EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1963, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1963, № 3

О КВАЗИБЕСПОВТОРНОСТИ РЕЛЕЙНО-КОНТАКТНЫХ СХЕМ

П. ХАНКО

В работе Б. А. Трахтенброта [1] излагается синтез бесповторных схем, т. е. схем, в которых с каждым реле связан только один (либо замыкающий, либо размыкающий) контакт. Б. Ю. Пильчак [2] обобщила этот метод на случай схем, в которых с каждым реле может быть связан один замыкающий и один размыкающий контакт (но не обязательно оба). Такие схемы она назвала квазибесповторными схемами. Б. Ю. Пильчак описывает синтез квазибесповторной схемы, но не дает условий, при помощи которых можно до начала синтеза установить, является ли данная дизъюнктивная нормальная форма (д.н.ф.)

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{N}_t$$

формулой проводимости какой-либо квазибесповторной схемы или нет. Квазибесповторная реализуемость д.н.ф. выясняется только после применения алгоритма: если мы получим схему, значит, формула квазибесповторно реализуема; если синтез не удастся, значит, квазибесповторной реализации нет.

В настоящей статье дается достаточный признак, при наличии которого данная д.н.ф. является формулой проводимости какой-нибудь квазибесповторной схемы.

§ 1.

Пусть д.н.ф.

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 \vee \mathfrak{N}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{N}_t \tag{1.1}$$

имеет следующее свойство: если хотя бы одна конъюнкция $\mathfrak{N}_i$ содержит булеву переменную a и хотя бы одна конъюнкция $\mathfrak{N}_j$ $(i \neq j)$ содержит булеву переменную $b\,(b \neq a)$, то ни одна конъюнкция не содержит ab. Мы скажем, что (1.1) имеет свойство A относительно пары булевых переменных a, b или, другими словами, что (1.1) *имеет свойство* $A(a, b)$.

Д.н.ф. (1.1) со свойством $A\ (a, b)$ может содержать элементарные конъюнкции трех типов:

1) конъюнкции $a\mathfrak{A}_1, a\mathfrak{A}_2, \ldots, a\mathfrak{A}_p$, которые не содержат b (но они могут содержать $\bar{b}$);

2) конъюнкции $b\mathfrak{B}_1, b\mathfrak{B}_2, \ldots, b\mathfrak{B}_q$, которые не содержат a (но они могут содержать $\bar{a}$);

3) конъюнкции $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_s$, которые не содержат ни a, ни b (но они могут содержать как $\bar{a}$, так и $\bar{b}$).

Д.н.ф. (1.1) с свойством $A(a, b)$ можно представить в виде

$$\mathfrak{M} = a(\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}_p) \vee b(\mathfrak{B}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_q) \vee \mathfrak{G}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{G}_s. \tag{1.2}$$

Введем обозначение

$$\mathfrak{N}_i \vee \ldots \vee \mathfrak{N}_j = \mathfrak{N}_{ij}$$

для дизъюнкции элементарных конъюнкций, где индексы в левой части изменяются подряд с i до j. Д.н.ф. (1.2) получит тогда вид

$$\mathfrak{M} = a\,\mathfrak{A}_{1p} \vee b\,\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}_{1s}. \tag{1.3}$$

Мы скажем, что в д.н.ф. (1.1) свойство $A\,(a, b)$ нарушается, если в ней кроме конъюнкций первого, второго и третьего типа найдется хотя бы одна конъюнкция вида $ab\mathfrak{C}$. Д.н.ф. (1.1) *имеет свойство А абсолютно*, если ни одна пара булевых переменных в д.н.ф. (1.1) не нарушает свойство A. Для исследования квазибесповторной реализуемости д.н.ф. (1.3) существенно выяснить, при каких случаях пересечений конъюнкций $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$ д.н.ф. (1.3) имеет свойство A абсолютно. При этом приходится учитывать все возможные случаи пересечения конъюнкций $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$, т. е.

1° ни одна пара из конъюнкций $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$ не пересекается;

2° между собою пересекаются конъюнкции только одного и того же типа;

3° между собою пересекаются конъюнкции разных типов.

В случае 2° предполагаем, что между собою пересекаются конъюнкции только первого типа $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p$. Разбиваем конъюнкции $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p$ на $l+1$ групп следующим образом:

к первой группе относятся $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$, которые пересекаются и имеют общую часть $\mathfrak{E}_1$, то есть

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}'_1\,\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}'_\alpha\,\mathfrak{E}_1;$$

к второй группе относятся $\mathfrak{A}_{\alpha+1}, \ldots, \mathfrak{A}_\beta$, которые пересекаются и имеют общую часть $\mathfrak{E}_2$, то есть

$$\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{A}'_{\alpha+1}\,\mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\beta = \mathfrak{A}'_\beta\mathfrak{E}_2;$$

. . . .

к l-ой группе относятся $\mathfrak{A}_{\gamma+1}, \ldots, \mathfrak{A}_\delta$, которые пересекаются и имеют общую часть $\mathfrak{E}_l$, то есть

$$\mathfrak{A}_{\gamma+1} = \mathfrak{A}'_{\gamma+1}\,\mathfrak{E}_l, \ldots, \mathfrak{A}_\delta = \mathfrak{A}'_\delta\mathfrak{E}_l;$$

к $(l+1)$-ой группе относятся $\mathfrak{A}_{\delta+1}, \ldots, \mathfrak{A}_p$, которые не пересекаются ни между собою, ни с $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, \delta)$. Разбивка сделана так, что конъюнкции $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_l$ не пересекаются между собою.

С учетом разбивки д.н.ф. (1.3) приобретет вид

$$\mathfrak{M}_1 = a(\mathfrak{A}'_{1\alpha}\,\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{A}'_{\alpha+1,\beta}\,\mathfrak{E}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}'_{\gamma+1,\delta}\mathfrak{E}_l \vee \mathfrak{A}_{\delta+1,p}) \vee b\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}_{1s}. \tag{1.4}$$

Аналогично, если в д.н.ф. (1.3) между собою пересекаются конъюнкции второго типа $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q$ или третьего типа $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$, то д.н.ф. (1.3) приобретет вид

$$\mathfrak{M}_2 = a\mathfrak{A}_{1p} \vee b(\mathfrak{B}'_{1\alpha}\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{B}'_{\alpha+1,\beta}\mathfrak{E}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}'_{\gamma+1,\delta}\mathfrak{E}_l \vee \mathfrak{B}_{\delta+1,q}) \vee \mathfrak{G}_{1s} \tag{1.5}$$

или

$$\mathfrak{M}_3 = a\mathfrak{A}_{1p} \vee b\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}'_{1\alpha}\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{G}'_{\alpha+1,\beta}\mathfrak{E}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{G}'_{\gamma+1,\delta}\mathfrak{E}_l \vee \mathfrak{G}_{\delta+1,s} \tag{1.6}$$

соответственно.

Теорема 1. *Д.н.ф.* (1.3) *имеет свойство A абсолютно только в следующих случаях пересечений конъюнкций* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$:

1) *если ни одна пара из конъюнкций* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$ *не пересекается;*

2) *если она имеет вид* (1.4) (*соответственно* (1.5) *или* (1.6)), *причем* $\mathfrak{A}'_i$ *пересекается с* $\mathfrak{A}'_j$ $(i \neq j)$ *только в случае, когда* $\mathfrak{A}'_i$ *и* $\mathfrak{A}'_j$ *принадлежат к одной и той же группе относительно разбивки* (*то же относительно* $\mathfrak{B}'_i$ *и* $\mathfrak{B}'_j$ *или* $\mathfrak{G}'_i$ *и* $\mathfrak{G}'_j$ *соответственно*);

3) *если все конъюнкции* $\mathfrak{A}_i$ $(i=1, \ldots, p)$ *пересекаются со всеми конъюнкциями* $\mathfrak{B}_j (j=1, \ldots, q)$ *и имеют одну и ту же общую часть* $\mathfrak{D}$;

4) *если все конъюнкции* $\mathfrak{A}_i$ $(i=1, \ldots, p)$ (*или, все конъюнкции* $\mathfrak{B}_j$ $(j=1, \ldots, q)$) *пересекаются с некоторыми конъюнкциями* $\mathfrak{G}_k$ $(k=1, \ldots, s)$ *и имеют одну и ту же общую часть* $\mathfrak{E}$.

Доказательство. 1. Пусть в д.н.ф. (1.3) ни одна пара из конъюнкций $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$ не пересекается. Методом перебора легко установить, что ни одна пара из булевых переменных $a, b, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_q, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s$ не нарушает свойство A; т. е. д.н.ф. (1.3) имеет свойство A абсолютно.

2. Пусть в д.н.ф. (1.3) между собою пересекаются только конъюнкции $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p$. Д.н.ф. (1.3) принимает тогда вид (1.4). Пусть пересекаются между собою $\mathfrak{A}'_i$ и $\mathfrak{A}'_j$ $(i \neq j)$, относящиеся к одной и той же группе. Без ограничения общности можно допустить, что пересечения имеются только в первой группе. Разбиваем $\mathfrak{A}'_1, \ldots, \mathfrak{A}'_\alpha$ на $m+1$ групп по их общим частям $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$. После выделения $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ получим

$$\mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}''_1\mathfrak{F}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{A}'_\eta = \mathfrak{A}''_\eta\mathfrak{F}_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{A}'_{\vartheta+1} = \mathfrak{A}''_{\vartheta+1}\mathfrak{F}_m, \ \ldots, \ \mathfrak{A}'_\varkappa = \mathfrak{A}''_\varkappa\mathfrak{F}_m.$$

Разбивка сделана так, что $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_m$ не пересекаются между собою и $\mathfrak{A}'_{\varkappa+1}, \ldots, \mathfrak{A}'_\alpha$ не пересекаются ни между собою, ни с другими $\mathfrak{A}'_i$ $(i=1, \ldots, \varkappa)$. Д.н.ф. (1.4) примет вид

$$\mathfrak{M}'_1 = a[(\mathfrak{A}''_{1\eta}\mathfrak{F}_1 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}''_{\vartheta+1,\varkappa}\mathfrak{F}_m \vee \mathfrak{A}'_{\varkappa+1,\alpha})\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{A}'_{\alpha+1,\beta}\mathfrak{E}_2 \vee \ldots$$
$$\ldots \vee \mathfrak{A}'_{\gamma+1,\delta}\mathfrak{E}_l \vee \mathfrak{A}_{\delta+1,p}] \vee b\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}_{1s}. \tag{1.7}$$

Если в д.н.ф. (1.7) пересекаются $\mathfrak{A}''_i$ и $\mathfrak{A}''_j$ $(i \neq j)$, относящиеся к одной и той же группе, то опять разбиваем конъюнкции в этой группе на подгруппы по их общим частям, преобразуем д.н.ф. и т. д. Процесс продолжим до тех пор, пока ни в одной группе больше не будет пересечений конъюнкций.

Для конкретности допустим, что в д.н.ф. (1.7) конъюнкции $\mathfrak{A}''_i$ $(i=1, \ldots, \varkappa)$ ни одной группы больше не пересекаются между собою. Тогда проверка методом перебора показывает, что свойство A не нарушается относительно ни одной пары булевых переменных, т. е. д.н.ф. (1.6) имеет свойство A абсолютно.

Покажем, что д.н.ф. (1.4) не имеет свойства A абсолютно, если между собою пересекаются $\mathfrak{A}'_i$ и $\mathfrak{A}'_j$ $(i \neq j)$, относящиеся к разным группам, или $\mathfrak{A}'_i$ $(i = 1, \ldots, \delta)$ пересекается с $\mathfrak{E}_j$ $(j = 1, \ldots, l)$. Допустим, что $\mathfrak{A}'_1$ пересекается с $\mathfrak{A}'_{\alpha+1}$ или с $\mathfrak{E}_2$. Если полагать $\mathfrak{A}'_1 = \mathfrak{A}''_1 \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{A}'_{\alpha+1} = \mathfrak{A}''_{\alpha+1} \mathfrak{E}$ или $\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}'_2 \mathfrak{E}$, то д.н.ф. (1.4) получит вид

$$\mathfrak{M}''_1 = a(\underline{\mathfrak{A}''_1 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}} \vee \underline{\mathfrak{A}'_{2,\alpha} \mathfrak{E}_1} \vee \underline{\mathfrak{A}''_{\alpha+1} \mathfrak{E}_2 \mathfrak{E}} \vee \mathfrak{A}'_{\alpha+2,\beta} \mathfrak{E}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{A}'_{\gamma+1,\delta} \mathfrak{E}_l \vee \\ \vee \mathfrak{A}_{\delta+1,p}) \vee b\,\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}_{1s}.$$

или

$$\mathfrak{M}'''_1 = a(\underline{\mathfrak{A}''_1 \mathfrak{E}_1 \mathfrak{E}} \vee \underline{\mathfrak{A}'_{2\alpha} \mathfrak{E}_1} \vee \underline{\mathfrak{A}'_{\alpha+1,\beta} \mathfrak{E}'_2 \mathfrak{E}} \vee \ldots \vee \mathfrak{A}'_{\gamma+1,\delta} \mathfrak{E}_l \vee \\ \vee \mathfrak{A}_{\delta+1,p}) \vee b\,\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}_{1s}$$

соответственно. По подчеркнутым членам видно, что свойство $A\,(\mathfrak{E}, \mathfrak{E}_1.)$ нарушается.

Итак, если д.н.ф. (1.3) имеет вид (1.4), то свойство A сохраняется абсолютно только в том случае, если пересекаются $\mathfrak{A}'_i$ и $\mathfrak{A}'_j$ $(i \neq j)$, относящиеся к одной и той же группе.

3. Пусть в д.н.ф. (1.3) все конъюнкции $\mathfrak{A}_i (i = 1, \ldots, p)$ пересекаются со всеми конъюнкциями $\mathfrak{B}_j (j = 1, \ldots, q)$ и имеют общую часть $\mathfrak{D}$, то есть

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}'_1 \mathfrak{D}, \ldots, \mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}'_p \mathfrak{D}\,,$$
$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{D}, \ldots, \mathfrak{B}_q = \mathfrak{B}'_q \mathfrak{D}.$$

Тогда д.н.ф. (1.3) примет вид

$$\mathfrak{M}_4 = a\mathfrak{A}'_{1p}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}'_{1q}\mathfrak{D} \vee \mathfrak{G}_{1s}. \tag{1.8}$$

Если в д.н.ф. (1.8) ни одна пара из конъюнкций $\mathfrak{A}'_1, \ldots, \mathfrak{A}'_p, \mathfrak{B}'_1, \ldots, \mathfrak{B}'_q, \mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_s, \mathfrak{D}$ не пересекается, то методом перебора легко доказывается, что д.н.ф. (1.8) имеет свойство A абсолютно.

Остается показать, что в остальных случаях пересечений конъюнкций первого типа с конъюнкциями второго типа д.н.ф. (1.3) не имеет свойства A абсолютно.

Пусть конъюнкции $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ пересекаются с конъюнкциями $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\beta$ и имеют общую часть $\mathfrak{D}_1$, так что

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}'_1 \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}'_\alpha \mathfrak{D}_1,$$
$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{B}_\beta = \mathfrak{B}'_\beta \mathfrak{D}_1;$$

остальные конъюнкции первого типа $\mathfrak{A}_{\alpha+1}, \ldots, \mathfrak{A}_p$ пересекаются с остальными конъюнкциями второго типа и имеют общую часть $\mathfrak{D}_2 (\mathfrak{D}_2 \neq \mathfrak{D}_1)$:

$$\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{A}'_{\alpha+1} \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}'_p \mathfrak{D}_2,$$
$$\mathfrak{B}_{\beta+1} = \mathfrak{B}'_{\beta+1} \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{B}_q = \mathfrak{B}'_q \mathfrak{D}_2.$$

В этом случае д.н.ф. (1.3) примет вид

$$\mathfrak{M}'_4 = a\mathfrak{A}'_{1\alpha}\mathfrak{D}_1 \vee a\mathfrak{A}'_{\alpha+1,p}\mathfrak{D}_2 \vee b\,\mathfrak{B}'_{1\beta}\mathfrak{D}_1 \vee b\,\mathfrak{B}'_{\beta+1,q}\mathfrak{D}_2 \vee \mathfrak{G}_{1s},$$

в котором нарушаются свойства $A\,(a, \mathfrak{D}_1), A\,(a, \mathfrak{D}_2), A\,(b, \mathfrak{D}_1), A\,(b, \mathfrak{D}_2)$.

Пусть некоторые конъюнкции первого типа $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha$ пересекаются со всеми конъюнкциями второго типа $\mathfrak{B}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ и имеют общую часть $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}'_1\mathfrak{D}, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}'_\alpha\mathfrak{D},$$

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}'_1\mathfrak{D}, \ldots, \mathfrak{B}_q = \mathfrak{B}'_q\mathfrak{D};$$

остальные конъюнкции первого типа $\mathfrak{A}_{\alpha+1}, \ldots, \mathfrak{A}_p$ не имеют пересечения с конъюнкциями $\mathfrak{B}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$. Д.н.ф. (1.3) примет вид

$$\mathfrak{M}''_4 = a\mathfrak{A}'_{1\alpha}\mathfrak{D} \vee a\mathfrak{A}_{\alpha+1,\,p} \vee b\mathfrak{B}'_{1q}\mathfrak{D} \vee \mathfrak{G}_{1s},$$

в котором нарушается свойство $A\,(a, \mathfrak{D})$.

Итак, в случае пересечений конъюнкций первого типа с конъюнкциями второго типа, д.н.ф. (1.3) имеет свойство A абсолютно только тогда, когда все конъюнкции $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ пересекаются со всеми конъюнкциями $\mathfrak{B}_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ и имеют одну и ту же общую часть $\mathfrak{D}$.

4. Рассмотрим случай пересечения конъюнкций первого типа с конъюнкциями третьего типа. Пусть все конъюнкции первого типа $\mathfrak{A}_i (i = 1, \ldots, p)$ пересекаются с некоторыми конъюнкциями третьего типа $\mathfrak{G}_k (k = 1, \ldots, \alpha)$ и имеют общую часть $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}'_1\mathfrak{E}, \ldots, \mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}'_p\mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}'_1\mathfrak{E}, \ldots, \mathfrak{G}_\alpha = \mathfrak{G}'_\alpha\mathfrak{E};$$

остальные конъюнкции $\mathfrak{G}_l (l = \alpha + 1, \ldots, s)$ не пересекаются с $\mathfrak{A}_i$. Д.н.ф. (1.3) получит вид

$$\mathfrak{M}_5 = a\mathfrak{A}'_{1p}\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}'_{1\alpha}\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G}_{\alpha+1,\,p}. \tag{1.9}$$

Если в д.н.ф. (1.9) ни одна пара из конъюнкций

$$\mathfrak{A}'_i\,(i = 1, \ldots, p),\ \mathfrak{B}_j (j = 1, \ldots, q),\quad \mathfrak{G}'_k\,(k = 1, \ldots, \alpha),$$
$$\mathfrak{G}_l (l = \alpha + 1, \ldots, s),\ \mathfrak{E}$$

не пересекается, то методом перебора легко доказывается, что д.н.ф. (1.9) имеет свойство A абсолютно.

Остается показать, что в остальных случаях пересечений конъюнкций первого типа с конъюнкциями третьего типа д.н.ф. (1.3) не имеет свойства A абсолютно.

Пусть конъюнкции $\mathfrak{A}_i (i = 1, \ldots, \alpha)$ пересекаются с конъюнкциями $\mathfrak{G}_k (k = 1, \ldots, \beta)$ и имеют общую часть $\mathfrak{E}_1$:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}'_1\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}'_\alpha\mathfrak{E}_1,$$

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}'_1\mathfrak{E}_1, \ldots, \mathfrak{G}_\beta = \mathfrak{G}'_\beta\mathfrak{E}_1;$$

конъюнкции $\mathfrak{A}_j (j = \alpha + 1, \ldots, p)$ пересекаются с $\mathfrak{G}_l (l = \beta + 1, \ldots, \gamma)$ и имеют общую часть $\mathfrak{E}_2$:

$$\mathfrak{A}_{\alpha+1} = \mathfrak{A}'_{\alpha+1}\mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}'_p\mathfrak{E}_2,$$

$$\mathfrak{G}_{\beta+1} = \mathfrak{G}'_{\beta+1}\mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{G}_\gamma = \mathfrak{G}'_\gamma\mathfrak{E}_2;$$

$\mathfrak{G}_m (m = \gamma + 1, \ldots, s)$ не пересекаются с $\mathfrak{A}_i (i = 1, \ldots, p)$. Д.н.ф. (1.3) получит вид

$$\mathfrak{M}'_5 = a\mathfrak{A}'_{1\alpha}\mathfrak{E}_1 \vee a\mathfrak{A}'_{\alpha+1,\,p}\mathfrak{E}_2 \vee b\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}'_{1\beta}\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{G}'_{\beta+1,\gamma}\mathfrak{E}_2 \vee \mathfrak{G}_{\gamma+1,\,s},$$

в котором нарушаются свойства $A\,(a, \mathfrak{E}_1)$, $A\,(a, \mathfrak{E}_2)$.

Пусть конъюнкции $\mathfrak{A}_i (i = 1, \ldots, \alpha)$ пересекаются с $\mathfrak{G}_k (k = 1, \ldots, \beta)$ и имеют общую часть $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{A}_1=\mathfrak{A}_1'\mathfrak{E},\ \ldots,\ \mathfrak{A}_\alpha=\mathfrak{A}_\alpha'\mathfrak{E},$$

$$\mathfrak{G}_1=\mathfrak{G}_1'\mathfrak{E},\ \ldots,\ \mathfrak{G}_\beta=\mathfrak{G}_\beta'\mathfrak{E};$$

$\mathfrak{A}_j(j=\alpha+1,\ \ldots,\ p)$ не пересекаются с $\mathfrak{G}_k(k=1,\ \ldots,s)$; $\mathfrak{G}_l(l=\beta+1,\ \ldots,\ s)$ не пересекаются с $\mathfrak{A}_i(i=1,\ \ldots,\ p)$. Д.н.ф. (1.3) примет вид

$$\mathfrak{M}_5''=a\mathfrak{A}'_{1\alpha}\mathfrak{E}\vee a\mathfrak{A}_{\alpha+1,p}\vee b\mathfrak{B}_{1q}\vee\mathfrak{G}'_{1\beta}\mathfrak{E}\vee\mathfrak{G}_{\beta+1,s},$$

в котором нарушается свойство $A(a,\mathfrak{E})$.

Итак, в случае пересечений конъюнкций первого типа с конъюнкциями третьего типа, д.н.ф. (1.3) имеет свойство A абсолютно только тогда, когда все конъюнкции $\mathfrak{A}_i(i=1,\ \ldots,\ p)$ пересекаются с некоторыми конъюнкциями $\mathfrak{G}_k$.

Аналогично рассматривается случай пересечений конъюнкций второго типа с конъюнкциями третьего типа.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Если д.н.ф.* (1.3) *имеет свойство A абсолютно, то она является формулой проводимости квазибесповторной схемы в классе последовательно-параллельных схем.*

Доказательство. Для доказательства теоремы нужно найти схему в классе последовательно-параллельных схем, формулой проводимости которой является д.н.ф. (1.3). При этом приходится учитывать все те случаи пересечений конъюнкций $\mathfrak{A}_i(i=1,\ \ldots,\ p)$, $\mathfrak{B}_j(j=1,\ \ldots,\ q)$, $\mathfrak{G}_k(k=1,\ \ldots,\ s)$, при которых д.н.ф. (1.3) имеет свойство A абсолютно и их комбинации.

1. Если ни одна пара из конъюнкций $\mathfrak{A}_i(i=1,\ \ldots,\ p)$, $\mathfrak{B}_j(j=1,\ \ldots,\ q)$, $\mathfrak{G}_k(k=1,\ \ldots,\ s)$ не пересекается, то д.н.ф. (1.3) является формулой проводимости квазибесповторной схемы 1.

Примечание 1. В схемах выражением $\mathfrak{N}_{ij}$ обозначается подсхема, в которой цепи с проводимостями $\mathfrak{N}_i,\ \ldots,\ \mathfrak{N}_j$ соединены параллельно.

2. Пусть д.н.ф. (1.3) принимает вид (1.7). Если в д.н.ф. (1.7) конъюнкции $\mathfrak{A}_i''$ $(i=1,\ \ldots,\ \varkappa)$ ни в одной группе больше не пересекаются, то (1.7) является формулой проводимости квазибесповторной схемы 2.

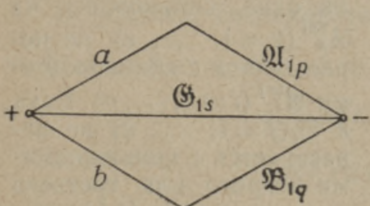


Схема 1.

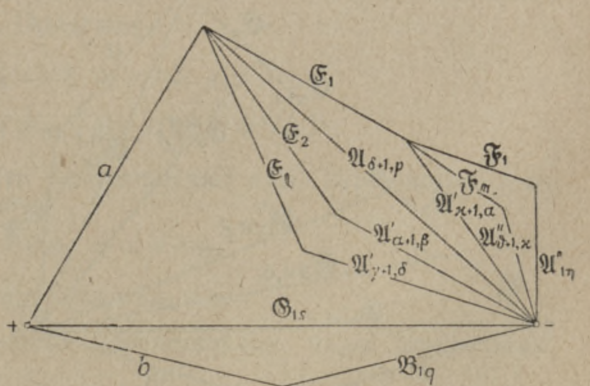


Схема 2.

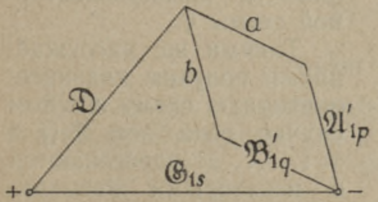


Схема 3.

Аналогично получается квазибесповторная схема и в тех случаях, когда между собою пересекаются конъюнкции второго типа или третьего типа, и только те.

3. Пусть д.н.ф. (1.3) принимает вид (1.8). Если в д.н.ф. (1.8) не имеется пересечений конъюнкций $\mathfrak{A}_i'$ $(i=1, \ldots, p)$, $\mathfrak{B}_j'$ $(j=1, \ldots, q)$, $\mathfrak{G}_k$ $(k=1, \ldots, s)$, то она является формулой проводимости квазибесповторной схемы 3.

Легко увидеть, что д.н.ф. (1.8) является формулой проводимости квазибесповторной схемы и в том случае, если в ней между собою пересекаются конъюнкции одного и того же типа (т. е., или $\mathfrak{A}_i'$ $(i=1, \ldots, p)$, или $\mathfrak{B}_j$ $(j=1, \ldots, q)$, или $\mathfrak{G}_k$ $(k=1, \ldots, s)$), и только те.

4. Пусть д.н.ф. (1.3) принимает вид (1.9'), т. е.

$$\mathfrak{M}_5 = a\mathfrak{A}_{1p}'\mathfrak{E}_1 \vee b\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}_{1\alpha}'\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{G}_{\alpha+1,\, s}, \tag{1.9'}$$

в которой $\mathfrak{G}_{\alpha+1}, \ldots, \mathfrak{G}_s$ не пересекаются с $\mathfrak{A}_i'$ $(i=1, \ldots, p)$. В д.н.ф. (1.9') все конъюнкции $\mathfrak{A}_i'$ $(i=1, \ldots, p)$ могут пересекаться с некоторыми конъюнкциями из $\mathfrak{G}_k'$ $(k=1, \ldots, \alpha)$. Пусть

$$\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1''\mathfrak{E}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{A}_p' = \mathfrak{A}_p''\mathfrak{E}_2,$$

$$\mathfrak{G}_1' = \mathfrak{G}_1''\mathfrak{E}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{G}_\beta' = \mathfrak{G}_\beta''\mathfrak{E}_2.$$

Д.н.ф. (1.9') принимает вид

$$\mathfrak{M}_5''' = a\mathfrak{A}_{1p}''\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \vee b\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}_{1\beta}''\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \vee \mathfrak{G}_{\beta+1,\,\alpha}'\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{G}_{\alpha+1,\, s}, \tag{1.10}$$

в котором $\mathfrak{G}_{\beta+1}', \ldots, \mathfrak{G}_\alpha'$ не пересекаются с конъюнкциями $\mathfrak{A}_i''$ $(i=1, \ldots, p)$.

В д.н.ф. (1.10) все конъюнкции $\mathfrak{A}_i''$ $(i=1, \ldots, p)$ могут пересекаться с некоторыми конъюнкциями из $\mathfrak{G}_k''$ $(k=1, \ldots, \beta)$. Выделим их общую часть $\mathfrak{E}_3$, преобразуем д.н.ф. (1.10) и т. д. Процесс продолжается до тех пор, пока в д.н.ф.

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_5^{\mathrm{IV}} = {} & a\mathfrak{A}_{1p}^{(n)}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\ldots\mathfrak{E}_n \vee b\mathfrak{B}_{1q} \vee \mathfrak{G}_{1\varepsilon}^{(n)}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\ldots\mathfrak{E}_n \vee \\ & \vee \mathfrak{G}_{\varepsilon+1,\,\delta}^{(n-1)}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\ldots\mathfrak{E}_{n-1} \vee \ldots \vee \mathfrak{G}_{\gamma+1,\,\beta}''\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \vee \mathfrak{G}_{\beta+1,\,\alpha}'\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{G}_{\alpha+1,\, s}\end{aligned} \tag{1.11}$$

ни одна конъюнкция из $\mathfrak{G}_k^{(n)}$ $(k=1, \ldots, \varepsilon)$ не пересекается с конъюнкциями $\mathfrak{A}_i^{(n)}$ $(i=1, \ldots, p)$. Если и $\mathfrak{B}_j$ $(j=1, \ldots, q)$ не пересекается с конъюнкциями второго или третьего типа, то д.н.ф. (1.11) является формулой проводимости квазибесповторной схемы 4.

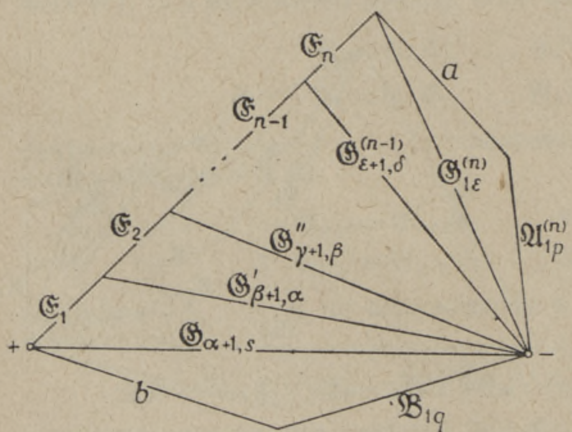


Схема 4.

Такими же рассуждениями получим квазибесповторную схему и в том случае, если все $\mathfrak{B}_j$ $(j=1, \ldots, q)$ пересекаются с некоторыми конъюнкциями из $\mathfrak{G}_k$ $(k=1, \ldots, s)$.

5. Рассмотрим случай, когда между собою пересекаются конъюнкции первого, второго и третьего типа. Полагаем, что

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}'_1 \mathfrak{E}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}'_p \mathfrak{E}_1; \ \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}'_1 \mathfrak{E}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{B}_q = \mathfrak{B}'_q \mathfrak{E}_1;$$

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}'_1 \mathfrak{E}_1, \ \ldots, \ \mathfrak{G}_\alpha = \mathfrak{G}'_\alpha \mathfrak{E}_1.$$

Тогда д.н.ф. (1.3) принимает вид

$$\mathfrak{M}_6 = a\mathfrak{A}'_{1p}\mathfrak{E}_1 \vee b\mathfrak{B}'_{1q}\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{G}'_{1\alpha}\mathfrak{E}_1 \vee \mathfrak{G}_{\alpha+1,\, s}. \tag{1.12}$$

В д.н.ф. (1.12) конъюнкции $\mathfrak{A}'_i$ $(i = 1, \ldots, p)$ и $\mathfrak{B}'_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ могут пересекаться с некоторыми конъюнкциями $\mathfrak{G}'_k$ $(k = 1, \ldots, \alpha)$. Выделим их общую часть $\mathfrak{E}_2$, преобразуем д.н.ф. (1.12) и т. д. После выделения всех общих частей д.н.ф. (1.12) получит вид

$$\mathfrak{M}'_6 = a\mathfrak{A}^{(n)}_{1p}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\ldots\mathfrak{E}_n \vee b\mathfrak{B}^{(n)}_{1q}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\ldots\mathfrak{E}_n \vee \mathfrak{G}^{(n)}_{1\gamma}\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2\ldots\mathfrak{E}_n \vee \ldots \vee \mathfrak{G}'_{\beta+1,\,\alpha}\mathfrak{E}_1 \vee$$
$$\vee\, \mathfrak{G}_{\alpha+1,\, s}. \tag{1.13}$$

Если в д.н.ф. (1.13) не имеется пересечений конъюнкций, относящихся к одной и той же группе, то д.н.ф. (1.13) является формулой проводимости квазибесповторной схемы 5.

Теорема доказана.

Пример 1. Методом перебора легко установить, что д.н.ф.

$$f = \bar a e k \vee a\bar b\bar c\bar g \vee c d \bar g l \vee$$
$$\vee\, \bar a b \bar d k \vee \bar a u v \vee w \vee \bar g l \bar k$$

имеет свойство A абсолютно.

После применения алгоритма Трахтенброта-Пильчак (алгоритма Т.—П.) [1, 2] получим квазибесповторную схему:

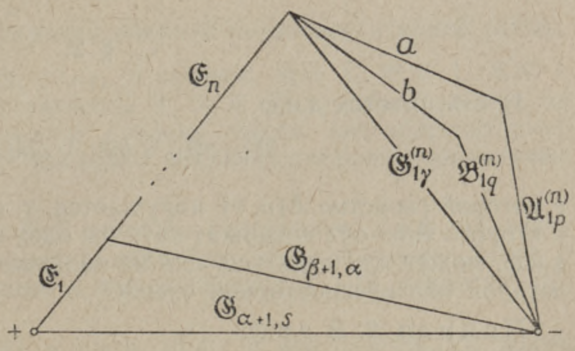


Схема 5.

1) условию последовательности удовлетворяют пары переменных: $a, \bar b$; $a, \bar c$; $\bar b, \bar c$; c, d; $b, \bar d$; u, v. Полагаем

$$q_1 = a\bar b\bar c, \ q_2 = cd, \ q_3 = b\bar d, \ q_4 = uv;$$

$$f = \bar a e k \vee \bar g q_1 \vee \bar g l q_2 \vee \bar a k q_3 \vee \bar a q_4 \vee w \vee \bar g l \bar k$$

2) условиям параллельности удовлетворяют пары переменных: $\bar k, q_2$; e, q_3. Полагаем

$$q_5 = \bar k \vee q_2, \ q_6 = e \vee q_3;$$

$$f = \bar a k q_6 \vee \bar g q_1 \vee \bar g l q_5 \vee \bar a q_4 \vee w.$$

3) условию последовательности удовлетворяют пары переменных: k, q_6; l, q_5. Полагаем

$$q_7 = k q_6, \ q_8 = l q_5;$$

$$f = \bar a q_7 \vee \bar g q_1 \vee \bar g q_8 \vee \bar a q_4 \vee w.$$

4) условиям параллельности удовлетворяют пары переменных: q_4, q_7; q_1, q_8. Полагаем

$$q_9 = q_4 \vee q_7, \qquad q_{10} = q_1 \vee q_8,$$

$$f = \bar{a} q_9 \vee \bar{g} q_{10} \vee w.$$

Д.н.ф. $\bar{a} q_9 \vee \bar{g} q_{10} \vee w$ реализуется схемой 6а. После замены ребер q_9, q_{10} соответствующими подсхемами получим схему 6б.

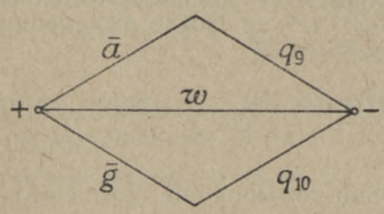


Схема 6а.

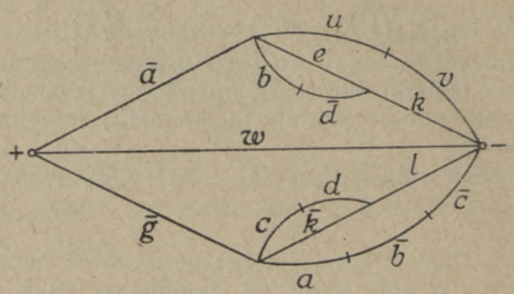


Схема 6б.

§ 2.

Пусть имеется д.н.ф.

$$\mathfrak{N} = a\mathfrak{A}_{1p} \vee b\mathfrak{B}_{1q} \vee ab\mathfrak{C}_{1r} \vee \mathfrak{G}_{1s}, \tag{2.1}$$

в которой свойство $A(a, b)$ нарушается, т. е. кроме конъюнкций первого и второго типа она содержит хотя бы одну конъюнкцию типа $ab\mathfrak{C}$. Такая д.н.ф. может или являться, или не являться формулой проводимости некоторой квазибесповторной схемы.

Пример 2. В д.н.ф.

$$f_1(x, y, z, w) = xyw \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{y}\bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}\bar{w}$$

нарушается свойство $A(\bar{x}, \bar{y})$, но она является формулой проводимости квазибесповторной схемы 7.

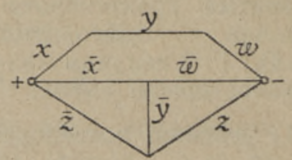


Схема 7.

Пример 3. В д.н.ф.

$$f_2(x, y, z, w) = \bar{x}\bar{y}\bar{w} \vee xy\bar{z}\bar{w} \vee \bar{x}yw$$

нарушается, например, свойство $A(y, \bar{w})$ и она не является формулой проводимости никакой квазибесповторной схемы.

Естественно возникает вопрос, при каких условиях д.н.ф. вида

$$\mathfrak{N}_1 = a\mathfrak{A} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}, \tag{2.2}$$

где $\mathfrak{A}$ не содержит b, $\mathfrak{B}$ не содержит a и $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$ не содержат ни a, ни b, является формулой проводимости некоторой квазибесповторной схемы. Для того, чтобы ответить на этот вопрос, исследуем квазибесповторную реализуемость трехчлена

$$\mathfrak{L}_1 = a\mathfrak{A} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C}. \tag{2.3}$$

Предположим, что $\mathfrak{C}$ не пересекается ни с $\mathfrak{A}$, ни с $\mathfrak{B}$. В противном случае, если $\mathfrak{C}$ имело бы общую часть, например, с $\mathfrak{A}$ $(\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1\mathfrak{E})$, мы получили бы д.н.ф.

$$\mathfrak{L}'_1 = a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}.$$

Если здесь полагать $q = a\mathfrak{E}$, то получим

$$\mathfrak{L}'_1 = q\mathfrak{A}_1 \vee b\mathfrak{B} \vee qb\mathfrak{C}_1,$$

т. е. д.н.ф. такого же типа, как и (2.3).

В д.н.ф. (2.3) конъюнкции $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ могут пересекаться. Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}$. Пропуская индексы, получим д.н.ф.

$$\mathfrak{L} = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C}. \tag{2.4}$$

В дальнейшем мы исследуем квазибесповторную реализуемость д.н.ф. (2.4) в самом простом случае, именно предполагаем, что $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ означают какие-то последовательно соединенные ребра в схеме, реализующей (2.4).

Примечание 2. Из условий параллельности [2] следует, что д.н.ф.

$$\mathfrak{L}_2 = a\mathfrak{B} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C} \tag{2.5}$$

не является формулой проводимости никакой квазибесповторной схемы.

Теорема 3. *Д.н.ф. вида* (2.4), *в которой* $\mathfrak{A} \neq 1$, $\mathfrak{B} \neq 1$, $\mathfrak{C} \neq 1$, $\mathfrak{D} \neq 1$ *и ни одна пара из конъюнкций* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ *не пересекаются, не является формулой проводимости никакой такой квазибесповторной схемы, в которой* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *означают последовательно соединенные ребра.*

Доказательство. Из [1, 2] известно следующее: д.н.ф. является формулой проводимости некоторой квазибесповторной схемы тогда и только тогда, когда применение к ней алгоритма Т.—П. кончится построением этой схемы.

Применим алгоритм Т.—П. к д.н.ф. (2.4). В ней содержится шесть булевых переменных $a, b, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$. Из шести ребер нельзя построить неразложимой схемы [3]. Попытаемся построить разложимую схему. Легко проверить, что никакая пара переменных из a, b, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ не удовлетворяет условию последовательности. Необходимым условиям параллельности удовлетворяют следующие пары переменных:

$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}), \text{ если } a\mathfrak{B} = 0 \text{ и } b\mathfrak{A} = 0;$$
$$(\mathfrak{A}, \mathfrak{C}), \text{ если } \mathfrak{C}\mathfrak{D} = 0 \text{ и } b\mathfrak{A} = 0;$$
$$(\mathfrak{B}, \mathfrak{C}), \text{ если } \mathfrak{C}\mathfrak{D} = 0 \text{ и } a\mathfrak{B} = 0.$$

Если полагать $q_1 = \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, то (2.4) имеет вид

$$\mathfrak{L}' = aq_1\mathfrak{D} \vee bq_1\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C}. \tag{2.6}$$

В д.н.ф. (2.6) пара переменных $(q_1, \mathfrak{D})$ удовлетворяет условию последовательности. Если в (2.6) полагать $q_2 = q_1\mathfrak{D}$, то (2.6) имеет вид

$$\mathfrak{L}' = aq_2 \vee bq_2 \vee ab\mathfrak{C},$$

которая относится к типу (2.5). Значит, квазибесповторной реализации не существует.

Аналогично доказывается, что и в остальных случаях, т. е. если в (2.4) полагается $q=\mathfrak{A}\vee\mathfrak{C}$ или $q=\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$, или $q=\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$, то не существует квазибесповторной реализации.

Итак, нам не удастся построить разложимой квазибесповторной схемы с двухреберной подсхемой для д.н.ф. (2.4). Попытаемся построить схему с пятиреберной подсхемой для (2.4). Необходимым условиям вполне внутренней звезды [2] удовлетворяют следующие наборы переменных:

$$\begin{aligned}&(a, b, \mathfrak{D});\\ &(a, \mathfrak{A}, \mathfrak{C}), \text{ если } \mathfrak{A}\mathfrak{C}=0;\\ &(b, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), \text{ если } \mathfrak{B}\mathfrak{C}=0;\\ &(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), \text{ если } \mathfrak{A}\mathfrak{B}=0.\end{aligned}$$

Из этих вполне внутренних звезд можно образовать шесть пятиреберных подграфов

$$\begin{array}{lll}\Gamma_1(a, b, \mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}), & \Gamma_2(a, b, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}), & \Gamma_3(a, b, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}),\\ \Gamma_4(a, b, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}), & \Gamma_5(a, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}), & \Gamma_6(b, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}).\end{array}$$

Легко проверить, что ни один подграф не удовлетворяет условию подсхемы квазибесповторной схемы [2], реализующей д.н.ф. (2.4).

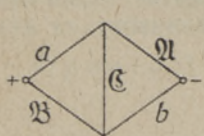
Таким образом, синтез квазибесповторной схемы для (2.4) при помощи алгоритма Т.—П. не удается. Это значит, что д.н.ф. (2.4) не является формулой проводимости никакой квазибесповторной схемы.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Д.н.ф.* (2.4), *в которой ни одна пара из конъюнкций* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *не пересекается, является формулой проводимости такой квазибесповторной схемы, в которой* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *означают последовательно соединенные ребра, тогда и только тогда, когда выполняется по крайней мере одно из следующих условий*

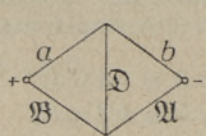
$$\begin{aligned}&1^\circ\ \mathfrak{D}=1,\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}=0;\\ &2^\circ\ \mathfrak{C}=1,\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}=0;\\ &3^\circ\ \mathfrak{A}=1,\ \mathfrak{B}\mathfrak{C}=0;\\ &4^\circ\ \mathfrak{B}=1,\ \mathfrak{A}\mathfrak{C}=0.\end{aligned}$$

Доказательство. Достаточность. Легко увидеть, что в случаях 1°—4° д.н.ф. (2.4) является действительно формулой проводимости квазибесповторных схем 8а, 8б, 8в, 8г соответственно.



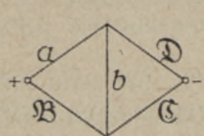
$\mathfrak{D}=1,\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}=0$

Схема 8а.



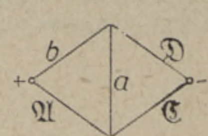
$\mathfrak{C}=1,\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}=0$

Схема 8б.



$\mathfrak{A}=1,\ \mathfrak{B}\mathfrak{C}=0$

Схема 8в.



$\mathfrak{B}=1,\ \mathfrak{A}\mathfrak{C}=0$

Схема 8г.

Необходимость: Покажем, что д.н.ф. (2.4) не является формулой проводимости никакой квазибесповторной схемы, если ни одно из условий 1°—4° не выполняется.

Теоремой 2 показано, что д.н.ф. (2.4) не является формулой проводимости квазибесповторной схемы, если

$$\mathfrak{A}\neq 1,\ \mathfrak{B}\neq 1,\ \mathfrak{C}\neq 1,\ \mathfrak{D}\neq 1.$$

Пусть одна из конъюнкций $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ в д.н.ф. (2.4) равна единице, причем условия 1°—4° не удовлетворены. Д.н.ф. (2.4) примет следующие формы:

1) $\mathfrak{L}_3 = a\mathfrak{A} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C}$, причем $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \neq 0$; (2.7)

2) $\mathfrak{L}_4 = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee ab$, причем $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq 0$; (2.8)

3) $\mathfrak{L}_5 = a\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C}$, причем $\mathfrak{B}\mathfrak{C} \neq 0$; (2.9)

4) $\mathfrak{L}_6 = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C}$, причем $\mathfrak{A}\mathfrak{C} \neq 0$. (2.10)

Квазибесповторная нереализуемость каждой из д.н.ф. (2.7), (2.8), (2.9), (2.10) доказывается применением к ней алгоритма Т.—П. Оказывается, что синтез при помощи этого алгоритма ни в одном случае не кончится построением схемы.

Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению вопроса, при каких условиях д.н.ф.

$$\mathfrak{N}_2 = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G} \tag{2.11}$$

является формулой проводимости некоторой квазибесповторной схемы.

Следствие из примечания 2. Д.н.ф.

$$\mathfrak{N}_3 = a\mathfrak{B} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G} \tag{2.12}$$

не является формулой проводимости никакой квазибесповторной схемы.

Следствие из теоремы 3. Если в д.н.ф. (2.11) ни одна пара из конъюнкций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ не пересекается и $\mathfrak{A} \neq 1$, $\mathfrak{B} \neq 1$, $\mathfrak{C} \neq 1$, $\mathfrak{D} \neq 1$, то д.н.ф. (2.11) не является формулой проводимости никакой такой квазибесповторной схемы, в которой $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ означают последовательно соединенные ребра.

Следствие из теоремы 4. Если в д.н.ф. (2.11) ни одна пара из конъюнкций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}$ не пересекается и выполняется по крайней мере одно из условий 1°—4° теоремы 4, то д.н.ф. (2.11) является формулой проводимости квазибесповторной схемы.

Именно, если ни одна пара из конъюнкций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}$ не пересекается, то д.н.ф.

$$\mathfrak{N}_4 = a\mathfrak{A} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}, \tag{2.13}$$

в которой $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0$ является формулой проводимости для схемы 9а; д.н.ф.

$$\mathfrak{N}_5 = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee ab \vee \mathfrak{G}, \tag{2.14}$$

в которой $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$, для схемы 9б; д.н.ф.

$$\mathfrak{N}_6 = a\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}, \tag{2.15}$$

в которой $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0$, для схемы 9в; д.н.ф.

$$\mathfrak{N}_7 = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}, \tag{2.16}$$

в которой $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = 0$, для схемы 9г.

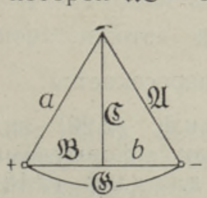


Схема 9а.

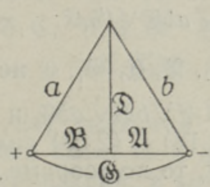


Схема 9б.

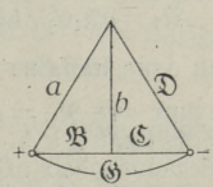


Схема 9в.

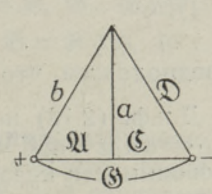


Схема 9г.

Нам остается исследовать квазибесповторную реализуемость д.н.ф. (2.13—16) в случаях, если некоторые из конъюнкций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}$ пересекаются. Для этого, чтобы ответить на этот вопрос, приходится исследовать каждый из д.н.ф. (2.13—16) отдельно и учитывать все возможные пересечения конъюнкций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}$.

Начнем исследованием квазибесповторной реализуемости д.н.ф. (2.13). Возможными пересечениями конъюнкций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$ бывают: 1) ни одна пара из $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$ не пересекается, 2) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$ пересекаются по два, 3) $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$ пересекаются по три и 4) все конъюнкции $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$ пересекаются между собою.

Теорема 5. *Если в д.н.ф.* (2.13) $\mathfrak{C}$ *пересекается с* $\mathfrak{G}$ (т. е. $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}$ *и* $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\mathfrak{E}$), *то д.н.ф.* (2.13) *не является формулой проводимости ни одной такой квазибесповторной схемы, в которой* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{E}$ *означают последовательно соединенные ребра.*

Доказательство. Применим к д.н.ф.

$$\mathfrak{N}_4'=a\mathfrak{A}\vee b\mathfrak{B}\vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}\vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E} \tag{2.17}$$

алгоритм Т.—П. Оказывается, что синтез при помощи этого алгоритма не кончится построением схемы. Этим и доказывается квазибесповторная нереализуемость д.н.ф. (2.17) схемой, в которой $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{E}$ означают последовательно соединенные ребра. Теорема доказана.

Образуем из членов д.н.ф.-ы (2.13) следующие д.н.ф.

$$\mathfrak{N}_{41}=a\mathfrak{A}\vee b\mathfrak{B}\vee ab\mathfrak{C}, \tag{2.18}$$

$$\mathfrak{N}_{42}=a\mathfrak{A}\vee b\mathfrak{B}\vee \mathfrak{G}, \tag{2.19}$$

$$\mathfrak{N}_{43}=a\mathfrak{A}\vee ab\mathfrak{C}\vee \mathfrak{G}, \tag{2.20}$$

$$\mathfrak{N}_{44}=b\mathfrak{B}\vee ab\mathfrak{C}\vee \mathfrak{G}, \tag{2.21}$$

и исследуем их квазибесповторную реализуемость. Если по крайней мере одна из д.н.ф. (2.18—21) окажется квазибесповторно нереализуемой, то и (2.13) квазибесповторно нереализуема.

Теорема 6. *Если в д.н.ф.* (2.13) $\mathfrak{C}$ *не пересекается с* $\mathfrak{G}$ *и д.н.ф.* (2.18—21) *являются формулами проводимости некоторых квазибесповторных схем, то и* (2.13) *является формулой проводимости квазибесповторной схемы.*

Доказательство. Каждый случай пересечения конъюнкций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$ исследуется по следующему плану: 1) выделяются общие части конъюнкций $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$ и преобразуется д.н.ф. (2.13); 2) устанавливаются условия, вытекающие из квазибесповторной реализуемости (2.18—21); 3) показывается, что эти условия достаточны для квазибесповторной реализуемости д.н.ф. (2.13).

Рассмотрим частный случай: $\mathfrak{A}$ пересекается с $\mathfrak{G}$.

1. Пусть $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\mathfrak{E}$. Д.н.ф. (2.13) имеет вид

$$\mathfrak{N}_4''=a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}\vee b\mathfrak{B}\vee ab\mathfrak{C}\vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}.$$

Предположим, что ни одна пара из $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{E}$ не пересекается.

2. Д.н.ф. (2.18) получит вид $\mathfrak{N}_{41}'=a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}\vee b\mathfrak{B}\vee ab\mathfrak{C}$ и д.н.ф. (2.20) вид $\mathfrak{N}'_{43}=a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}\vee ab\mathfrak{C}\vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}$. Если д.н.ф. (2.18) и (2.20) являются формулами проводимости квазибесповторных схем, то по теореме 4 для д.н.ф. (2.18) выполняется условие $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{E}=0$ и для д.н.ф. (2.20) условие $b\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{G}_1=0$.

Д.н.ф. (2.19) получит вид $\mathfrak{N}'_{42} = a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B} \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}$ и д.н.ф. (2.21) вид $\mathfrak{N}'_{44} = b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}$. Так как д.н.ф. (2.19) и (2.21) имеют свойство A абсолютно, то по теореме 2 они являются формулами проводимости квазибесповторных схем.

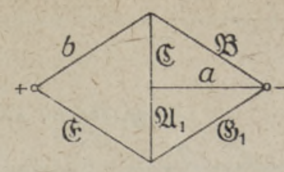


Схема 10.

3. Легко увидеть, что д.н.ф. (2.13) является формулой проводимости квазибесповторной схемы 10, если только $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{E} = 0$ и $b\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{G}_1 = 0$.

Так как исследование всех случаев идет по такому же плану, то представим только результаты в виде таблицы 1. Этой таблицей и доказывается теорема 6.

Примечание 3. При составлении таблицы 1 предположено, что $\mathfrak{C}$ не пересекается ни с $\mathfrak{A}$, ни с $\mathfrak{B}$, так как в случае пересечения $\mathfrak{C}$, например, с $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1\mathfrak{E}$) д.н.ф. (2.13) примет вид

$$\mathfrak{N}_4''' = a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G}; \tag{2.22}$$

если здесь полагать $q = a\mathfrak{E}$, то получим д.н.ф.

$$\mathfrak{N}_4''' = q\mathfrak{A}_1 \vee b\mathfrak{B} \vee bq\mathfrak{C}_1 \vee \mathfrak{G},$$

который имеет такой же тип, как и (2.13). Отсюда вытекает, что исследование д.н.ф. (2.22) сводится к исследованию д.н.ф. (2.13).

Примечание 4. В таблице 1 отсутствуют некоторые случаи, например случай, когда $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}$ пересекаются между собою и имеют общую часть $\mathfrak{E}$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}$). Д.н.ф. (2.13) примет тогда вид

$$\mathfrak{N}_4^{IV} = a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B}_1\mathfrak{E} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E} \tag{2.23}$$

и д.н.ф. (2.18) вид

$$\mathfrak{N}_{41}^{IV} = a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B}_1\mathfrak{E} \vee ab\mathfrak{C}. \tag{2.24}$$

Так как в общем случае ни одна из конъюнкций $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ не равна единице, то по теореме 3 не найдется ни одной такой квазибесповторной схемы, в которой $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{E}$ означали бы последовательно соединенные ребра и формулой проводимости которой являлась бы д.н.ф. (2.24). Отсюда следует, что и д.н.ф. (2.23) не является формулой проводимости никакой такой квазибесповторной схемы, в которой $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}, \mathfrak{E}$ означают последовательно соединенные ребра.

Так как и в случаях:

1) пересекаются $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1\mathfrak{E}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\mathfrak{F}\mathfrak{H}$);

2) пересекаются $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{G}$; $\mathfrak{B}, \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1\mathfrak{F}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1\mathfrak{E}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F}$);

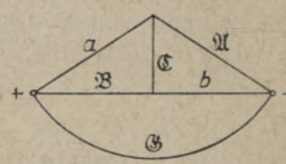
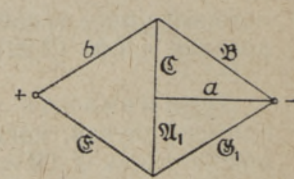
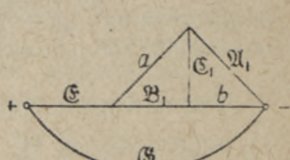
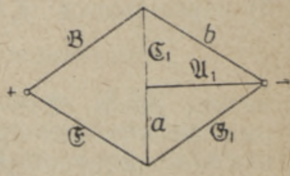
3) пересекаются $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$; $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{G}$; $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{G}$ ($\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1\mathfrak{E}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1\mathfrak{F}\mathfrak{H}$);

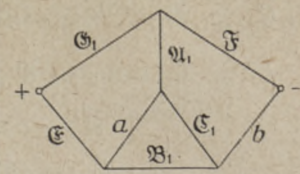
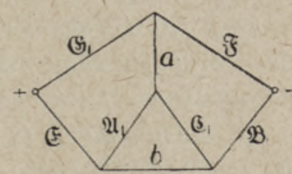
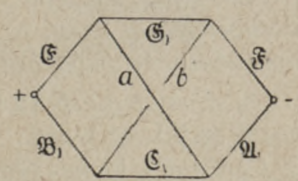
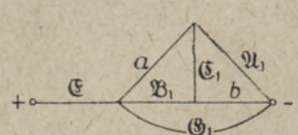
не все д.н.ф. (2.18—24) являются формулами проводимости некоторых квазибесповторных схем, то и для д.н.ф. (2.13) не найдется такой квазибесповторной реализации, в которой $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ означают последовательно соединенные ребра.

Таблица 1

Результаты

исследования квазибесповторной реализуемости д.н.ф. (2.13)

№	Случай, вид д.н.ф. (2.13)	Условия, вытекающие из квазибесповторной реализуемости (2.18—21)	Схема, формулой проводимости которой является (2.13)
1	2	3	4
1.	Ни одна пара из $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{G}$ не пересекается: $a\mathfrak{A} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}$	$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}=0$	
2.	$\mathfrak{A}$ пересекается с $\mathfrak{G}$: $a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{E}=0$ $b\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{G}_1=0$	
3.	$\mathfrak{A}$ пересекается с $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{B}$ пересекается с $\mathfrak{G}$: $a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B}_1\mathfrak{F} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F}$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{E}\mathfrak{F}=0$ $ab\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{G}_1=0$ $b\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{G}_1\mathfrak{F}=0$ $a\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}\mathfrak{G}_1\mathfrak{E}=0$	
4.	$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ пересекаются: $a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B}_1\mathfrak{E} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G}$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}=0$	
5.	$\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{G}$ пересекаются: $a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1=0$ $a\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1\mathfrak{G}_1=0$	

1	2	3	4
6.	$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ пересекаются; $\mathfrak{A}$ пересекается с $\mathfrak{G}$: $a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F} \vee b\mathfrak{B}_1\mathfrak{E} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{E} \vee$ $\vee\, \mathfrak{G}_1\mathfrak{F}$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F}=0$ $ab\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{G}_1=0$ $b\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{G}_1=0$	
7.	$\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{G}$ пересекаются; $\mathfrak{A}$ пересекается с $\mathfrak{G}$: $a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F} \vee b\mathfrak{B} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F}$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1\mathfrak{F}=0$ $b\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{G}_1\mathfrak{E}=0$ $a\,\mathfrak{B}\mathfrak{C}_1\mathfrak{G}_1\mathfrak{F}=0$	
8.	$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ пересекаются; $\mathfrak{A}, \mathfrak{E}, \mathfrak{G}$ пересекаются: $a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F} \vee b\mathfrak{B}_1\mathfrak{E} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F} \vee$ $\vee\, \mathfrak{G}_1\mathfrak{F}$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}=0$ $ab\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{G}_1=0$ $a\,\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{G}_1=0$	
9.	$\mathfrak{A}, \mathfrak{C}, \mathfrak{G}$ пересекаются; $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{G}$ пересекаются: $a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B}_1\mathfrak{F} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F} \vee$ $\vee\, \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F}$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1=0$ $ab\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{G}_1=0$ $b\,\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{G}_1\mathfrak{E}=0$ $a\,\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{G}_1\mathfrak{F}=0$	
10.	$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{G}$ пересекаются: $a\mathfrak{A}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B}_1\mathfrak{E} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{E} \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{E}=0$	

Сформулируем результаты, полученные о квазибесповторной реализуемости д.н.ф. (2.14—16).

Аналогично теоремам 5 и 6 доказываются и теоремы 5' и 6'.

Теорема 5'.

1. *Если в д.н.ф.* (2.14) $\mathfrak{D}$ *пересекается с* $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}$ *и* $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\mathfrak{E}$), *то д.н.ф.* (2.14) *не является формулой проводимости ни одной такой квазибесповторной схемы, в которой* $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{E}$ *означают последовательно соединенные ребра;*

2. *Если в д.н.ф.* (2.15) $\mathfrak{B}$ *пересекается с* $\mathfrak{G}, \mathfrak{C}$ *с* $\mathfrak{D}$ *и* $\mathfrak{G}$ *с* $\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\mathfrak{E}\mathfrak{H}$), *то д.н.ф.* (2.15) *не является формулой проводимости ни одной такой квазибесповторной схемы, в которой* $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ *означают последовательно соединенные ребра;*

3. *Если в д.н.ф.* (2.16) $\mathfrak{A}$ *пересекается с* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$ *с* $\mathfrak{D}$ *и* $\mathfrak{G}$ *с* $\mathfrak{D}$ ($\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1\mathfrak{E}$, $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\mathfrak{E}\mathfrak{H}$), *то д.н.ф.* (2.16) *не является формулой проводимости ни одной такой квазибесповторной схемы, в которой* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ *означают последовательно соединенные ребра.*

Итак, по теореме 5' д.н.ф.

$$\mathfrak{N}'_5 = a\mathfrak{A}\mathfrak{D}_1\mathfrak{E} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D}_1\mathfrak{E} \vee ab \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}, \tag{2.25}$$

$$\mathfrak{N}'_6 = a\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}\mathfrak{H} \vee b\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{H} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}\mathfrak{H}, \tag{2.26}$$

$$\mathfrak{N}'_7 = a\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}\mathfrak{F}\mathfrak{H} \vee b\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}\mathfrak{H} \vee ab\mathfrak{C}_1\mathfrak{F} \vee \mathfrak{G}_1\mathfrak{E}\mathfrak{H} \tag{2.27}$$

не являются формулами проводимости ни одной такой квазибесповторной схемы, в которой $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{G}_1, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{H}$ означают последовательно соединенные ребра.

Теорема 6'.

1. *Если в д.н.ф.* (2.14) $\mathfrak{D}$ *не пересекается с* $\mathfrak{G}$ *и д.н.ф.-ы* $\mathfrak{N}_{51} = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee ab$; $\mathfrak{N}_{52} = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee \mathfrak{G}$; $\mathfrak{N}_{53} = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee ab \vee \mathfrak{G}$; $\mathfrak{N}_{54} = b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee ab \vee \mathfrak{G}$ *являются формулами проводимости некоторых квазибесповторных схем, то и д.н.ф.* (2.15) *является формулой проводимости квазибесповторной схемы;*

2. *Если в д.н.ф.* (2.15) $\mathfrak{B}$ *не пересекается с* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$ *с* $\mathfrak{D}$ *и* $\mathfrak{D}$ *с* $\mathfrak{G}$ *и д.н.ф-ы* $\mathfrak{N}_{61} = a\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C}$; $\mathfrak{N}_{62} = a\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee \mathfrak{G}$; $\mathfrak{N}_{63} = a\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}$; $\mathfrak{N}_{64} = b\mathfrak{B}\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}$ *являются формулами проводимости некоторых квазибесповторных схем, то и д.н.ф.* (2.14) *является формулой проводимости квазибесповторной схемы;*

3. *Если в д.н.ф.* (2.16) $\mathfrak{A}$ *не пересекается с* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{C}$ *с* $\mathfrak{D}$ *и* $\mathfrak{D}$ *с* $\mathfrak{G}$ *и д.н.ф.-ы* $\mathfrak{N}_{71} = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C}$; $\mathfrak{N}_{72} = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee b\mathfrak{D} \vee \mathfrak{G}$; $\mathfrak{N}_{73} = a\mathfrak{A}\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}$; $\mathfrak{N}_{74} = b\mathfrak{D} \vee ab\mathfrak{C} \vee \mathfrak{G}$ *являются формулами проводимости некоторых квазибесповторных схем, то и д.н.ф.* (2.15) *является формулой проводимости квазибесповторной схемы.*

Обобщим теоремы 6 и 6' на д.н.ф.

$$\mathfrak{N} = a\mathfrak{A}_{1p} \vee b\mathfrak{B}_{1q} \vee ab\mathfrak{C}_{1r} \vee \mathfrak{G}_{1s}. \tag{2.28}$$

Теорема 7. *Если д.н.ф.* (2.28) *не содержит квазибесповторно нереализуемых многочленов вида* (2.17, 25—27) *и все д.н.ф., полученные из членов д.н.ф.* (2.28), *в комбинации по три, являются формулами проводимости некоторой квазибесповторной схемы, то и д.н.ф.* (2.28) *является формулой проводимости некоторой квазибесповторной схемы.*

Пример 4. Является ли д.н.ф.

$$f(a, b, c, d) = \underset{\mathrm{I}}{b\bar{c}\bar{d}} \vee \underset{\mathrm{II}}{\bar{a}\bar{b}\bar{d}} \vee \underset{\mathrm{III}}{\bar{a}\bar{c}\bar{d}} \vee \underset{\mathrm{IV}}{abcd} \vee \underset{\mathrm{V}}{a\bar{b}c}$$

формулой проводимости некоторой квазибесповторной схемы? Чтобы ответить на этот вопрос, исследуем квазибесповторную реализуемость д.н.ф., полученных из членов данной д.н.ф., комбинируя их по три,

1) I $\vee$ II $\vee$ III: $b\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{b}\bar{d} \vee a\bar{c}\bar{d} = \bar{d}(b\bar{c} \vee \bar{a}\bar{b} \vee a\bar{c})$.

Пусть $\mathfrak{A} = b$, $\mathfrak{B} = \bar{b}$, $\mathfrak{C} = 1$, $\mathfrak{D} = 1$. Выражение в скобках квазибесповторно реализуема по теореме 4, так как $\mathfrak{D} = 1$ и $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0$.

2) I $\vee$ II $\vee$ III: $b\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{b}\bar{d} \vee abcd$.
$\mathfrak{A} = \bar{a}\bar{b}$, $\mathfrak{B} = acd$, $\mathfrak{C} = \bar{c}$, $\mathfrak{D} = 1$. (Удовл. усл. 1° теоремы 4).

3) I $\vee$ II $\vee$ V: $b\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{b}\bar{d} \vee a\bar{b}c$;
$\mathfrak{A} = b\bar{c}$, $\mathfrak{B} = ac$, $\mathfrak{C} = \bar{a}$, $\mathfrak{D} = 1$. (Удовл. усл. 1° теоремы 4).

4) I $\vee$ III $\vee$ IV: $b\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{c}\bar{d} \vee abcd$;
$\mathfrak{A} = \bar{a}$, $\mathfrak{B} = acd$, $\mathfrak{C} = 1$, $\mathfrak{D} = 1$. (Удовл. усл. 1° теоремы 4).

5) I $\vee$ III $\vee$ V: $b\bar{c}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{b}c$.
Ни одна пара переменных не нарушает свойства A.

По теореме 2 д.н.ф. квазибесповторно реализуема.

6) I $\vee$ IV $\vee$ V: $b\bar{c}\bar{d} \vee abcd \vee a\bar{b}c$;
$\mathfrak{A} = \bar{c}\bar{d}$, $\mathfrak{B} = \bar{b}$, $\mathfrak{C} = d$, $\mathfrak{D} = 1$. (Удовл. усл. 1° теоремы 4).

7) II $\vee$ III $\vee$ IV: $\bar{a}\bar{b}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{c}\bar{d} \vee abcd$. (Удовл. усл. теоремы 2).

8) II $\vee$ III $\vee$ V: $\bar{a}\bar{b}\bar{d} \vee \bar{a}\bar{c}\bar{d} \vee a\bar{b}c$;
$\mathfrak{A} = ac$, $\mathfrak{B} = \bar{c}$; $\mathfrak{C} = 1$, $\mathfrak{D} = 1$. (Удовл. усл. 1° теоремы 4).

9) II $\vee$ IV $\vee$ V: $\bar{a}\bar{b}\bar{d} \vee abcd \vee a\bar{b}c$;
$\mathfrak{A} = \bar{a}\bar{d}$, $\mathfrak{B} = bd$, $\mathfrak{C} = 1$, $\mathfrak{D} = 1$. (Удовл. усл. 1° теоремы 4).

10) III $\vee$ IV $\vee$ V: $\bar{a}\bar{c}\bar{d} \vee abcd \vee a\bar{b}c$. (Удовл. усл. теоремы 2).

Итак, все д.н.ф., полученные из членов данной д.н.ф., в комбинации по три, удовлетворяют условиям теорем 2 или 4. Значит, они все квазибесповторно реализуемы. Тогда и данная д.н.ф. квазибесповторно реализуема. Легко увидеть, что она является формулой проводимости квазибесповторной схемы 11.

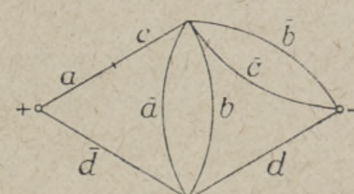


Схема 11.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Трахтенброт, К теории бесповторных контактных схем. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 51, 1958, 226—269.
2. Б. Ю. Пильчак, О синтезе квазибесповторных схем. Проблемы кибернетики, вып. 3, 1960, 95—122.
3. А. В. Кузнецов, О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозиций алгебры логики. Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 51, 1958, 186—225.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
17. XII 1962

RELEE-KONTAKTSKEEMIDE KVAASIKORDUMATUS

P. Hanko

Resümee

Artikli esimeses osas antakse piisav tingimus selleks, et antud loogiline valem oleks kvaasikordumisteta skeemi juhtivusvalem. Artikli teises osas käsitletakse loogiliste valemite kvaasikordumisteta realiseeritavust juhul, kui nimetatud tingimus ei ole täidetud.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
17. XII 1962

ON THE QUASINONREPETITIONALITY OF RELAY-CONTACT SCHEMES

P. Hanko

Summary

In the first part of the paper a sufficient condition is given that the logical formula under consideration is the switching function of a quasinonrepetitional scheme. The second part deals with the quasinonrepetitional realization of switching functions when this condition is not satisfied.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Cybernetics

Received
Dec. 17th, 1962