EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XI KÕIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1962, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XI
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1962, № 3

ОБ ОДНОМ ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Л. АЙНОЛА,

кандидат физико-математических наук

Для приближенного решения дифференциальных уравнений с частными производными общеизвестны вариационные методы Ритца и Канторовича. При вариационном методе Ритца решение задачи ищется в виде ряда, члены которого как функции задаются, а постоянные коэффициенты определяются из системы алгебраических уравнений, являющейся условием стационарности соответствующего функционала. При методе Канторовича коэффициентами ряда являются функции от одной переменной, которые определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В настоящей заметке предлагается вариационный метод, где члены ряда ищутся в виде произведения двух неизвестных сомножителей, один из которых является функцией одной переменной, а другой — функцией другой переменной. Для их определения, правилами вариационного исчисления, получаются две системы обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом коэффициенты одной системы зависят от решения другой системы и наоборот. Если удастся эти системы с неопределенными коэффициентами решить, то значения этих постоянных коэффициентов можно определить из системы трансцендентных уравнений. Принципиальное отличие предлагаемого метода от методов Ритца и Канторовича состоится в том, что здесь проводится одновременное варьирование в двух направлениях. Аналогичная идея использована при приближенном методе Харти-Фока в квантовой механике [1] и при методе Вайнштейна [2] для приближенного разделения переменных.

1. Описание метода

Рассмотрим задачу стационарности функционала

$$I = \iint\limits_D F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, \ldots\ldots) \, dxdy, \tag{1.1}$$

где D прямоугольная область.

Необходимым условием стационарности функционала является дифференциальное уравнение с частными производными

$$H(u) \equiv F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{u_{xx}} + \ldots = 0. \qquad (1.2)$$

Пусть $F(x, y, u, \ldots)$ имеет такую форму, что множители перед неизвестной функцией и его производными в уравнении (1.2) разделяются на произведения функции от x и функции от y. Пусть краевые условия для $u(x, y)$ на контуре $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$, ограничивающем область D, будут однородными.

Ищем приближенное решение уравнения (1.2) в виде

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y), \qquad (1.3)$$

где каждая слагаемая удовлетворяет краевым условиям.

Функции $f_i(x)$ и $g_i(y)$ определяются из условия, что первая вариация функционала (1.1) равняется нулю

$$\delta I = 0. \qquad (1.4)$$

Подставим выражение (1.3) в функционал (1.1)

$$I = \iint_D G(x, y, f_1, f_1', f_1'', \ldots, f_n, f_n', \ldots, g_1, \dot{g}_1, \ldots, g_n, \dot{g}_n, \ldots)\, dx\, dy. \qquad (1.5)$$

Здесь штрихами обозначено дифференцирование по координате x и точками — по координате y.

Так как

$$\delta u = \sum_{i=1}^{n} (g_i \delta f_i + f_i \delta g_i), \qquad (1.6)$$

то в вариационном исчислении известным путем получим, что первая вариация этого функционала имеет вид

$$\begin{aligned} \delta I = \sum_{i=1}^{n} \Big\{ & \int_{x_1}^{x_2} L_i \delta f_i dx + \int_{y_1}^{y_2} K_i \delta g_i dy + \\ & + (M_{1i} \delta f_i + M_{2i} \delta f_1' + \ldots) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} + \\ & + (N_{1i} \delta g_i + N_{2i} \delta \dot{g}_i + \ldots) \Big|_{y=y_1}^{y=y_2} \Big\}. \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_i &\equiv \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial G}{\partial f_i} dy - \frac{d}{dx} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial G}{\partial f_i'} dy + \frac{d^2}{dx^2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial G}{\partial f_i''} dy - \ldots \\ K_i &\equiv \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial G}{\partial g_i} dx - \frac{d}{dy} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial G}{\partial \dot{g}_i} dx + \frac{d^2}{dy^2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial G}{\partial \ddot{g}_i} dx - \ldots \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Предполагая, что краевыми условиями, наложенными на $u(x, y)$, определяются значения $f_i(x_1)$, $f'_i(x_1)$, ..., $f_i(x_2)$, $f'_i(x_2)$, ... и $g_i(y_1)$, $g'_i(y_1)$, ..., $g_i(y_2)$, $g'_i(y_2)$, ..., получим, что $\delta f_i = \delta f'_i = \ldots = 0$ при $x = x_1$ и $x = x_2$, а также $\delta g_i = \delta g'_i = \ldots = 0$ при $y = y_1$ и $y = y_2$. Из условия (1.4) и выражения (1.7) теперь вытекают следующие системы для определения функций $f_i(x)$ и $g_i(y)$

$$L_i = 0, \qquad K_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.9}$$

Далее надо решить эту систему (точно или приближенно), рассматривая интегралы от искомых функций, имеющиеся в уравнениях, как неопределенные постоянные коэффициенты. Для определения этих коэффициентов надо полученные решения и их производные подставить в соответствующие выражения интегралов и произвести интегрирование. В результате получается система уравнений относительно коэффициентов.

В частном случае, если задавать функции $f_i(x)$ или $g_i(y)$, описанный метод совпадает с методом Канторовича.

Отметим, что существует возможность применять аппроксимацию (1.3) в методе Галеркина. В этом случае функции $f_i(x)$ и $g_i(y)$ определяются из системы

$$\iint_D H f_i \, dx \, dy = 0, \qquad \iint_D H g_i \, dx \, dy = 0. \tag{1.10}$$

Для более подробного пояснения метода рассмотрим простую конкретную задачу.

2. Пример

Рассмотрим задачу решения уравнения Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} + p(x) q(y) = 0 \tag{2.1}$$

при нулевых граничных условиях

$$u(x, y) = 0 \tag{2.2}$$

на прямолинейных краях $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Эта задача эквивалентна задаче о минимуме функционала

$$I = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 - 2pq) \, dxdy. \tag{2.3}$$

Выразим $u(x, y)$ в виде (1.3) и предположим, что $f_i(x)$ и $g_i(y)$ удовлетворяют граничным условиям

$$f_i(\pm a) = g_i(\pm b) = 0, \tag{2.4}$$

вытекающим из (2.2).

Тогда из вариации функционала (2.3)

$$\delta I = \iint\limits_D \sum_{k=1}^{n} \Big[\sum_{i=1}^{n} (f_i'' g_i + f_i g_i'') + pq \Big] (g_k \delta f_k + f_k \delta g_k)\, dx dy \tag{2.5}$$

получим следующие дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} (\alpha_{ik}^{(1)} f_i'' - \alpha_{ik}^{(2)} f_i) + \alpha_k^{(3)} p = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (\beta_{ik}^{(1)} g_i'' - \beta_{ik}^{(2)} g_i) + \beta_k^{(3)} q = 0, \\ (k = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered} \tag{2.6}$$

Здесь коэффициенты обозначены следующим образом:

$$\begin{gathered} \alpha_{ik}^{(1)} = \int_{-b}^{b} g_i g_k dy, \quad \alpha_{ik}^{(2)} = \int_{-b}^{b} g_i' g_k' \, dy, \quad \alpha_k^{(3)} = \int_{-b}^{b} g_k q dy, \\ \beta_{ik}^{(1)} = \int_{-a}^{a} f_i f_k dx, \quad \beta_{ik}^{(2)} = \int_{-a}^{a} f_i' f_k' \, dx, \quad \beta_k^{(3)} = \int_{-a}^{a} f_k p dx. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Решения систем (2.6) при граничных условиях (2.4) будут

$$\begin{gathered} f_i = f_i(x;\ \alpha_{st}^{(1)},\ \alpha_{st}^{(2)},\ \alpha_s^{(3)}), \\ g_i = g_i\,(y;\ \beta_{st}^{(1)},\ \beta_{st}^{(2)},\ \beta_s^{(3)}). \end{gathered} \tag{2.8}$$

Используя эти функции получим из (2.7) системы

$$\begin{gathered} \alpha_{ik}^{(r)} = A_{ik}^{(r)} (\beta_{st}^{(1)},\ \beta_{st}^{(2)},\ \beta_s^{(3)}), \\ \beta_{ik}^{(r)} = B_{ik}^{(r)}\ (\alpha_{st}^{(1)},\ \alpha_{st}^{(2)},\ \alpha_s^{(3)}), \\ (r = 1,\ 2,\ 3), \end{gathered} \tag{2.9}$$

определяющие неизвестные коэффициенты.

3. Численные результаты

Приведем численные результаты решения рассмотренной задачи в самом простом случае.

Пусть $p(x) = 1$, $q(y) = 1$ и $n = 1$. Используя обозначения

$$\alpha_1^2 = \frac{\alpha_{11}^{(2)}}{\alpha_{11}^{(1)}} a^2, \ \alpha_2 = \frac{\alpha_1^{(3)}}{\alpha_{11}^{(2)}}, \quad \beta_1^2 = \frac{\beta_{11}^{(2)}}{\beta_{11}^{(1)}} b^2, \ \beta_2 = \frac{\beta_1^{(3)}}{\beta_{11}^{(2)}}, \tag{3.1}$$

получим, что функции (2.8) имеют вид

$$f_1 = \alpha_2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha_1 \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \alpha_1}\right),$$
$$g_1 = \beta_2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} \beta_1 \frac{y}{b}}{\operatorname{ch} \beta_1}\right). \tag{3.2}$$

Система (2.9) для определения коэффициентов будет

$$\alpha_1^2 = \frac{\beta_1^2 (\beta_1 \operatorname{th}^2 \beta_1 + \operatorname{th} \beta_1 - \beta_1) a^2}{(3\beta_1 - 3\operatorname{th} \beta_1 - \beta_1 \operatorname{th}^2 \beta_1) b^2},$$
$$\alpha_2 = \frac{2(\beta_1 - \operatorname{th} \beta_1) b^2}{\beta_1^2 \beta_2 (\beta_1 \operatorname{th}^2 \beta_1 + \operatorname{th} \beta_1 - \beta_1)},$$
$$\beta_1^2 = \frac{\alpha_1^2 (\alpha_1 \operatorname{th}^2 \alpha_1 + \operatorname{th} \alpha_1 - \alpha_1) b^2}{(3\alpha_1 - 3\operatorname{th} \alpha_1 - \alpha_1 \operatorname{th}^2 \alpha_1) a^2},$$
$$\beta_2 = \frac{2(\alpha_1 - \operatorname{th} \alpha_1) a^2}{\alpha_1^2 \alpha_2 (\alpha_1 \operatorname{th}^2 \alpha_1 + \operatorname{th} \alpha_1 - \alpha_1)}. \tag{3.3}$$

При $a = 2b$ получаемое решение имеет вид

$$u(x, y) = 1{,}77456 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} 1{,}58713 \frac{x}{b}}{\operatorname{ch} 3{,}17426}\right)\left(1 - \frac{\operatorname{ch} 0{,}85201 \frac{y}{b}}{\operatorname{ch} 0{,}85201}\right) b^2. \tag{3.4}$$

Метод Канторовича с $g_1(y) = b^2 - y^2$ дает решение [3]

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(b^2 - y^2) \left(1 - \frac{\operatorname{ch} 1{,}58114 \frac{x}{b}}{\operatorname{ch} 3{,}16228}\right). \tag{3.5}$$

При $b = 1$, $x = 0$ и $y = 0$ решение (3.4) принимает значение $u(0,0) = 0{,}45248$, точное решение [3] 0,45549. Решение Канторовича (3.5) дает 0,45721. При $b = 1$, $x = 1$, $y = \frac{1}{2}$ соответственно получается $u\left(1, \frac{1}{2}\right) = 0{,}29581$; 0,29501 и 0,29532.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Бете и Э. Солпитер, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, М., 1960, § 30 и 31.
2. Л. А. Вайнштейн, Метод приближенного разделения переменных и его применение к граничным задачам электродинамики и акустики, Ж. техн. физ., т. 27, в. 9, 2109—2128.
3. Л. В. Канторович и В. И. Крылов, Приближенные методы высшего анализа, М.-Л., 1952, гл. 4, § 3.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
15. I 1962

ÜHEST LIGIKAUDSEST OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDITE LAHENDAMISE VARIATSIOONMEETODIST

L. Ainola

Resümee

Rohkesti kasutatavate Ritzi ja Kantorovitši variatsioonmeetodite puhul aproksimeeritakse lahend sellise rea kujul, mille iga liige sisaldab varieeritavat konstanti või ühemuutuja funktsiooni. Käesolevas uurimuses esitatakse meetod, kus aproksimeeritavate funktsioonide varieerimine toimub mõlema koordinaadi suunas. Selleks antakse lahend ette erinevate argumentidega ühemuutuja funktsioonide korrutiste summana (1.3). Variatsioonarvutuse kasutamisega saadakse korrutatavate funktsioonide määramiseks kaks harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi (2.6), kus esimese süsteemi kordajad-koefitsiendid (2.7) sõltuvad teise süsteemi lahendist ja vastupidi. Kui süsteemi (2.6) lahend (2.8, 3.2) on teada, määratakse koefitsiendid harilike võrrandite süsteemist (2.9, 3.3).

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
15. I 1962

AN APPROXIMATE VARIATIONAL METHOD FOR SOLVING PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

L. Ainola

Summary

By the well-known variational methods of Ritz and Kantorovitch the solution of a partial differential equation is approximated by the series with each term involving an indeterminate constant or function of one variable. In the present note a method is proposed in which the functions approximated are variated in directions of both coordinates. For this, the terms of series are taken as products of two functions of different coordinates (1.3). These functions are determined from two systems of ordinary differential equations (2.6) obtained by the variational calculus. The coefficients of the first system (2.7) are dependent on the solution of the second system, and vice versa. If solutions of systems (2.8, 3.2) are found, the coefficients are determined from the system of common equations (2.9, 3.3).

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Cybernetics

Received
Jan. 15th, 1962