EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1963, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1963, № 3

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ АНАЛОГЕ МЕТОДА ГРАДИЕНТОВ

С. УЛЬМ,
кандидат физико-математических наук

Для приближенного решения нелинейного операторного уравнения

$$P(x)=0 \tag{1}$$

в вещественном гильбертовом пространстве H метод градиентов может быть получен следующим образом (ср. [5, 6]):

заменим уравнение (1) эквивалентным ему функциональным уравнением

$$\Phi(x) \equiv \| P(x) \|^2 = 0. \tag{2}$$

Так как

$$\operatorname{grad} \Phi(x) = 2[P'(x)]^* P(x), \tag{3}$$

то, исходя из приближения x_n к решению x^* уравнения (1), следующее приближение x_{n+1} выбирается в направлении антиградиента

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon [P'(x_n)]^* P(x_n), \quad (n=0,\ 1,\ \ldots) \tag{4}$$

причем ε — некоторое положительное число.*

В данной заметке мы используем понятие аналога разделенных разностей $F(x', x'')$ для функционала $F(x)$ (см. [3]). Так как в гильбертовом пространстве по определению [1]

$$F'(x)h = (h, \operatorname{grad} F(x)), \tag{5}$$

то аналогично (5) определим и понятие интерполяционного аналога градиента для функционала $F(x)$, который обозначим через $\tilde{F}(x', x'')$:

$$F(x', x'')h = (h, \tilde{F}(x', x'')). \tag{6}$$

Для функционала $\Phi(x) = \| P(x) \|^2$ легко получается

$$\Phi(x', x'')h = (P(x', x'')h, P(x') + P(x'')), \tag{7}$$

откуда

$$\tilde{\Phi}(x', x'') = P^*(x', x'')[P(x') + P(x'')], \tag{8}$$

где $P^*(x', x'')$ — сопряженный к $P(x', x'')$ оператор.

---

* Вместо фиксированного ε в (4) рассматривается и последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$ (см. [2, 5, 6]).

Исходя из приближений x_n, x_{n-1} и выбирая следующее приближение в направлении интерполяционного аналога антиградиента, получим итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon P^*(x_n, x_{n-1})\,[P(x_n) + P(x_{n-1})], \qquad (9)$$
$$\varepsilon > 0;\ n = 0,\ 1,\ \ldots$$

Ниже доказываются две теоремы о сходимости метода (9). Прежде всего покажем, что справедлива следующая

Лемма. Пусть

$$\eta_{n+1} \leqslant \sqrt{A_1\eta_n^2 + A_2\eta_{n-1}^2 + A_3\eta_{n-2}^2 + A_4\eta_n\eta_{n-1} + A_5\eta_{n-1}\eta_{n-2} + + B_1\eta_n^2 + B_2\eta_{n-1}^2 + B_3\eta_n\eta_{n-1} + B_4\eta_n\eta_{n-2} + B_5\eta_{n-1}\eta_{n-2}}, \qquad (10)$$

причем $A_i \geqslant 0$, $B_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, 5)$ и $\eta_i \geqslant 0$ $(i = -1, 0, 1, \ldots)$. Если

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{5} A_i + m\sum_{i=1}^{5} B_i} < 1, \qquad (11)$$

где $m = \max\,(\eta_{-1}, \eta_0, \eta_1)$, то существует

$$\lim_{n\to\infty} \eta_n = 0.$$

Доказательство. По индукции легко установить, что $\eta_n < m$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Отсюда вытекает существование

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \eta_n = c, \text{ причем } 0 \leqslant c \leqslant m.$$

Допустим, что $c \neq 0$. Переходя к верхнему пределу в неравенствах (10), получаем противоречие:

$$c \leqslant c\sqrt{\sum_{i=1}^{5} A_i + c^2\sum_{i=1}^{5} B_i} < c.$$

Итак, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \eta_n = 0$. Так как $\eta_n \geqslant 0$, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть в замкнутой области Q, содержащей последовательность $\{x_n\}$ $(n = -1, 0, \ldots)$ справедливы оценки*

а) $\|P^*(x', x'')h\| \geqslant \frac{1}{\sqrt{M}}\|h\|$, $\quad 0 < M < +\infty$,

б) $\|P(x', x'')\| \leqslant \sqrt{K}$

в) $\|P(x', x'') - P(x'', x''')\| \leqslant L\,\|x' - x'''\|$.

для каждого x', x'', $x''' \in Q$, $h \in H$ и выполнено одно из условий 1°, 2°, 3°:

1° $MK \leqslant a$; $0 < \varepsilon \leqslant \frac{3 - \sqrt{9 - 4M^2K^2}}{2MK^2}$; $\sqrt{3K^3\varepsilon^3 + 3K^2\varepsilon^2 - \frac{3}{M}\varepsilon + 1 + + 8KLm\varepsilon^2} < 1$;

2° $MK \leqslant a$; $\varepsilon > \frac{3-\sqrt{9-4M^2K^2}}{2MK^2}$; $\sqrt{3K^3\varepsilon^3+2K^2\varepsilon^2}+8KLm\varepsilon^2<1$;

3° $MK \geqslant a$; $\sqrt{3K^3\varepsilon^3+3K^2\varepsilon^2-\frac{3}{M}\varepsilon+1}+8KLm\varepsilon^2<1$;

где a — корень уравнения $2x^3+5x^2-2x-9=0$ $(a\approx 1{,}239)$ и $m=\max\{\|P(x_{-1})\|;\ \|P(x_0)\|;\ \|P(x_1)\|\}$.

Тогда уравнение (1) *имеет в области Q единственное решение x^*, к которому последовательность* (9) *сходится.*

Доказательство. Введем обозначения:

$$\|P(x_i)\|=\eta_i \qquad (i=-1,\ 0,\ \ldots). \tag{12}$$

На основании интерполяционной формулы Ньютона [3]

$$\begin{gathered}\|P(x_{n+1})\|\leqslant\|P(x_n)+P(x_n,x_{n-1})(x_{n+1}-x_n)\|+\\+\|[P(x_{n+1},x_n)-P(x_n,x_{n-1})](x_{n+1}-x_n)\|.\end{gathered} \tag{13}$$

Для $n=1,\ 2,\ \ldots$ получим

$$\begin{gathered}\|P(x_n)+P(x_n,x_{n-1})\ (x_{n+1}-x_n)\|^2=\\=\|P(x_n)-\varepsilon P(x_n,x_{n-1})P^*(x_n,x_{n-1})\ [P(x_n)+P(x_{n-1})]\|^2=\\=\|P(x_n)\|^2-2\varepsilon\|P^*(x_n,x_{n-1})P(x_n)\|^2-\\-2\varepsilon(P(x_n,x_{n-1})P^*(x_n,x_{n-1})\,P(x_n),P(x_{n-1}))+\\+\varepsilon^2\|P(x_n,x_{n-1})P^*(x_n,x_{n-1})\,[P(x_n)+P(x_{n-1})]\|^2=\\=\|P(x_n)\|^2-3\varepsilon\|P^*(x_n,x_{n-1})\,P(x_n)\|^2-\varepsilon\|P^*(x_n,x_{n-1})\,P(x_{n-1})\|^2+\\+\varepsilon\|P^*(x_n,x_{n-1})\,[P(x_n)-P(x_{n-1})]\|^2+\\+\varepsilon^2\|P(x_n,x_{n-1})P^*(x_n,x_{n-1})\,[P(x_n)+P(x_{n-1})]\|^2.\end{gathered} \tag{14}$$

Поскольку

$$\begin{gathered}\|P^*(x_n,x_{n-1})\ [P(x_n)-P(x_{n-1})]\|=\|P^*(x_n,x_{n-1})P(x_n,x_{n-1})\ (x_n-x_{n-1})\|=\\=\varepsilon\|P^*(x_n,x_{n-1})\,P(x_n,x_{n-1})P^*(x_{n-1},x_{n-2})\ [P(x_{n-1})+P(x_{n-2})]\|,\end{gathered} \tag{15}$$

то на основании оценок а и б

$$\begin{gathered}\|P(x_n)+P(x_n,x_{n-1})\ (x_{n+1}-x_n)\|^2\leqslant\\\leqslant(K^2\varepsilon^2-\frac{3}{M}\varepsilon+1)\eta_n^2+(K^3\varepsilon^3+K^2\varepsilon^2-\frac{1}{M}\varepsilon)\eta_{n-1}^2+\\+K^3\varepsilon^3\eta_{n-2}^2+2K^2\varepsilon^2\eta_n\eta_{n-1}+2K^3\varepsilon^3\eta_{n-1}\eta_{n-2}.\end{gathered} \tag{16}$$

Так как

$$\begin{gathered}\|[P(x_{n+1},x_n)-P(x_n,x_{n-1})]\ (x_{n+1}-x_n)\|\leqslant L\|x_{n+1}-x_n\|\,\|x_{n+1}-x_{n-1}\|\leqslant\\\leqslant L\|x_{n+1}-x_n\|(\|x_{n+1}-x_n\|+\|x_n-x_{n-1}\|)\leqslant\\\leqslant KL\varepsilon^2(\eta_n^2+2\eta_{n-1}^2+3\eta_n\eta_{n-1}+\eta_n\eta_{n-2}+\eta_{n-1}\eta_{n-2}),\end{gathered} \tag{17}$$

то из (13), (16) и (17) вытекает

$$\begin{gathered}\eta_{n+1}\leqslant\Big[(K^2\varepsilon^2-\frac{3\varepsilon}{M}+1)\eta_n^2+(K^3\varepsilon^3+K^2\varepsilon^2-\frac{1}{M}\varepsilon)\eta_{n-1}^2+\\+K^3\varepsilon^3\eta_{n-2}^2+2K^2\varepsilon^2\eta_n\eta_{n-1}+2K^3\varepsilon^3\eta_{n-1}\eta_{n-2}\Big]^{1/2}+\\+KL\varepsilon^2(\eta_n^2+2\eta_{n-1}^2+3\eta_n\eta_{n-1}+\eta_n\eta_{n-2}+\eta_{n-1}\eta_{n-2}).\end{gathered} \tag{18}$$

Используя доказанную лемму, нетрудно установить, что при выполнении одного из условий 1°, 2° и 3°

$$\lim_{n\to\infty} \| P(x_n) \| = \lim_{n\to\infty} \eta_n = 0.$$

Единственность решения в замкнутой области Q вытекает из условия а (ср. [4]).

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в замкнутой области Q, содержащей последовательность $\{x_n\}$ $(n=-1, 0, \ldots)$, справедливы оценки*

а) $(P(x', x'') P^*(x'', x''') h, h) \geqslant \frac{1}{M} \| h \|^2, \ 0 < M < +\infty,$

б) $\| P(x', x'') \| \leqslant \sqrt{K}$

для каждого $x', x'', x''' \in Q$, $h \in H$ и выполнено одно из условий 1°, 2°:

$$1° \ MK < \frac{\sqrt{7}}{2}; \qquad 0 < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{7K}};$$

$$2° \ MK \geqslant \frac{\sqrt{7}}{2}; \qquad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2MK^2}.$$

Тогда уравнение (1) *имеет в области Q единственное решение x^*, к которому последовательность* (9) *сходится.*

Доказательство. Исходя из равенства

$$P(x_{n+1}, x_n)(x_{n+1} - x_n) = P(x_{n+1}) - P(x_n), \tag{19}$$

получим для $n = 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} \| P(x_{n+1}) \|^2 &= \| P(x_n) + P(x_{n+1}, x_n)(x_{n+1} - x_n) \|^2 = \\ &= \| P(x_n) \|^2 - 2\varepsilon (P(x_{n+1}, x_n) P^*(x_n, x_{n-1}) [P(x_n) + P(x_{n-1})], P(x_n)) + \\ &+ \varepsilon^2 \| P(x_{n+1}, x_n) P^*(x_n, x_{n-1}) [P(x_n) + P(x_{n-1})] \|^2 = \\ &= \| P(x_n) \|^2 - 4\varepsilon (P(x_{n+1}, x_n) P^*(x_n, x_{n-1}) P(x_n), P(x_n)) + \\ &+ 2\varepsilon (P(x_{n+1}, x_n) P^*(x_n, x_{n-1}) [P(x_n) - P(x_{n-1})], P(x_n)) + \\ &+ \varepsilon^2 \| P(x_{n+1}, x_n) P^*(x_n, x_{n-1}) [P(x_n) + P(x_{n-1})] \|^2. \end{aligned} \tag{20}$$

Так как

$$\begin{aligned} P(x_n) - P(x_{n-1}) &= P(x_n, x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = \\ &= -\varepsilon P(x_n, x_{n-1}) P^*(x_{n-1}, x_{n-2}) [P(x_{n-1}) + P(x_{n-2})], \end{aligned} \tag{21}$$

то, обозначив $\| P(x_i) \| = \eta_i$, получим на основании (20) и (21)

$$\begin{aligned} \eta_{n+1}^2 \leqslant & \left(K^2 \varepsilon^2 - \frac{4}{M} \varepsilon + 1\right) \eta_n^2 + K^2 \varepsilon^2 \eta_{n-1}^2 + \\ & + 4\varepsilon^2 K^2 \eta_n \eta_{n-1} + 2\varepsilon^2 K^2 \eta_n \eta_{n-2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Теперь нетрудно установить (ср. с доказательством теоремы 1), что условие 1° (или 2°) обеспечивает сходимость последовательности (9) к решению x^*. Единственность решения опять-же вытекает из условия а (ср. [4]).

Теорема доказана.

Замечание. Теоремы 1 и 2 остаются в силе, если в (9) ε заменить ε_n, причем последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$ неубывающая. В формулировках теорем заменим ε числом $\sup \varepsilon_n$.

При приближенном решении линейного операторного уравнения

$$Tx \equiv Ax + b = 0; \; b \in H \tag{23}$$

метод (9) принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \varepsilon A^* (T x_n + T x_{n-1}). \quad (\varepsilon > 0) \tag{24}$$

Так как в данном случае $L = 0$, то из теоремы 1 следует

Теорема 3: *Пусть справедливы оценки*

а) $\| A^* h \| \geqslant \frac{1}{\sqrt{M}} \| h \|, \qquad 0 < M < +\infty, \; h \in H,$

б) $\| A \| \leqslant \sqrt{K}$

и выполнено одно из условий 1°, 2°:

1° $MK \leqslant a; \qquad 3K^3 \varepsilon^3 + 2K^2 \varepsilon^2 < 1;$

2° $MK \geqslant a; \qquad \varepsilon < \frac{\sqrt{M^2K^2 + 4MK} - MK}{2MK^2},$

где a — *корень уравнения* $2x^3 + 5x^2 - 2x - 9 = 0$ ($a \approx 1{,}239$).

Тогда последовательность (24) сходится к решению уравнения (23).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Вайнберг, Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956.
2. Е. И. Линьков, О методе наискорейшего спуска для нелинейных уравнений, Ученые записки Московск. обл. пед. ин-та, т. XCVI, 6, 1960, 221—230.
3. А. С. Сергеев, О методе хорд, Сибирский матем. журнал, т. II, 2, 1961, 282—289.
4. С. Ульм, Об одном классе итерационных методов в пространстве Гильберта, Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, т. XII, № 2, 1963.
5. В. М. Фридман, Итеративный процесс с минимальными ошибками для нелинейного операторного уравнения, ДАН, т. 139, № 5, 1961, 1063—1066.
6. M. Altman, Concerning approximate solutions of non-linear functional equations, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. 3, 5, № 5, 1957, 460—465.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
9. II 1963

GRADIENDIMEETODI INTERPOLATSIOONANALOOG

S. Ulm,
füüsika-matemaatikateaduste kandidaat

Resümee

Defineeritakse funktsionaali gradiendi interpolatsioonanaloogi mõiste (valem 6), millest lähtudes vaadeldakse Hilberti ruumis iteratsioonimeetodit (9). Teoreemidega 1 ja 2 antakse piisavad tingimused, milledel jada (9) koondub mittelineaarse operaatorvõrrandi (1) lahendiks. Erijuhuna vaadeldakse meetodi rakendamist lineaarsele operaatorvõrrandile (teoreem 3).

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
9. II 1963

ÜBER DAS INTERPOLATIONSANALOGON DER GRADIENTMETHODE

S. Ulm

Zusammenfassung

Es wird ein Interpolationsanalogon des Gradienten für ein Funktional definiert (Formel 6) und zur Behandlung der Iterationsmethode (9) im hilbertschen Raum verwendet. Die Theoreme 1 und 2 bestimmen hinreichende Bedingungen für die Konvergenz der Folge (9) zur Lösung einer nichtlinearen Operatorgleichung (1). Als ein Spezialfall wird die Anwendung der Methode für eine lineare Operatorgleichung behandelt (Theorem 3).

Institut für Kybernetik
der Akademie der Wissenschaften der Estnischen SSR

Eingegangen
am 9. Febr. 1963