subset X^2$;

3. *a*) $f(x_1 x_2 x_3) \wedge g(x_4 x_5)$, *b*) $f(x_1 x_2 x_3) \vee g(x_4 x_5)$, *c*) $f(x_1 x_2 x_3) \rightarrow g(x_4 x_5)$ являются 5-местными предикатами, определяющие подмножества которых в X^5 состоят из тех систем $(x_1, \ldots, x_5)$, для которых *a*) $(x_1, x_2, x_3) \in f$ и $(x_4, x_5) \in g$, *b*) $(x_1, x_2, x_3) \in f$ или $(x_4, x_5) \in g$, *c*) либо $(x_1, x_2, x_3) \in \bar{f}$, либо $(x_1, x_2, x_3) \in f$ и вместе с тем $(x_4, x_5) \in g$;

4. *a*) $(\forall x) f(x_1 x_2 x)$, *b*) $(\exists x) f(x_1 x_2 x)$ обозначают двухместные предикаты, определяющие подмножества которых в X^2 состоят из тех пар (x_1, x_2), для которых *a*) при любом $x \in X$ имеет место $(x_1, x_2, x) \in f$, *b*) существует $x \in X$, такой что $(x_1, x_2, x) \in f$.

Комбинированием некоторых из этих операций можно составить, например, следующий предикат:

$$(f(x_1 x_2 x_3) \wedge g(x_1 x_2)) \to g(x_3 x_2).$$

Он определяется подмножеством в X^3, состоящим из таких систем (x_1, x_2, x_3), для которых либо 1) $(x_1, x_2, x_3) \in \bar{f}$ или $(x_1, x_2) \in \bar{g}$, либо 2) $(x_1, x_2, x_3) \in f$ и $(x_1, x_2) \in g$, и вместе с тем $(x_3, x_2) \in g$.

Если заданы $g \subset X^n$, $h \subset X^n$, то $g(x_1 \ldots x_n) \wedge h(x_1 \ldots x_n)$, $g(x_1 \ldots x_n) \vee h(x_1 \ldots x_n)$, $g(x_1 \ldots x_n) \to h(x_1 \ldots x_n)$ определяются, соответственно, подмножествами $g \cap h$, $g \cup h$, $\bar{g} \cup h$ в X^n.

Бинарное отношение $e \subset X^2$ называется *единичным*, если e состоит из пар $(x, x) \subset X^2$ с совпадающими элементами. Соответствующий предикат $e(x_1 x_2)$ обозначается обычно $x_1 = x_2$; вместо $\overline{e(x_1 x_2)}$ пишут $x_1 \neq x_2$.

2. n-арное отношение $f \subset X^n$ называется *тождественным*, если $f = X^n$. Соответствующий предикат $f(x_1 \ldots x_n)$ на X, принимающий всегда значение 1 («истина»), называется тождественно истинным.

Множество, в котором задано некоторое число отношений, называется *моделью*. Все тождественные отношения, составленные из заданных с переходом на соответствующие предикаты и с применением вышеуказанных операций, образуют *теорию модели*.

3. Модель X с единичным бинарным отношением и одним тернарным отношением $f \subset X^3$ называется *неодномерной моделью промежуточности*, если в ее теорию входят следующие отношения:

1° $f(x_1 x_2 x_3) \to f(x_2 x_1 x_3)$ — *симметрия* по первым двум аргументам,

2° $f(x_1 x_2 x_3) \to \overline{f(x_1 x_3 x_2)}$ — *сильная антисимметрия* по последним двум аргументам,

3° $g(x_1 x_2 x_3) \wedge h(x_1 x_2 x_4) \to h(x_1 x_3 x_4)$ — обобщенная *транзитивность*; здесь

$$g(x_1 x_2 x_3) = f(x_1 x_2 x_3) \vee f(x_2 x_3 x_1) \vee f(x_3 x_1 x_2),$$

$$h(x_1 x_2 x_3) = g(x_1 x_2 x_3) \vee (x_1 = x_2) \vee (x_2 = x_3) \vee (x_3 = x_1);$$

4° $(x_1 \neq x_3) \to (\exists x) f(x_1 x x_3)$ — *продолжаемость*,

5° $(x_1 \neq x_2) \to (\exists x) \overline{h(x_1 x_2 x)}$ — *неодномерность*,

6° $\overline{h(x_1 x_2 x_3)} \wedge f(x_1 x_4 x_2) \wedge f(x_2 x_3 x_5) \to$

$\to (\exists x_6)(f(x_1 x_3 x_6) \wedge h(x_4 x_6 x_5))$ — *аксиома Паша-Веблена* (см. рис. 1).

Отношение f называется тогда *отношением промежуточности* или отношением «*между*». Если $(x_1, x_2, x_3) \in f \subset X^3$, т. е. $f(x_1 x_2 x_3) = 1$, то говорят, что «x_3 *лежит между* x_1 *и* x_2».

Если $(x_1, x_2, x_3) \in h \subset X^3$, то x_1, x_2 и x_3 называются *коллинеарными*.

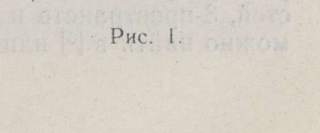

Рис. 1.

Подобные аксиомы, которые в словесной форме имеются уже у О. Веблена [2], использовал Я. Сарв [3] при построении значительной части n-мерной абсолютной геометрии. Ю. Нуут [4, 5] и в особенности А. Хумал (Тудеберг) [6] применили уже некоторую символику. А. Хумал после тщательного анализа приводил систему аксиом к вышеуказанным 6 аксиомам.

Из более поздних работ об аксиоматизации понятия промежуточности следует отметить [7], где делается ряд выводов из другой, более сложной системы аксиом, и даются некоторые указания на литературу.

4. В этом пункте строится ряд унарных отношений в X. При этом часто оказывается удобным подмножество $f \subset X$, определяющее одноместный предикат $f(x)$, обозначать через $\{x : f(x)\}$.

Если $a_1, a_2 \in X$ являются некоторыми фиксированными точками, и $a_1 \neq a_2$, то подмножество $\{x : h(a_1a_2x)\}$ в X называется *прямой* a_1a_2, а подмножество $\{x : f(xa_2a_1)\}$ — *полупрямой* $a_1)a_2$.

Пусть

$$b(x_1x_2x_3x_4) = f(x_1x_2x_4) \vee f(x_2x_3x_4) \vee f(x_3x_1x_4),$$

$$h'(x_1x_2x_3x_4) = (\exists\, x, x')\,(h(x_4xx') \wedge b(x_1x_2x_3x) \wedge b(x_1x_2x_3x')).$$

Если $a_1, a_2, a_3 \in X$ и $h(a_1a_2a_3) = 0$, то множество $\{x : h'(a_1a_2a_3x)\}$ называется плоскостью $a_1a_2a_3$, а множество $\{x : (\exists\, x')\,(h(a_1a_2x') \wedge f(a_3xx'))\}$ — полуплоскостью $a_1a_2)\,a_3$.

Если к аксиомам 1°—6° присоединяется аксиома

$7^\circ_{(2)}$ $h(x_1x_2x_3) \vee h'(x_1x_2x_3x_4)$,

то соответствующая модель X называется двухмерной или *плоскостью промежуточности*.

Пусть модель промежуточности X не является двухмерной; пусть

$$f'(x_1x_2x_3x_4) = (\exists x)\,(f(x_1x_2x) \wedge f(xx_3x_4)),$$

$$b'(x_1x_2x_3x_4x_5) = f'(x_1x_2x_3x_5) \vee f'(x_2x_3x_4x_5) \vee f'(x_3x_4x_1x_5) \vee f'(x_4x_1x_2x_5),$$

$$h''(x_1x_2x_3x_4x_5) = (\exists\, x, x')\,(h(x_5xx') \wedge b'(x_1x_2x_3x_4x) \wedge b'(x_1x_2x_3x_4x')).$$

Если $a_1, a_2, a_3, a_4 \in X$ и $h(a_1a_2a_3) \vee h'(a_1a_2a_3a_4) = 0$ (некомпланарность), то множество $\{x : h''(a_1a_2a_3a_4x)\}$ называется 3-*пространством* $a_1a_2a_3a_4$, а множество $\{x : (\exists\, x')\,(h'(a_1a_2a_3x') \wedge f(a_4xx'))\}$ — 3-*полупространством* $a_1a_2a_3)\,a_4$.

Если к аксиомам 1°—6° присоединяется аксиома

$7^\circ_{(3)}$ $h(x_1x_2x_3) \vee h'(x_1x_2x_3x_4) \vee h''(x_1x_2x_3x_4x_5)$,

то соответствующая модель X называется трехмерной или 3-*пространством промежуточности*.

В противном случае можно продолжить указанный процесс построения новых предикатов и с их помощью ввести понятия 4-, 5- и т. д. пространств и полупространств.

Если на каком-нибудь шагу появляется аксиома $7^\circ_{(n)}$, заканчивающая это построение, то соответствующая модель называется конечномерной, точнее *n-пространством промежуточности*. В противном случае говорят о бесконечномерной модели промежуточности.

5. Значительная часть тождественно истинных предикатов, составляющих теорию модели промежуточности, напоминает соответствующие предложения обычной элементарной геометрии. Ниже приводится сжатое словесное описание ряда нужных в дальнейшем предикатов, характеризующих важнейшие взаимные свойства точек, прямых, плоскостей, 3-пространств и т. д. в модели промежуточности. (Доказательства можно найти в [3] или [8]; в первом они даны еще в словесном виде).

Прямая однородна, представляет собой бесконечное (быть может, только счетное) множество точек, линейно упорядочиваемое двумя различными способами, и ее произвольная точка разделяет множество остальных точек на две полупрямые.

Плоскость однородна и представляет собой плоскость промежуточности. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости, разделяя множество остальных точек плоскости на две полуплоскости.

3-пространство однородно и представляет собой 3-пространство промежуточности. Если три точки плоскости принадлежат 3-пространству, то вся плоскость принадлежит 3-пространству, разделяя множество остальных точек 3-пространства на два 3-полупространства. Если две различные плоскости принадлежат одному 3-пространству и имеют общую точку, то они имеют общую прямую, которая содержит все их общие точки.

Аналогичными свойствами обладают 4-, 5- и т. д. пространства промежуточности (см. [3]).

В теории модели промежуточности X можно определить еще следующие подмножества:

интервал: $(a_1a_2) = \{x : f(a_1a_2x)\}$,

внутренность треугольника: $(a_1a_2a_3) = \{x : f'(a_1a_2a_3x)\}$,

расширение треугольника

а) за вершину $a_3 : a_1a_2(a_3) = \{x : f'(a_1a_2xa_3)\}$,

в) за сторону $(a_2a_3) : a_1(a_2a_3) = \{x : f'(a_1xa_2a_3)\}$.

Можно доказать [3, 8], что

$$(a_1a_2) = (a_2a_1),\ (a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}) = (a_1a_2a_3),\ \text{где}$$

i_1, i_2, i_3 — некоторая перестановка из чисел $1, 2, 3$.

Прямая a_1a_2 является объединением точек a_1 и a_2, интервала (a_1a_2), и полупрямых $a_1)a_2$ и $a_2)a_1$:

$$a_1a_2 = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup (a_1a_2) \cup a_1)a_2 \cup a_2)a_1.$$

Плоскость $a_1a_2a_3$ является объединением прямых a_1a_2, a_2a_3 и a_3a_1, внутренности треугольника $(a_1a_2a_3)$, всевозможных расширений этого треугольника за все вершины и стороны [8].

Такого рода предложения имеют место и для 3-, 4- и т. д. пространств промежуточности [3].

n-пространство промежуточности называется *непрерывным*, если в нем каждая прямая, как линейно упорядоченное множество, непрерывна в смысле Дедекинда, т. е. если на ней каждое сечение является дедекиндовым.

6. Теория плоскостей промежуточности имеет некоторую связь с теорией проективных плоскостей [10, 11].

Проективная плоскость — это множество точек, определенные подмножества которого называются прямыми, и которое удовлетворяет следующим аксиомам:

1) две различные точки принадлежат одновременно одной и только одной прямой,

2) две различные прямые пересекаются в одной и только в одной точке,

3) существуют четыре точки, любые три из которых не принадлежат одной прямой.

Если выполняются аксиомы 1) и 3), но не аксиома 2), то говорят о *частичной плоскости* [10].

Нетрудно убедиться, что плоскость промежуточности является частичной плоскостью на каждой прямой которой заданы два взаимнопротивоположных линейных порядка.

Исследование плоскостей промежуточности находится еще в начальной стадии. Также как в теории проективных плоскостей, представляет интерес выяснение взаимных связей конфигурационных теорем, возможностей ввести координаты, взятые из некоторой абстрактной алгебры, и транзитивных свойств группы автоморфизмов.

7. Множество всевозможных прямых в 3-пространстве, проходящих через фиксированную точку a_0 — так называемая (собственная) 3-*связка*, является проективной плоскостью, если в нем под «прямыми» подразумевать подмножества прямых, принадлежащих одной плоскости.

Следующая лемма показывает, что собственная 3-связка как проективная плоскость является дезарговой плоскостью.

Лемма 1 (Теорема Дезарга для 3-связки). *Если плоскости $a_0a_1a'_1$, $a_0a_2a'_2$, $a_0a_3a'_3$, принадлежащие одному 3-пространству, попарно различны и имеют общую прямую, то прямые $a_0a_1a_2 \cap a_0a'_1a'_2$, $a_0a_2a_3 \cap a_0a'_2a'_3$, $a_0a_3a_1 \cap a_0a'_3a'_1$ принадлежат одной плоскости. Справедливо и обратное утверждение.*

Лемма доказывается в ([8], § 20). (Идея доказательства заимствована из [9]).

Следовательно, в 3-связке можно ввести координаты, взятые из какого-нибудь тела, используя известные построения (см. [10, 11]).*

8. Вышеизложенное позволяет ввести координаты также в 3-пространстве промежуточности. Ниже приводятся необходимые для этого построения.

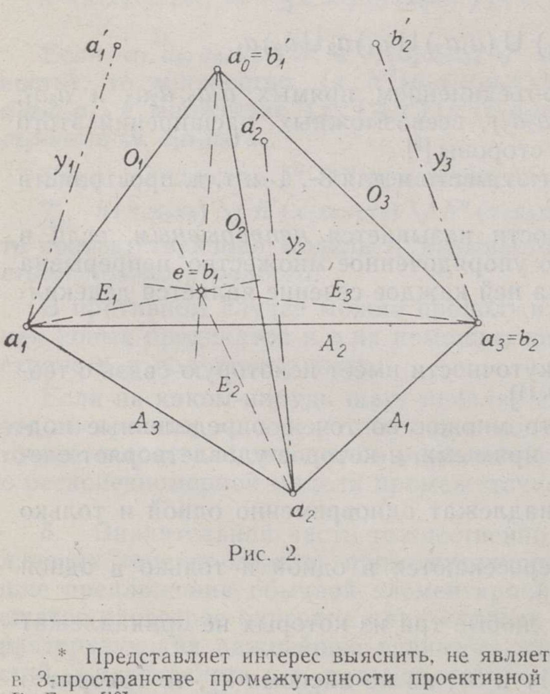

Рис. 2.

Пусть a_0, a_1, a_2, a_3 — четыре точки, не принадлежащие одной плоскости, и пусть e является некоторой точкой во внутренности тетраэдра $(a_0a_1a_2a_3)$ (рис. 2).

Прямые $O_1 = a_1a_0$, $A_3 = a_1a_2$, $A_2 = a_1a_3$, $E_1 = a_1e$ играют роль «точек» для связки (a_1) как проективной плоскости.

По известному приему [10, 11] припишем «прямым» (т. е. плоскостям) пучка (A_2), за исключением «прямой» A_2A_3, некоторые символы $\xi_2, \eta_2, \ldots$ «Прямым» пучка (A_3), за исключением «прямой» A_3A_2, припишем символы $\xi_3, \eta_3 \ldots$, причем так, чтобы «прямые» пучков (A_2) и (A_3), пересекающиеся в некоторой «точке» Y_1 «прямой»

* Представляет интерес выяснить, не является ли описанная собственная 3-связка в 3-пространстве промежуточности проективной упорядоченной плоскостью в смысле Р. Бэра [12].

O_1E_1, были обозначены одинаковыми символами (т. е. чтобы для них $\xi_2 = \xi_3 = \xi$, $\eta_2 = \eta_3 = \eta, \ldots$). «Прямым» A_2O_1, A_3O_1 припишем символ 0, «прямым» A_2E_1, A_3E_1 — символ 1, «прямой» A_2A_3 — символ ∞.

Через произвольную «точку» $X_1 = a_1x$ проходит «прямая» A_2X_1 с символом ξ_2 и «прямая» A_3X_1 с символом ξ_3. «Точке» X_1 припишем координаты (ξ_2, ξ_3) и обозначим $X_1 = (\xi_2, \xi_3)$. Очевидно, $O_1 = (0, 0)$, $E_1 = (1, 1)$, $У_1 = (\xi, \xi)$.

Точно так же можно ввести координаты в связке (a_2) на базе «точек» $O_2 = a_2a_0$, $A_3 = a_2a_1$, $A_1 = a_2a_3$, $E_2 = a_2e$, причем так, что «прямым» пучка (A_3) приписываются те же самые символы $\xi_3, \eta_3, \ldots$, которые они получили в связке (a_1). Произвольная «точка» $X_2 = a_2x$ получает координаты (ξ_2, ξ_1).

Для связки (a_3) остается только проверить, что «прямые» пучков (A_1) и (A_2) с одинаковыми символами пересекаются в «точке» $У_3$ «прямой» O_3E_3 (где $O_3 = a_3a_0$, $E_3 = a_3e$).

Для этого нужно применить следующую лемму, доказательство которой дано в ([8], § 20).

Лемма 2. *Если среди точек* $a_1, a_1', a_2, a_2', b_1, b_1', b_2, b_2'$ *любые три не принадлежат одной прямой и* 1) $a_2' \in a_1a_1'a_2$, 2) $b_1, b_2 \notin a_1a_1'a_2$, 3) $b_1' \in a_1a_1'b_1 \cap a_2a_2'b_1$, 4) $b_2' \in a_1a_1'b_2 \cap a_2a_2'b_2$, 5) $a_1a_1'a_2 \cap b_1b_1'b_2 \neq \varnothing$, *то* b_1, b_2, b_1', b_2' *принадлежат одной плоскости.*

Применение этой леммы состоит в следующем (рис. 2). Пусть некоторые «прямые» пучков (A_2) и (A_3) пересекаются в «точке» $У_1 = a_1a'_1$, принадлежащей «прямой» O_1E_1. Пусть в пучке (A_1) выбрана «прямая», пересекающая «прямую» O_2E_2 в «точке» $У_2 = a_2a_2'$, принадлежащей «прямой» $У_1A_3$. Тогда «прямые» $A_2У_1$ и $A_3У_1$, а также $A_3У_2$ и $A_1У_2$ имеют одинаковые символы. Но ввиду того, что плоскости $A_2У_1$ и $A_3У_2$ совпадают, одинаковые символы получают также «прямые» $A_2У_1$ и $A_1У_2$.

Из леммы 2 следует теперь, что эти «прямые» $A_2У_1$ и $A_1У_2$, действительно пересекаются в «точке» $У_3 = a_3b_2'$, принадлежащей «прямой» O_3E_3. (Нужно взять $b_1 = e$, $b'_1 = a_0$, $b_2 = a_3$).

Координаты точки $x \in X$ вводятся теперь следующим образом. Из вышеизложенного следует, что пары координат (ξ_2, ξ_3), (ξ_3, ξ_1), (ξ_1, ξ_2) прямых a_1x, a_2x, a_3x в соответствующих связках (a_1), (a_2), (a_3) составлены только из трех символов ξ_1, ξ_2, ξ_3. Тройка этих символов и приписывается точке x, обозначая $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Точке x_∞, принадлежащей плоскости $a_1a_2a_3$ и поэтому выпадающей из указанной конструкции, приписывается тройка символов $(\xi_1/0, \xi_2/0, \xi_3/0)$, где (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — координаты какой-нибудь точки на прямой a_0x_∞.

9. Аналогичным путем можно ввести координаты также в n-пространство промежуточности.

Теорема 1. *Произвольное n-пространство промежуточности при $n > 2$ изоморфно выпуклой области в n-мерном линейном пространстве L_n над линейно упорядоченным телом K, в котором среди $x_1, x_2, x_3 \in L_n$ элемент x_3 считается лежащим между x_1 и x_2 в точности тогда, если существует $\lambda \in K$, $0 < \lambda < 1$, так что*

$$x_3 = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2.$$

Классификация n-пространств промежуточности при $n > 2$ сводится, следовательно, к классификации линейно упорядоченных тел (теория которых, кстати, находится еще в начальной стадии (см., например [13]).

Ниже дается эскиз доказательства теоремы. Для простоты ограничиваемся случаем $n = 3$.

Известно, что в случае дезарговой проективной плоскости можно в множестве координатных символов ввести операции сложения и умножения, так что это множество становится телом K [10, 11].

В случае 3-пространства промежуточности можно это сделать в каждой собственной 3-связке (a_1), (a_2), (a_3), причем оказывается, что сложение и умножение символов не зависят от выбора связки, с помощью которой они определены.

Каждую плоскость можно представить одним линейным уравнением $\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2 + \alpha_3\xi_3 + \alpha_0 = 0$ с коэффициентами в теле K, которому удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих плоскости.

Каждой точке x соответствует упорядоченная тройка (ξ_1, ξ_2, ξ_3) элементов из K, но обратно, не каждая тройка элементов из K определяет точку в 3-пространстве промежуточности (прямые (ξ_2, ξ_3), (ξ_3, ξ_1), (ξ_1, ξ_2) в связках (a_1), (a_2), (a_3) могут не пересекаться). Если тройка (ξ_1, ξ_2, ξ_3) не соответствует какой-нибудь точке x, то ей приписывается некоторый новый объект, называемый *несобственной точкой*. (Несобственную точку можно при желании представить в виде связки (в общем случае несобственной) — множества прямых, попарно принадлежащих одной плоскости).

С помощью линейных уравнений определяются: принадлежность несобственной точки данной плоскости или прямой, несобственные плоскости и прямые. Совокупность всех точек и всех несобственных точек представляет собой 3-мерное проективное пространство $P_3(K)$ над K [14], в которое можно ввести однородные координаты (ϱ_0, ϱ_i), так что $\varrho_0\xi_i = \varrho_i$, $i = 1, 2, 3$.

Множество собственных точек (точек 3-пространства промежуточности) должно быть выпуклым относительно отношения промежуточности, иначе не были бы удовлетворены аксиомы 1°—6°. Поэтому множество несобственных точек содержит по крайней мере одну несобственную плоскость.

В $P_3(K)$ можно сделать такое проективное преобразование

$$\varrho'_\lambda = \sum a_{\lambda\mu}\,\varrho_\mu, \quad \lambda, \mu = 0, 1, 2, 3,$$

при котором эта несобственная плоскость становится плоскостью $\varrho'_0 = 0$.

Каждой точке 3-пространства промежуточности соответствует система новых однородных координат (ϱ'_0, ϱ'_i), в которой всегда $\varrho'_0 \neq 0$. Поэтому можно перейти к неоднородным координатам (ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3), так что $\varrho'_0\,\xi'_i = \varrho'_i$. Здесь ξ'_i являются вполне определенными элементами из тела K.

Множество упорядоченных троек $\bar{x} = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$ элементов из тела K можно известным образом превратить в 3-мерное линейное пространство над телом K. Прямая, определяемая точками $\bar{o} = (0, 0, 0)$ и $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, состоит из точек $\bar{l} = \bar{o} + \lambda\bar{e}_1$, $\lambda \in K$. Так как прямая $\overline{oe_1}$ с выбранным на ней направлением от $\bar{o}$ к $\bar{e}_1$ является линейно упорядоченным множеством в 3-пространстве промежуточности, то и в тело K

вводится линейный порядок элементов. При этом точка $\bar{x}_3$ лежит между $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ в точности тогда, если для соответствующей тройки найдется $\lambda \in K$, $0 < \lambda < 1$, так что

$$\bar{x}_3 = \lambda \bar{x}_1 + (1 - \lambda) \bar{x}_2.$$

Этим доказательство заканчивается.

10. При классификации проективных плоскостей, как известно, важную роль играют свойства группы автоморфизмов плоскости (группы коллинеации) [11].

Аналогичные проблемы можно ставить в случае плоскостей и пространств промежуточности. Особый интерес представляет выделение таких подгрупп автоморфизмов, которые могут быть названы группами движений.

Подмножество в n-пространстве промежуточности, являющееся объединением точки a_1, полупрямой $a_1)a_2$, полуплоскости $a_1a_2)a_3$, ..., k-полупространства $a_1 \ldots a_k)a_{k+1}$, называется *к-репером* и обозначается $R(a_1a_2 \ldots a_{k+1})$.

Группа автоморфизмов n-пространства промежуточности называется *группой движений* Ω (*группой собственных движений* Ω_0), если она действует просто-транзитивно на множестве всех n-реперов ($(n-1)$-реперов).

Можно говорить о теории пары (X, Ω), подразумевая под этим совокупность тождественно истинных предикатов на декартовых произведениях, составленных из X и Ω, которые можно формулировать в терминах предиката промежуточности $f(x_1x_2x_3)$, предиката представления $x \circ \varphi = y$ и групповой операции $\varphi\psi = \chi$; x_1, x_2, x_3, x, $y \in X$, φ, ψ, $\chi \in \Omega$.

Теорема 2. *Если n-пространство промежуточности X является непрерывным, то теория пары (X, Ω) совпадает с n-мерной абсолютной геометрией.*

Доказательство теоремы при $n = 2$ и $n = 3$ содержится в [8], где элементарная абсолютная геометрия строится на основании 8 аксиом на отношение «между» (аксиомы 1°—6°, аксиома $\overset{\circ}{7}_{(2)}$ или $\overset{\circ}{7}_{(3)}$, аксиома непрерывности (Дедекинда)), 7 аксиом на предикат представления и 4 групповых аксиом.

Теория пары (X, Ω) без требования непрерывности еще слабо развита. Здесь основные трудности связаны со следующей проблемой, которая формулируется ниже для случая $n = 2$.

В группе движений Ω существует элемент φ, действие которого на X переводит репер $R(a_1a_2a_3)$ в репер $R'(a_2a_1a_3)$. Переходит ли тогда a_2 в a_1?

Если выполняется аксиома непрерывности, то положительный ответ на этот вопрос был дан Б. Н. Делоне [15]. В общем случае вопрос, насколько нам известно, еще открыт.

В заключение отметим интересный результат Д. Гильберта [16], относящийся к теории пары (X, Ω_0) при $n = 2$. Оказывается, что в теории этой пары из равнобедренности треугольника не следует конгруэнтность углов при основании. Соответствующую модель Гильберта, построенную для аксиоматики несколько другого характера, наиболее естественно трактовать именно в терминах теории пары (X, Ω_0).

ЛИТЕРАТУРА

1. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., 1962.
2. Veblen O., Trans. Amer. Math. Soc., 5, 343—384 (1904).
3. Sarv J., Geomeetria alused, Acta et Comment. Univ. Tartuensis (Dorpatensis), **A 19**, nr. 4 (1931).
4. Nuut J., Topologische Grundlagen des Zahlbegriffs, Acta et Comment. Univ. Tartuensis (Dorpatensis), **A 15**, Nr. 5 (1929).
5. Nuut J., Einige Bemerkungen über Vierpunktaxiome, Acta et Comment. Univ. Tartuensis (Dorpatensis), **A 23**, Nr. 4 (1932).
6. Tudeberg A., Über die Beweisbarkeit einiger Anordnungsaussagen in geometrischen Axiomensystemen, Acta et Comment. Univ. Tartuensis (Dorpatensis), **A 26**, Nr. 6 (1934).
7. Hashimoto J., Osaka Math. Journ., **10**, 147—158 (1958).
8. Lumiste Ü., Geomeetria alused I, Tartu (TRÜ rotaprint), 1963.
9. Schur F., Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1909.
10. Скорняков Л. А., Успехи матем. наук, вып. 6(46), **6**, 112—154 (1951).
11. Холл М., Теория групп и проективные плоскости. В кн.: Теория групп, М., 1962.
12. Бэр Р., Проективное упорядочение пространства (гл. III, добавл. III). В кн.: Линейная алгебра и проективная геометрия, М., 1955.
13. Szele T., Proc. Amer. Math. Soc., 3, 410—413 (1952).
14. Ходж В., Пидо Д., Проективное пространство (ч. II). В кн.: Методы алгебраической геометрии, **1**, М., 1954.
15. Делоне Б. Н., Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского, М., 1953.
16. Гильберт Л., Основания геометрии, М.—Л., 1948 (добавление II).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
3. XII 1963

VAHELSEISU MUDELITEST

Ü. Lumiste

Resümee

Töös vaadeldakse eritüüpi mudeleid X ühe ternaarse suhtega $f(x_1x_2x_3)$, mida nimetatakse vahelseisu suhteks. $f(x_1x_2x_3)$ tõesuse puhul kõneldakse, et x_3 on x_1 ja x_2 vahel. Vahelseisu mudelite klassi kirjeldavad aksioomid 1°—6°, mis on pärit A. Humala (Tudebergi) artiklist [6] (hilisemate sellesuunaliste tööde kohta vt. [7]). Täiendava aksioomi $\overset{\circ}{7}_{(n)}$ abil tuuakse sisse vahelseisu mudeli X mõõtme mõiste.

Kahemõõtmelised mudelid X (vahelseisu tasandid) osutuvad osalisteks tasanditeks (projektiivsete tasandite teooria seisukohalt; vt. [10]).

Vahelseisu mudelis X mõõtmega $n>2$ osutub iga 3-sidum (üht punkti läbivate sirgete hulk 3-mõõtmelises alammudelis) kui projektiivne tasand Desargues'i tasandiks. Selle alusel formuleeritakse (ja tõestatakse $n=3$ puhul) järgmine teoreem:

Iga vahelseisu mudel X mõõtmega $n>2$ on isomorfne kumera piirkonnaga n-mõõtmelises lineaarruumis üle järjestatud kaldkorpuse.

Tuuakse sisse k-reeperi mõiste, mille abil defineeritakse peegeldusliikumiste (pärisliikumiste) rühm $\Omega(\Omega_0)$ kui n-mõõtmelise vahelseisu mudeli X automorfismide rühm, mis toimib lihttransitiivselt n-reeperite ($(n-1)$-reeperite) hulgal. Kui sirged mudelis X järjestatud hulkadena on pidevad Dedekindi mõttes, siis paari (X, Ω) teooria ühtib n-mõõtmelise absoluutse geomeetriaga. Seatakse mõningad probleemid paari (X,Ω) teooria kohta mittepideval juhul.

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
3. XII 1963

ON MODELS OF BETWEENNESS

Ü. Lumiste

Summary

In this paper a special kind of models with one ternary relation $f(x_1x_2x_3)$, which is called a relation of betweenness is considered: when $f(x_1x_2x_3)$ is true, we say that x_3 is between x_1 and x_2. The class of models of betweenness X is described by a system of axioms 1°—6° taken from A. Humal's (Tudeberg's) article [6] (more recent works of this kind s. [7]). The notion of dimension for model X of betweenness is introduced with a complementary axiom $\overset{\circ}{7}_{(n)}$.

Two-dimensional models X (planes of betweenness) prove to be partial planes (in the sense of the theory of projective planes; s. [10]).

In the model of betweenness with dimension $n>2$ each 3-bundle (a set of straight lines in a 3-dimensional submodel that passes through a fixed point) as a projective plane turns out to be a desarguesian plane. On these grounds a formulation (and proof in the case $n=3$) for the following theorem is given:

Every model of betweenness X with dimension $n>2$ is isomorphic with a convex region in the n-dimensional linear space over an ordered skew field.

The notion of k-frame is introduced, by which a group of reflections-movements Ω (group of proper movements Ω_0) is defined as a group of automorphisms of model X, acting simple-transitively on the set of all n-frames ($(n-1)$-frames). When the straight lines in the model X as ordered sets are continuous in the sense of Dedekind, the theory of couple (X, Ω) coincides with n-dimensional absolute geometry. Some problems are raised about the theory of couple (X, Ω) (couple (X, Ω_0)) in the non-continual case.

Tartu State University

Received
Dec. 3rd, 1963