

## О КОРНЯХ УРАВНЕНИЯ ЛЭМБА ДЛЯ ДЕФОРМАЦИИ ПЛИТЫ, АНТИСИММЕТРИЧНОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СРЕДИННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

У. НИГУЛ,

кандидат технических наук

Излагаются результаты численного и качественного исследования корней уравнения Лэмба [1], выполненного как подготовительный этап применения трехмерной теории упругости в задачах распространения волн в упругих плитах.

Приводится диаграмма, определяющая 8 первых пар корней (корни одной пары отличаются только по знаку) уравнения Лэмба как функции частоты, а также диаграмма групповых скоростей, соответствующих чисто мнимым ветвям корней. Изучаются качественные свойства корней и рассматриваются 4 группы методов их аппроксимации: а) приближение первых корней формулами двумерных теорий, б) асимптотическое приближение комплексных корней формулами статики при малых частотах, в) приближение малых корней при ненулевых значениях частот, г) приближение больших мнимых корней при больших частотах.

Точные корни определены при помощи итерационного процесса, программированного А. Ю. Мяннил, которой автор выражает свою благодарность.

Расчеты были выполнены при помощи вычислительной машины М-3. Нулевые приближения были подобраны при помощи вышеупомянутых приближенных методов.

### 1. Диаграмма корней уравнения Лэмба

Определим безразмерную частоту  $\Omega$  по формуле

$$\Omega = \frac{h\omega}{c_2}, \quad (1.1)$$

где  $\omega$  — круговая частота,  $h$  — полутолщина плиты,  $c_2$  — скорость распространения волн сдвига.

Будем рассматривать  $\Omega$  как вещественный параметр и примем уравнение Лэмба в форме [2]:

$$-\frac{2q^2\beta^2}{\Omega^2} \left( \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\beta} - \cos \beta \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right) + \frac{\Omega^2}{2} \cos \beta \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 0, \quad (1.2)$$

где \*

$$\alpha^2 = q^2 + k_0^2 \Omega^2, \quad \beta^2 = q^2 + \Omega^2, \quad k_0^2 = \frac{1-2\mu}{2-2\mu}, \quad (1.3)$$

$\mu$  — коэффициент Пуассона.

В численных расчетах данной статьи принято  $\mu = 0,3$ .

При любом конечном значении  $\Omega$  уравнение (1.2) имеет бесконечное число комплексных корней  $q = \pm(\delta \pm i\theta)$ , конечное число вещест-

\* Обозначения совпадают с таковыми в [2], если полагать  $s = i\Omega$ .

венных корней  $q = \pm \lambda$  и конечное число мнимых корней  $q = \pm i\kappa$ . (Здесь  $\delta, \vartheta, \lambda, \kappa$  — положительные вещественные величины, зависящие от  $\Omega$ .)

Численное исследование мнимых корней уравнения (1.2) было начато уже Лэмбом [3]. В настоящее время имеется ряд работ, указанных в [4], которые посвящены анализу мнимых и вещественных ветвей корней уравнения (1.2). Некоторая информация о комплексных корнях изложена в работе [5].

На рис. 1 приведена диаграмма сводного типа для  $\delta_j, \vartheta_j, \lambda_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и для  $\kappa_k$  ( $k = 1, 2, \dots, 5$ ). Она позволяет определить 8 первых пар корней  $\pm q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) как функции от  $\Omega$ .

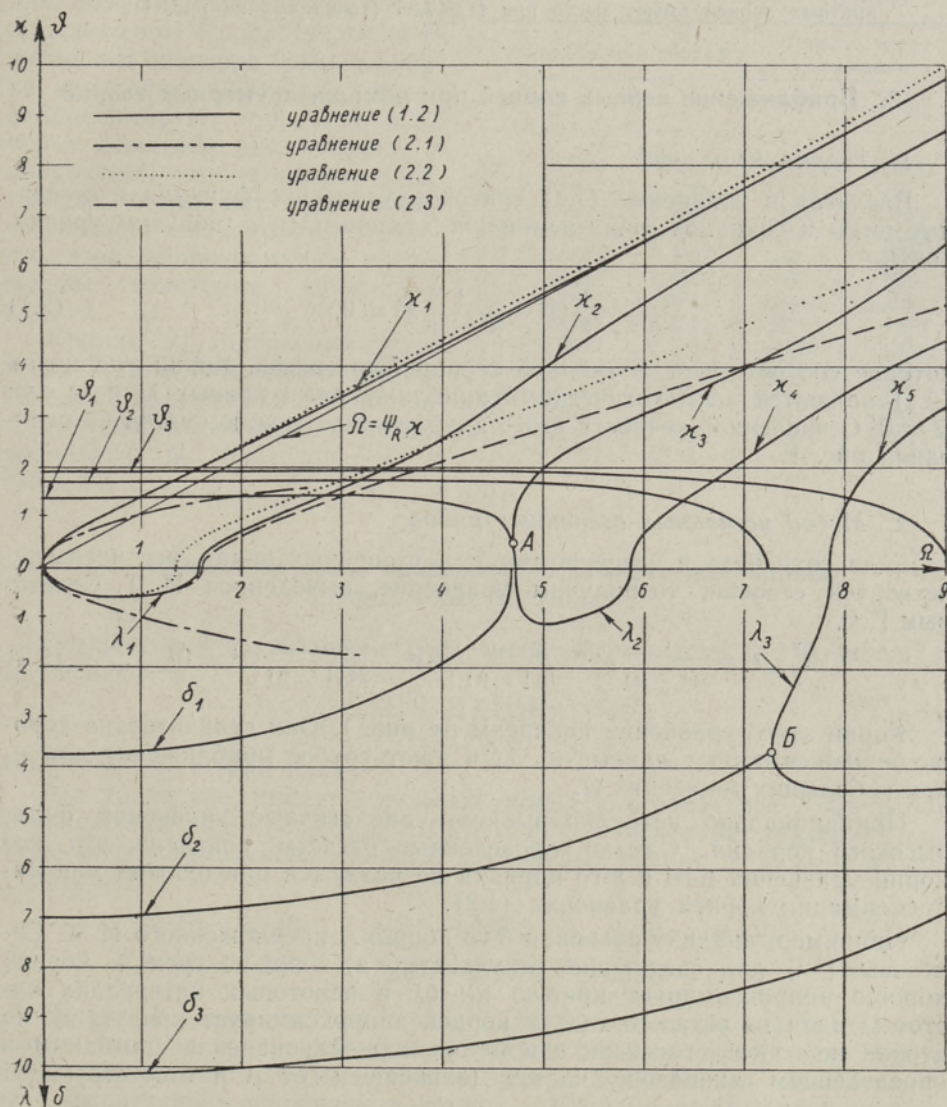


Рис. 1. Корни уравнения Лэмба (1.2) и приближенных уравнений (2.1), (2.2), (2.3).

( $\lambda_j, \kappa_j, \delta_j, \vartheta_j$  обозначают соответственно абсолютные величины вещественных корней, мнимых корней, вещественной части комплексных корней и мнимой части комплексных корней).

Из рис. 1 следует, что существуют кратные корни (точки разветвления корней) 5-ти видов:

1. Четырехкратный нулевой корень в точке  $\Omega = 0$ .
2. Двукратные нулевые корни в точках  $\Omega = \frac{m\pi}{2}$  ( $m = 1, 3, 5, \dots \infty$ ).
3. Двукратные нулевые корни в точках  $\Omega = \frac{n\pi}{k_0}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots \infty$ ).
4. Двукратные мнимые корни ( $q = ix$  и  $q = -ix$ ). Первые пары таких кратных корней имеют место при  $\Omega = \frac{3}{2}\pi - 0,0042$  (точка «А» на рис. 1 и 2).
5. Двукратные вещественные корни ( $q = \lambda$  и  $q = -\lambda$ ). Первые пары таких кратных корней имеют место при  $\Omega = 7,25$  (точка «Б» на рис. 1).

## 2. Приближение первых корней при помощи двумерных теорий

### 1. Теория Кирхгоффа

Разлагая в уравнении (1.2) тригонометрические функции в степенные ряды и сохраняя лишь наименьшие степени  $\Omega$  и  $q$ , получим уравнение [2]

$$\frac{1}{2}\Omega^2 - \frac{1}{3-3\mu}q^4 = 0, \quad (2.1)$$

которое соответствует двумерной теории Кирхгоффа. Корни уравнения (2.1) являются асимптотическими приближениями кривых  $\lambda_1$  и  $\chi_1$  при  $\Omega \rightarrow 0$ . О численной точности этого приближения можно судить на основании рис. 1.

### 2. Метод усеченных степенных рядов

Если сохранить в вышеупомянутых степенных рядах все члены до четвертой степени, то получим уравнение, выведенное И. Т. Селезовым [6, 7],

$$\frac{1}{2}\Omega^2 - \frac{1}{3(1-\mu)}q^4 - \frac{2-\mu}{3(1-\mu)}q^2\Omega^2 - \frac{7-8\mu}{24(1-\mu)}\Omega^4 = 0. \quad (2.2)$$

Корни этого уравнения показаны на рис. 1. Они сравнительно хорошо аппроксимируют кривые  $\chi_1$ ,  $\lambda_1$  и дают грубое приближение для  $\chi_2$  при небольших значениях  $\Omega$ .

Принципиально нетрудно выписать аналогичные уравнения более высокого порядка. Однако проведенные расчеты показали, что все корни уравнений 6-го и 8-го порядка не являются пригодными для аппроксимации корней уравнения (1.2).

Например, анализ уравнения 6-го порядка, предложенного И. Т. Селезовым [6, 7], дал следующие результаты: а) один из трех  $\pm$  корней хорошо аппроксимирует кривую  $\chi_1$ ; б) в некоторых интервалах частот  $\Omega$  один из остальных двух корней аппроксимирует кривую  $\chi_2$ , но второй не соответствует ни одному из корней уравнения Лэмба; в) в определенном диапазоне частот (зависящей от  $\mu$  и отсутствующей только при  $\mu = \frac{1}{2}$ ) имеют место комплексные корни, которые не аппроксимируют корней уравнения Лэмба.

Была также установлена непригодность корней уравнения 8-го порядка для аппроксимации кривых  $\delta_1$ ,  $\theta_1$ .

В связи с указанным следует признать практически эффективным только уравнение (2.2) метода усеченных степенных рядов, если имеют в виду применение всех корней приближенного уравнения.

### 3. Теория типа Тимошенко

В двумерной теории типа Тимошенко [8, 9] соответствует уравнению Лэмба (1.2) приближенное уравнение

$$\frac{1}{2} \Omega^2 - \frac{1}{3(1-\mu)} (q^2 + \frac{1-\mu}{2} \Omega^2) (q^2 + \frac{1}{k^2} \Omega^2) = 0. \quad (2.3)$$

Если подобрать (при  $\mu = 0,3$ ) для коэффициента сдвига  $k^2$  по предложению Р. Д. Миндлина [9] численное значение 0,860, то корни уравнения (2.3) так хорошо аппроксимируют кривые  $\chi_1$  и  $\lambda_1$ , что в масштабе рис. 1 точные и аппроксимирующие кривые практически совпадают. Для количественной иллюстрации точности этой аппроксимации приведены некоторые данные в табл. 1.

Кривая  $\chi_2$  аппроксимируется теорией типа Тимошенко с практически приемлемой точностью только при сравнительно малых значениях  $\Omega$  (см. рис. 1 и табл. 1).

Таблица 1

$\Omega$	Трехмерная теория		Теория типа Тимошенко	
	$\pm q_1$	$\pm q_2$	$\pm q_1$	$\pm q_2$
0,0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,5	0,8408 <i>i</i>	0,5773	0,8435 <i>i</i>	0,5773
1,0	1,355 <i>i</i>	0,5882	1,363 <i>i</i>	0,5882
1,5	1,852 <i>i</i>	0,2501	1,868 <i>i</i>	0,2942
2,0	2,350 <i>i</i>	0,7007 <i>i</i>	2,375 <i>i</i>	0,6401 <i>i</i>
2,5	2,854 <i>i</i>	1,150 <i>i</i>	2,887 <i>i</i>	1,058 <i>i</i>
3,0	3,362 <i>i</i>	1,574 <i>i</i>	3,404 <i>i</i>	1,425 <i>i</i>
3,5	3,875 <i>i</i>	2,024 <i>i</i>	3,924 <i>i</i>	1,769 <i>i</i>
4,0	4,393 <i>i</i>	2,558 <i>i</i>	4,448 <i>i</i>	2,101 <i>i</i>
5,0	5,439 <i>i</i>	3,223 <i>i</i>	5,503 <i>i</i>	2,744 <i>i</i>
6,0	6,497 <i>i</i>	5,275 <i>i</i>	6,565 <i>i</i>	3,371 <i>i</i>
7,0	7,562 <i>i</i>	6,471 <i>i</i>	7,631 <i>i</i>	3,987 <i>i</i>
8,0	8,634 <i>i</i>	7,594 <i>i</i>	8,699 <i>i</i>	4,598 <i>i</i>
9,0	9,708 <i>i</i>	8,676 <i>i</i>	9,770 <i>i</i>	5,204 <i>i</i>

### 3. Асимптотическое приближение комплексных корней при малых частотах

Осуществляя в уравнении (1.2) переход к пределу  $\Omega \rightarrow 0$ , получим уравнение [2, 5]

$$\left[ \frac{\sin 2q(0)}{2q(0)} - 1 \right] [q(0)]^2 = 0, \quad (3.1)$$

известное из статики плит [10].

Это уравнение имеет 4 нулевых корня и бесконечное количество комплексных корней  $q_j(0) = \delta_j(0) + i\vartheta_j(0)$ . Численные значения для первых трех комплексных корней, показанных на рис. 1, являются следующими [10]:

$$\begin{aligned} \delta_1(0) &= 3,749, & \delta_2(0) &= 6,950, & \delta_3(0) &= 10,119, \\ \vartheta_1(0) &= 1,384, & \vartheta_2(0) &= 1,676, & \vartheta_3(0) &= 1,858. \end{aligned}$$

Из рис. 1 видно, что при малых значениях  $\Omega$  величины  $\delta_j$ ,  $\vartheta_j$  мало изменяются по сравнению с их асимптотическими значениями  $\delta_j(0)$ ,  $\vartheta_j(0)$ , причем почти прямые участки кривых  $\delta_j$ ,  $\vartheta_j$  быстро увеличиваются с возрастанием порядкового номера  $j$ . Поэтому при малых частотах комплексные корни уравнения Лэмба (1.2) могут быть аппроксимированы комплексными корнями уравнения (3.1).

Известно, что в задачах статики с комплексными корнями уравнения (3.1) связано напряженное состояние типа эффекта Сен-Венана.

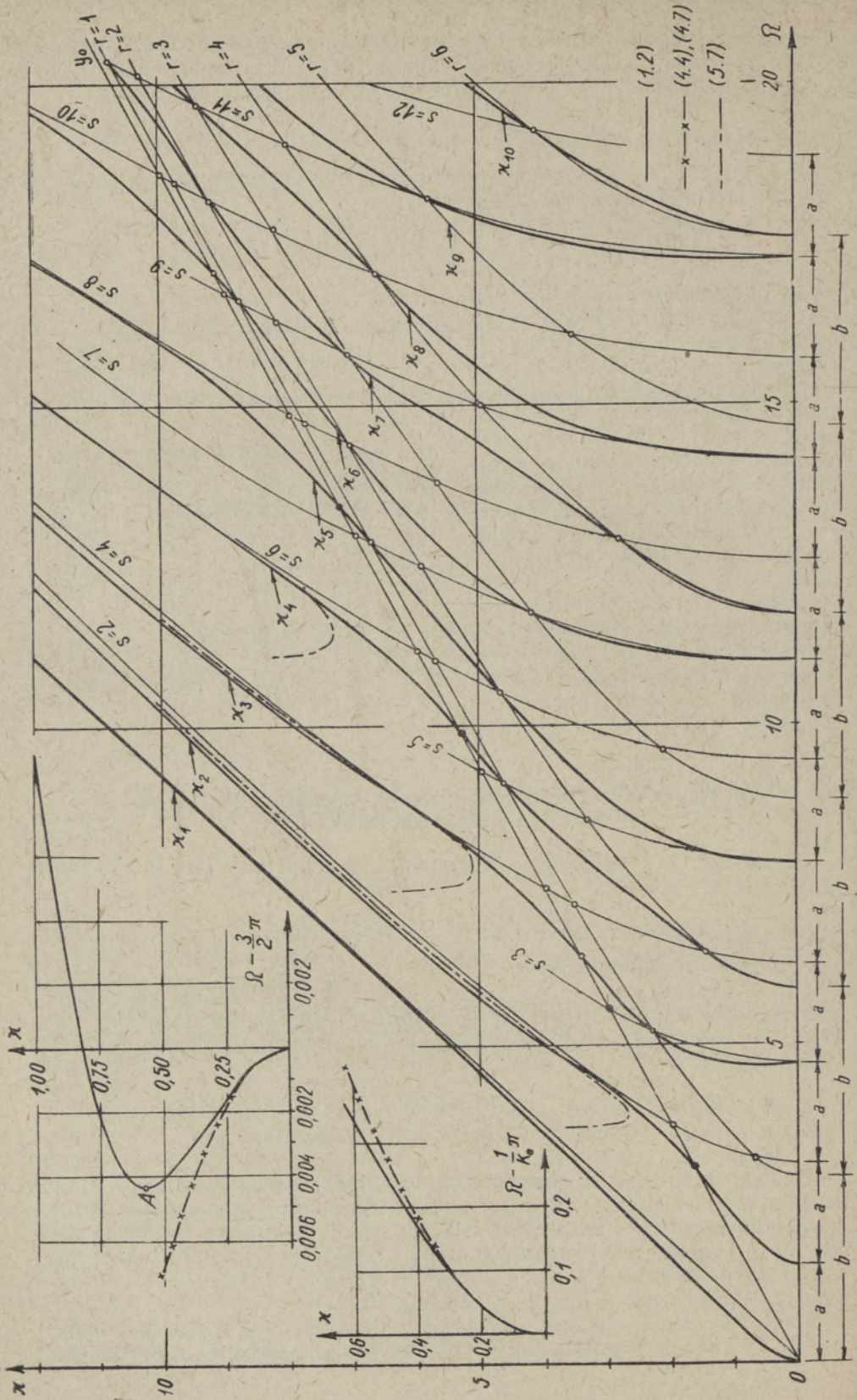


Рис. 2. Минимые корни уравнения Лэмба (1.2) и их аппроксимация формулами (4.4), (4.7), (5.7).  $a = \frac{\pi}{2}$ ,  $b = \frac{\pi}{2k}$ .

Из вышеизложенного следует, что при  $\Omega \ll \frac{3}{2} \pi$  это напряженное состояние мало зависит от частоты.

#### 4. Приближение малых корней при ненулевых значениях $\Omega$

Для приближения корней  $|q| \rightarrow 0$  при  $\Omega \rightarrow \frac{m\pi}{2}$  ( $m = 1, 3, 5, \dots$ ) полагаем

$$\Omega_m^2 \approx \frac{m^2 \pi^2}{4} - q_m^2 R_m. \quad (4.1)$$

Из (1.2) получим в первом приближении для постоянной  $R_m$  формулу

$$R_m = \frac{32\alpha_m}{m^2 \pi^2 \operatorname{tg} \alpha_m}, \quad (4.2)$$

где

$$\alpha_m = \frac{m\pi k_0}{2}. \quad (4.3)$$

Задавая конкретные значения  $m$ , легко вычислить на основе (4.2), (4.3) величины  $R_m$ . В случае  $\mu = 0,3$ , например, имеем  $R_1 = 3,44$ ,  $R_2 = -0,26$ ,  $R_3 = 1,31$  и т. д.

Для корней  $q_m$  получим из (4.1) формулу

$$q_m^2 = \frac{\frac{m^2 \pi^2}{4} - \Omega_m^2}{R_m}. \quad (4.4)$$

При положительных  $R_m$  мнимые корни  $q_m = \pm i\chi_m$  имеют место при  $\Omega_m > \frac{m\pi}{2}$  и вещественные корни  $q_m = \pm \lambda_m$  — при  $\Omega < \frac{m\pi}{2}$ , а при отрицательных  $R_m$  — противоположно.

Выяснение указанного качественного свойства мнимых и вещественных корней представляет большой интерес, поскольку оно тесно связано с определением точек разветвления типа «А» (см. рис. 1, 2) и построением диаграмм отрицательных групповых скоростей (см. п. 7).

О численной точности изложенных формул можно судить на основе диаграмм, приведенных в верхней части рис. 2.

Совершенно аналогично можно построить формулы для корней  $|q| \rightarrow 0$  при  $\Omega \rightarrow \frac{n\pi}{k_0}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).

Полагая

$$\Omega_n^2 \approx \frac{n^2 \pi^2}{k_0^2} - q_n^2 S_n, \quad (4.5)$$

получим на основе (1.2) приближенные формулы

$$S_n = 8 \frac{\operatorname{tg} \beta_n}{\beta_n} + \frac{1}{k_0^2}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{k_0}, \quad (4.6)$$

$$q_n^2 = \frac{\frac{n^2 \pi^2}{k_0^2} - \Omega_n^2}{S_n} \quad (4.7)$$

При положительных  $S_n$  мнимые корни имеют место при  $\Omega_n > \frac{n\pi}{k_0}$  и вещественные корни — при  $\Omega_n < \frac{n\pi}{k_0}$ , а при отрицательных  $S_n$  — противоположно.

### 5. Приближение больших мнимых корней при больших частотах

При  $\Omega \rightarrow \infty$  кривая  $\kappa_1$  асимптотически приближается к прямой  $\Omega = \kappa \psi_R$ , а кривые  $\kappa_j$  ( $j \geq 2$ ) — к прямой  $\Omega = \kappa$ . Здесь  $\psi_R$  обозначает фазовую скорость волн Релея (при  $\mu = 0,3$  имеем  $\psi_R = 0,9274$ ).

Из рис. 2 следует, что кривые  $\kappa_j$  ( $j \geq 3$ ) приближаются к прямой  $\Omega = \kappa$  лишь при весьма больших значениях  $\Omega$ .

Построим приближенные формулы, аппроксимирующие кривые  $\kappa_j$  ( $j \geq 2$ ) в области  $\kappa > k_0 \Omega$ .

Заметим, что в этой области

$$\alpha = i a_*, \quad \beta = \beta_*, \quad (5.1)$$

где величины

$$a_* = \sqrt{\kappa^2 - k_0^2 \Omega^2}, \quad \beta_* = \sqrt{\Omega^2 - \kappa^2} \quad (5.2)$$

являются вещественными. Предполагая, что  $a_* \gg 1$ , принимаем

$$\cos \alpha \approx \frac{1}{2} e^{a_*}, \quad \frac{\sin \alpha}{\alpha} \approx \frac{1}{2a_*} e^{a_*}. \quad (5.3)$$

На основе (5.3) получим из (1.2) формулу

$$\beta_* \operatorname{tg} \beta_* \approx - \frac{(\kappa^2 - \frac{1}{2} \Omega^2)^2}{\kappa^2 a_*}. \quad (5.4)$$

Предполагая далее, что

$$\beta_* = n\pi + T, \quad T = T(\Omega) \ll n\pi \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (5.5)$$

получим из (5.4) в первом приближении формулу

$$\operatorname{tg} T \approx - \frac{\left(\frac{1}{2} \Omega^2 - n^2 \pi^2\right)^2}{n\pi(\Omega^2 - n^2 \pi^2) \sqrt{(1 - k_0^2) \Omega^2 - n^2 \pi^2}}. \quad (5.6)$$

При численно заданных  $n$  и  $\Omega$  формулы (5.5), (5.6) позволяют сравнительно просто определить приближенные значения  $\kappa$  по формуле

$$\kappa \approx \sqrt{\beta_*^2 - \Omega^2}. \quad (5.7)$$

Результаты, представленные на рис. 2, позволяют признать такое приближение практически приемлемым при достаточно больших значениях  $\Omega$  и  $\kappa$ .

### 6. «Опорные точки» диаграмм мнимых корней

Кривые  $\kappa_j$  ( $j \geq 2$ ) пересекают прямую  $y_0 = k_0 \Omega$  в точках, где

$$\alpha = 0, \quad \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1, \quad (6.1)$$

$$\beta = \frac{\Omega}{\sqrt{2 - 2\mu}} = \frac{\kappa}{\sqrt{1 - 2\mu}}. \quad (6.2)$$

Для определения этих точек получим из (1.2) уравнение

$$\frac{\operatorname{tg} \beta}{\beta} = -\frac{\mu^2}{1-2\mu}. \quad (6.3)$$

При  $\mu = 0,3$  первые корни уравнения (6.3) имеют значения:  $\beta_1 = 2,61$ ,  $\beta_2 = 5,40$ ,  $\beta_3 = 8,34$ ,  $\beta_4 = 11,37$ .

На рис. 1 корням уравнения (6.3) соответствуют черные точки.

При конструировании кривых  $\kappa_j$  ( $j \geq 3$ ) в области  $k_0\Omega > \kappa_j > 0$  целесообразно пользоваться еще «опорными точками» вспомогательной сетки Р. Д. Миндлина [4]. Эта сетка показана на рис. 2 тонкими линиями, а «опорные точки» — малыми кружочками.

Одна группа кривых вспомогательной сетки определена уравнениями

$$y_r = \sqrt{k_0^2 \Omega^2 - \frac{r^2 \pi^2}{4}} \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (6.4)$$

и вторая группа — уравнениями

$$z_s = \sqrt{\Omega^2 - \frac{s^2 \pi^2}{4}} \quad (s = 1, 2, 3, \dots). \quad (6.5)$$

В точках пересечения этих кривых

$$y_r = z_s, \quad \Omega = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{s^2 - r^2}}{\sqrt{1 - k_0^2}}. \quad (6.6)$$

Легко убедиться в том, что те из точек (6.6), где  $r$  и  $s$  одновременно имеют либо четные, либо нечетные значения, являются решениями уравнения Лэмба (1.2). Поскольку эти точки легко вычисляются, их можно рассматривать как «опорные точки» диаграмм  $\kappa_j$  ( $j \geq 3$ ).

## 7. Диаграммы групповых скоростей

При решении конкретных задач играют важную роль диаграммы групповых скоростей, соответствующие мнимым корням уравнения Лэмба [1]. Итак, рассмотрим случай

$$q = i\kappa, \quad a = \sqrt{k_0^2 \Omega^2 - \kappa^2}, \quad \beta = \sqrt{\Omega^2 - \kappa^2}. \quad (7.1)$$

На основе (1.2) получим для групповой скорости  $\frac{d\Omega}{d\kappa}$  формулу:

$$\frac{d\Omega}{d\kappa} = \frac{\kappa}{\Omega} \frac{\varphi_1}{\varphi_2}, \quad (7.2)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & (\Omega^2 - 2\kappa^2) \frac{\sin \alpha}{a} \left[ \frac{1}{4} (\Omega^2 - 2\kappa^2) \frac{\sin \beta}{\beta} - 2\cos \beta \right] + \\ & + \frac{1}{4} (\Omega^2 - 2\kappa^2)^2 \frac{\cos \beta}{a^2} \left[ \frac{\sin \alpha}{a} - \cos \alpha \right] + \\ & + \frac{\sin \beta}{\beta} [\kappa^2 \beta^2 \frac{\sin \alpha}{a} + (2\Omega^2 - 3\kappa^2) \cos \alpha] - \kappa^2 \cos \alpha \cos \beta, \\ \varphi_2 = & (\Omega^2 - 2\kappa^2) \frac{\sin \alpha}{a} \left[ \frac{1}{4} (\Omega^2 - 2\kappa^2) \frac{\sin \beta}{\beta} - \cos \beta \right] + \\ & + \frac{k_0^2}{4} (\Omega^2 - 2\kappa^2)^2 \frac{\cos \beta}{a^2} \left[ \frac{\sin \alpha}{a} - \cos \alpha \right] + \\ & + \kappa^2 \frac{\sin \beta}{\beta} [k_0^2 \beta^2 \frac{\sin \alpha}{a} - \cos \alpha] - \kappa^2 \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned} \quad (7.3)$$



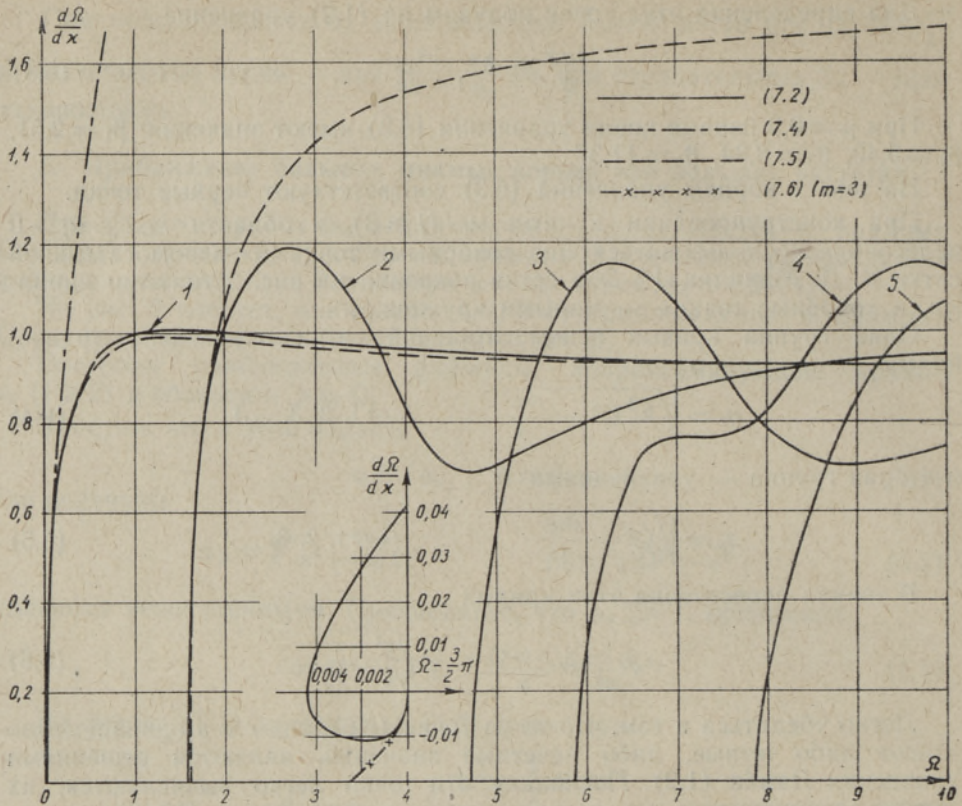


Рис. 3. Диаграммы групповых скоростей по точной формуле (7.2) и по приближенным формулам (7.4), (7.5), (7.6).

На основе теории Кирхгоффа получим приближенно

$$\frac{d\Omega}{d\kappa} = 2\sqrt{\frac{2}{3-3\mu}} \sqrt{\Omega}, \quad (7.4)$$

а на основе теории типа Тимошенко —

$$\frac{d\Omega}{d\kappa} = \frac{\kappa}{\Omega} \frac{4\kappa^2 - \left(1 - \mu + \frac{2}{k_0^2}\right) \Omega^2}{3 - 3\mu + \left(1 - \mu + \frac{2}{k_0^2}\right) \kappa^2 - \frac{2 - 2\mu}{k_0^2} \Omega^2}. \quad (7.5)$$

Формулам (4.1), (4.5) соответствуют выражения групповой скорости

$$\frac{d\Omega}{d\kappa} = \frac{\kappa}{\Omega} R_m, \quad \frac{d\Omega}{d\kappa} = \frac{\kappa}{\Omega} S_n. \quad (7.6)$$

На рис. 3 показаны диаграммы групповых скоростей, которые соответствуют кривым  $\kappa_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 5$ ) на рис. 1. Одной из этих кривых  $\kappa_j$ , именно кривой  $\kappa_3$ , соответствуют (в диапазоне от точки  $\kappa_3 = 0$  до точки «А») отрицательные значения  $\frac{d\Omega}{d\kappa}$ , которые в увеличенном масштабе отдельно показаны на рис. 3.

При отрицательных  $R_m$  и  $S_n$  групповая скорость  $\frac{d\Omega}{dz}$  и фазовая скорость  $\frac{\Omega}{z}$  имеют противоположные знаки в окрестности точек  $\Omega = \frac{1}{2}m\pi$ ,  $\Omega = k_0^{-1}n\pi$ . Такие участки диаграмм групповых скоростей, впервые численно исследованные недавно [11], принято называть участками «отрицательных групповых скоростей», хотя более логично было бы говорить об отрицательных фазовых скоростях. Осуществляя, например, в точке А аналитическое продолжение корней, нетрудно убедиться в том, что «отрицательные» и «положительные» участки диаграммы групповых скоростей соответствуют различным корням.

Из формул (7.3), а также из сопоставления рис. 3 с диаграммами других авторов [11] следует, что кривые  $\frac{d\Omega}{dz}$  являются очень «чувствительными» относительно коэффициента Пуассона.

На рис. 3 показаны также кривые, построенные на основе формул (7.4), (7.5) двумерных теорий. Теория Кирхгоффа хорошо аппроксимирует лишь первую кривую  $\frac{d\Omega}{dz}$  при очень малых значениях  $\Omega$ . Теория типа Тимошенко хорошо аппроксимирует первую кривую  $\frac{d\Omega}{dz}$  при любых значениях  $\Omega$ , а вторую — только при  $\Omega \leq 2$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. H. Lamb, On the Flexure of an Elastic Plate (Appendix), Proc. Lond. Math. Soc., vol. 21, p. 85, 1889—1890.
2. У. К. Нигул, О применении символического метода А. И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит, Изв. АН ЭССР, т. XII, № 2, 1963.
3. H. Lamb, On Waves in an Elastic Plate, Proc. Roy. Soc., A, vol. 93, 1917, p. 114.
4. R. D. Mindlin, Waves and Vibrations in Isotropic, Elastic Plates, «Structural Mechanics», Perg. Press, p. 199, 1960.
5. J. W. Sherwood, Propagation in an Infinite Elastic Plate, J. Acoust. Soc. Amer., vol. 30, No. 10, 1958, p. 979.
6. І. Т. Селезов, Дослідження поперечних коливань пластини, Прикладна механіка, т. VI, в. 5, 1960, стр. 319.
7. І. Т. Селезов, Про поперечні коливання пластини, Доп. АН Укр. РСР, 9, 1960, стр. 1190.
8. Я. С. Уфлянд, Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин, ПИММ, т. XII, вып. 3, 1948, стр. 287.
9. R. D. Mindlin, Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, J. Appl. Mech., vol. 18, No. 1, 1951, p. 31.
10. А. И. Лурье, К теории толстых плит, ПИММ, т. VI, 1942, стр. 152.
11. I. Tolstoy, E. Usdin, Wave Propagation in Elastic Plates: Low and High Mode Dispersion, J. Acoust. Soc. Amer., vol. 29, No. 1, 1957, p. 37.

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
19. X 1962

LAMBI VÖRRANDI JUURTEST PLAADI KESKPINNA SUHTES  
ANTISÜMMEETRILISE DEFORMATSIOONI PUHUL

U. Nigul,  
tehnikateaduste kandidaat

*Resüme*

Esitatakse Lambi võrrandi (1.2) juurte ja grupikiiruste (7.2) uurimise tulemusi ning käsitletakse mitmesuguseid juurte aproksimeerimise meetodeid. Reaalsete ( $q=\pm\lambda$ ) ja imaginaarsete ( $q=\pm i\kappa$ ) harude kõrval vaadeldakse ka juurte kompleksseid harusid  $q=\pm(\delta\pm i\theta)$ .

Numbrilised tulemused esitatakse joonistel 1, 2, 3 ning tabelis 1. Arvutustes kasutati Poisson'i tegurit  $\mu=0,3$ .

*Eesti NSV Teaduste Akadeemia  
Küberneetika Instituut*

Saabus toimetusse  
19. X 1962

ON THE ROOTS OF LAMB EQUATION FOR A DEFORMATION ANTISYMMETRIC  
ABOUT THE MIDDLE PLANE OF THE PLATE

U. Nigul

*Summary*

The results of a numerical research of Lamb equation (1.2) roots and group velocities (7.2) are presented, and several methods for roots approximation are discussed. Besides real ( $q=\pm\lambda$ ) and imaginary ( $q=\pm i\kappa$ ) branches also the complex branches  $q=\pm(\delta\pm i\theta)$  of roots are investigated.

The numerical results are given in figs. 1, 2, 3 and in table 1. In calculations Poisson's ratio  $\mu=0.3$  has been used.

*Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,  
Institute of Cybernetics*

Received  
Oct. 19th, 1962