

О МЕТОДАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ТРАЕКТОРИИ ОБРАБОТКИ ОДНОГО КЛАССА ПРОСТРАНСТВЕННО-СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Б. ТАММ

Объемные кулачки с пространственно-сложными поверхностями, если их поперечные сечения не имеют резких спадов (контур каждого поперечного сечения имеет вид плавной замкнутой кривой), могут быть обработаны на специальном станке с программным управлением, на котором задается нужное соотношение между числом оборотов и продольным смещением. Управление движением режущего инструмента в плоскости, перпендикулярной оси шпинделя станка*, производится независимо от этого соотношения.

Данные о кулачке задаются таблицами, в цилиндрических координатах. Задается ряд равноотстоящих друг от друга поперечных сечений, для каждого из которых через постоянный полярный угол указывается полярный радиус. По этим дискретно заданным точкам поверхность может быть аппроксимирована при помощи двух множеств кривых, из которых в первое множество входят кривые $\Theta = \text{const}$ и во второе — кривые $l = \text{const}$, где Θ — полярный угол, l — длина кулачка.

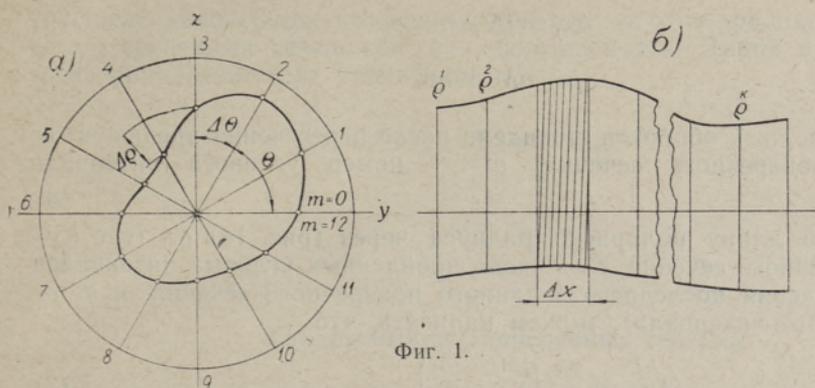
Аппроксимируя сетку этих кривых по винтовой линии, получаем траекторию, по которой должен двигаться режущий инструмент при обработке требуемой поверхности.

В данной работе предлагается метод программирования, позволяющий автоматически осуществить обе ступени аппроксимации, вычислить координаты точек на винтовой линии с наперед заданной точностью и выдавать информацию для линейного интерполятора. Метод может быть реализован на любой универсальной цифровой вычислительной машине (УЦВМ).

Для вычисления сложной поверхности кулачка необходимо произвести аппроксимацию как по образующим, так и по контурам поперечных сечений. Образующие кулачка, соединяющие точки различных поперечных сечений, находящихся под одним и тем же полярным углом (см. фиг. 1 и фиг. 2), аппроксимируются как линейно, так и дугами парабол второй или третьей степени. В плоскостях поперечных сечений траектория центра фрезы представляется отрезками спиралей Архимеда, что по существу является линейной интерполяцией в полярных координатах по точкам, заданным через постоянный полярный угол.

Пусть поперечные сечения кулачка заданы через интервал Δx (см. фиг. 1 б, в) и на каждом сечении известны n радиусов, заданных через

* Идея применения станков такого типа для обработки пространственно-сложных деталей изложена в работе [1].

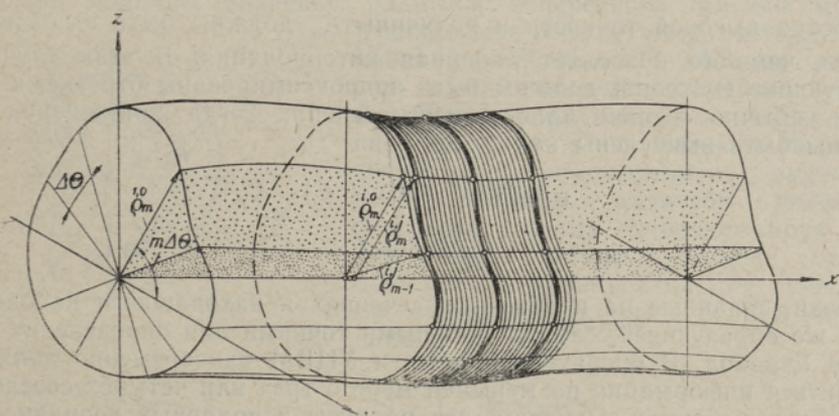


Фиг. 1.

угол $\Delta\theta = \frac{2\pi}{n} = \text{const}$. Предполагая, что во время продольного передвижения детали на Δx шпиндель станка поворачивается на угол $\kappa\lambda$ ($\kappa = 1, 2, 3, \dots$), элементарный шаг винтовой линии

$$\Delta'x = \frac{2\Delta x}{\kappa n} \quad (1)$$

Рассмотрим вначале отдельно методы аппроксимации образующих и поперечных сечений, а потом построим логическую схему, автоматически осуществляющую их одновременную аппроксимацию.



Фиг. 2.

Аппроксимация образующих

а. Линейная аппроксимация. В случае, если между соседними поперечными сечениями допустима линейная аппроксимация по образующим, надо выразить коэффициент пропорциональности линейного интерполирования. Потом, зная эту величину, нетрудно найти радиусы для любого углового интервала.

Продольное перемещение режущего инструмента в конце j -го углового интервала

$$\Delta x_j = j \Delta' x, \quad (2)$$

где

$$j = nM + m$$

M — число полных оборотов шпинделя после пересечения предыдущего заданного поперечного сечения; m — номер углового интервала (фиг. 1а).

Обозначив длину полярного радиуса через (рис. 1в) $q_m^{i,j}$ (где i — номер поперечного сечения, j — число пройденных угловых интервалов после пересечения последнего заданного поперечного сечения и m — номер углового интервала), можем написать, что

$$\Delta q_m^{i,j} = \frac{\Delta x_j}{\Delta x} (q_m^{i+1,0} - q_m^{i,0}). \quad (3)$$

Стало быть, приращение полярного радиуса на элементарный шаг винтовой линии (см. фиг. 1а)

$$\Delta q_m^{i,j} = \frac{1}{kn} (q_m^{i+1,0} - q_m^{i,0}). \quad (4)$$

По зависимостям (1) — (4) можно легко подсчитать любую точку пересечения винтовой линии с образующими, аппроксимированными отрезками прямых.

б. Нелинейная аппроксимация. В большинстве случаев требуется обработка высокой точности и величины $q_m^{i,j}$ должны быть вычислены точнее, чем это позволяет линейная интерполяция. В этих случаях образующие $\Theta = \text{const}$ должны быть аппроксимированы отрезками парабол, обычно второй или третьей степени. Тогда приращения Δq должны быть вычислены как

$$q = f(Ax^2 + Bx + C)$$

или

$$q = f(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D).$$

Точки, заданные на поперечных сечениях и находящиеся на одной и той же образующей, служат опорными точками для определения отрезков парабол. В оперативной памяти УЦВМ одновременно должна находиться информация по меньшей мере о трех или четырех соседних поперечных сечениях. Отметим, что радиусы в полярных координатах на параллельных плоскостях $y-z$ могут быть рассмотрены как декартовы ординаты на соответствующих полуплоскостях продольных сечений (фиг. 2). Поэтому коэффициенты отрезков парабол вычисляются в результате совместного решения системы из трех или четырех уравнений. В случае параболы второй степени система выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} A_{m-1}x^2 + B_{m-1}x + C = q_m^{i-1,0} \\ A_mx^2 + B_mx + C = q_m^{i,0} \\ A_{m+1}x^2 + B_{m+1}x + C = q_m^{i+1,0} \end{cases}$$

После нахождения коэффициентов всех n отрезков парабол между тремя соседними сечениями они запоминаются. Длина радиуса в j -й точке определяется из уравнения

$$\rho_m^{i,j} = A_m x_j^2 + B_m x_j + C_m, \tag{5}$$

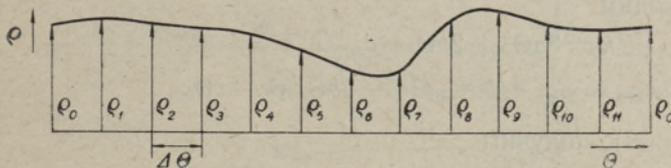
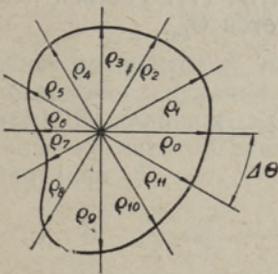
где

$$x_j = j\Delta'x.$$

Аппроксимация поперечных сечений

Контур поперечного сечения кулачка в общем случае может иметь как выпуклые, так и вогнутые участки. Участки спирали Архимеда хорошо аппроксимируют выпуклые участки сечения. Для аппроксимации вогнутых участков с той же точностью шаг аппроксимации должен быть в несколько раз меньше. Очевидно, что если полярные радиусы поперечного сечения заданы через интервалы угла в 7—8 градусов или больше, целесообразно применять двухступенчатую аппроксимацию. Сначала концы заданных полярных радиусов соединяются отрезками кривой, обеспечивающей достаточную плавность обхода, а потом эта кривая аппроксимируется отрезками Архимедовой спирали.

Определить в полярной системе координат форму кривой, характеризующей контур поперечного сечения кулачка, и произвести интерполирование с определением шага интерполирования затруднительно. Однако, значения радиусов поперечного сечения можно откладывать в декартовой системе координат ρ и Θ (фиг. 3). Концы радиусов в этой системе координат могут быть соединены отрезками кубических парабол, что с достаточно высокой точностью аппроксимирует заданный контур. Концы радиусов являются опорными точками. Аппроксимируя контур через четыре соседних точки, находим коэффициенты для среднего по отношению к этим точкам интервала.



Фиг. 3.

Для нахождения на контуре поперечного сечения дополнительных точек между опорными точками кубическую параболу придется аппроксимировать еще раз. В силу того, что в полярной системе координат режущий инструмент обрабатывает контур поперечного сечения вращающегося вокруг своей оси кулачка по отрезкам спирали Архимеда, в декартовой системе координат это означает линейную аппроксимацию.

Задача линейной аппроксимации выпрямленного поперечного сечения кулачка в некотором смысле напоминает аппроксимацию аэродинамических профилей [2]. Однако, если там требовалось гарантировать допустимое расстояние между двумя функциями, то в данном случае необходимо гарантировать допустимое расстояние от прямой до параболы по ординате.

Итак, контур поперечного сечения объемного кулачка аппроксимируется кубической параболой (фиг. 4)

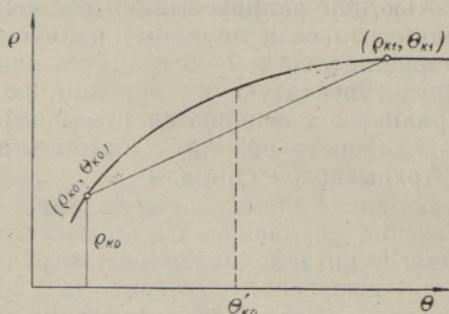
$$f(\theta) \equiv a\theta^3 + b\theta^2 + c\theta + d = \rho. \quad (6)$$

Эта функция в свою очередь аппроксимируется линейной функцией

$$g(\theta) \equiv \kappa\theta + e = \rho. \quad (7)$$

Если выразить разность этих функций тоже в виде функции

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta), \quad (8)$$



Фиг. 4.

то в точке, где $\frac{dh(\theta)}{d\theta} = 0$, именно и находится $\Delta\rho_{\max}$. Обозначим независимую переменную в этом месте через $\theta'_{ко}$.

При решении этой задачи нам известна максимальная разность функций (6) и (7): она определяется допустимой погрешностью аппроксимации δ . Неизвестна, однако, аппроксимирующая функция, т. е. κ и e в формуле (7). Третьей неизвестной является $\theta'_{ко}$.

Имеем

$$h(\theta) \equiv a\theta^3 + b\theta^2 + (c - \kappa)\theta + d - e = \delta \quad (9)$$

$$\frac{dh(\theta)}{d\theta} \equiv 3a\theta^2 + 2b\theta + c - \kappa = 0 \quad (10)$$

$$g(\theta_{ко}) \equiv \kappa\theta_{ко} + e = \rho_{ко}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) находим

$$\kappa = 3a\theta^2 + 2b\theta + c$$

$$e = \rho_{ко} - \kappa\theta_{ко} = \rho_{ко} - 3a\theta_{ко}\theta^2 - 2b\theta_{ко}\theta - c\theta_{ко}.$$

Подставляя κ и e в (9), получим

$$2a\theta^3 + (b - 3a\theta_{ко})\theta^2 - 2b\theta_{ко}\theta - d + \rho_{ко} + \delta - c\theta_{ко} = 0.$$

Обозначив

$$2a = A, \quad b - 3a\theta_{ко} = B$$

$$2b\theta_{ко} = C, \quad \rho_{ко} + \delta - d - c\theta_{ко} = D,$$

получим

$$A\theta^3 + B\theta^2 + C\theta + D = 0. \quad (12)$$

Решая это уравнение, находим $\Theta'_{h(\Theta)=0} = \Theta'_{k_0}$. Далее $\kappa = 3a\Theta_{k_0}'^2 + 2b\Theta'_{k_0} + C$ и $e = Q_{k_0} - \kappa\Theta_{k_0}$.

Теперь имеется уже строго определенная аппроксимирующая функция. Остается вычислить точку пересечения функций $f(\Theta)$ и $g(\Theta_{k_0})$, т. е. определить Q_{k1} и Θ_{k1} .

$$\begin{cases} a\Theta^3 + b\Theta^2 + c\Theta + d - Q = 0 & (13) \\ \kappa\Theta + e - Q = 0 & (14) \end{cases}$$

или

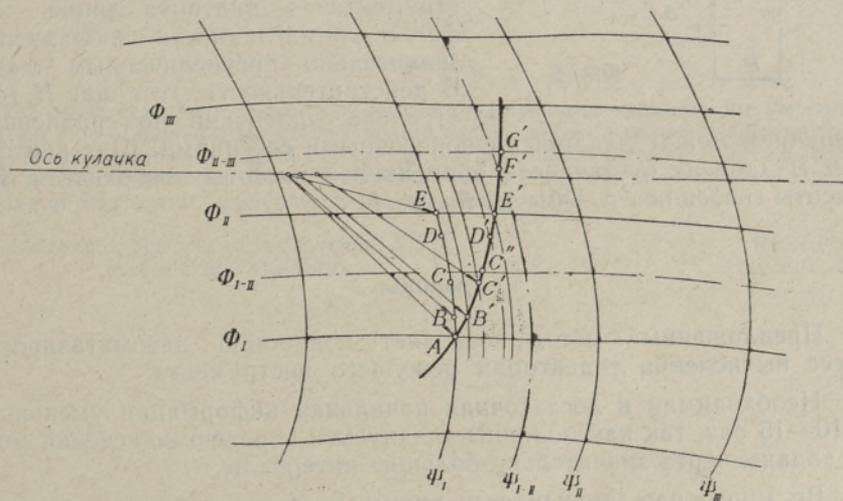
$$a\Theta^3 + b\Theta^2 + (c - \kappa)\Theta + d - e = 0.$$

Решение этого уравнения даст нам искомую координату Θ_{k1} . Подставляя значение последней в (13), находим вторую искомую координату Q_{k1} . В дальнейшем точка (Q_{k1}, Θ_{k1}) служит начальной точкой при определении следующего шага интерполирования. После нахождения каждого Θ_{kk} она сравнивается с абсциссой следующей опорной точки $\Theta_{(k+1)_0}$ и, если $\Theta_{kk} \geq \Theta_{(k+1)_0}$, аппроксимирующая прямая доводится до опорной точки.

Накопленная в интервале между двумя опорными точками ошибка отбрасывается в начале следующего, так как опорные точки заданы дискретно. Для предотвращения накопления ошибки внутри интервала между двумя опорными точками округление последнего разряда координат точек (Q_{kk}, Θ_{kk}) в вычислительной машине должно быть произведено так, чтобы было обеспечено $\delta_{\text{факт}} \leq \delta_{\text{доп}}$.

Логическая схема расчета

Точки на винтовой линии находятся в результате аппроксимации поверхности кулачка как по образующим, так и по поперечным сечениям. Выполнение алгоритма вычислений обеспечивается соответствующей логической схемой, работа которой в общем состоит в следующем (фиг. 5).



Фиг. 5.

Рассмотрим порядок вычислений в каком-то среднем цикле. Начнем расчет с точки A пересечения образующей Φ_1 с поперечным сечением Ψ_1 . В результате аппроксимации поперечного сечения Ψ_1 находят отрезок Архимедовой спирали $A - B$. Это происходит при помощи нахождения Q_m и Θ_{m1} , определяющих радиус-вектор, направляющийся в точку B по таблично заданным Q_m и Θ_{m0} , определяющим вектор A .

Затем в координаты этого вектора вводят поправку и вычисляют точку B' . Это производится путем решения полинома, проходящего через точку A , в точке B' . Коэффициенты этого полинома заранее подсчитаны, и в случае квадратичного полинома величина нового радиуса-вектора

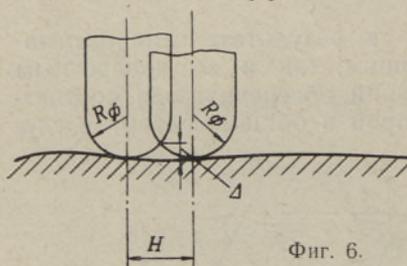
$$Q_{mB'}^{i,0} = A_m x_1^2 + B_m x_1 + C_m,$$

где $x_1 = j_1 \Delta' x$ (x_1 зависит от угла Θ_{m1} и соотношения между числом оборотов и продольным перемещением шпинделя).

Далее производится следующая интерполяция поперечного сечения от точки B до точки C аналогично прежней. Длину радиуса-вектора в точке C' снова находят путем решения полинома, проходящего через C , в точке C' . Так процесс продолжается до тех пор, пока не будет перейдена одна из осевых линий между образующими Φ_{i-11} или поперечными сечениями Ψ_{i-11} . В случае, если следующий аппроксимирующий отрезок пересекает одну из осевых линий (например, $C' - D'$), аппроксимация производится до этой линии ($C' - C''$). Затем коэффициенты образующей Φ_1 заменяются коэффициентами образующей Φ_{11} и вычислительный процесс продолжается с коэффициентами Ψ_1, Φ_{11} до точки F' на пути центра режущего инструмента. Между точками $F' - G'$ действительны коэффициенты Ψ_{11}, Φ_{11} , а начиная с $G' - \Psi_{11}, \Phi_{11}$ и т. д.

Своевременная замена коэффициентов обеспечивается путем выполнения в программе соответствующих логических условий, зависящих от угла поворота.

Траектория центра режущего инструмента — винтовая линия — на фиг. 5 для наглядности изображена со значительно преувеличенным шагом. В действительности этот шаг H (фиг. 6) очень маленький по сравнению с



Фиг. 6.

расстоянием между заданными поперечными сечениями. Шаг винтовой линии H зависит от точности обработки и чистоты поверхности, т. е. от высоты гребешков Δ . Обычно $R_\phi \gg H$.

Выводы

1. Предложенный метод позволяет полностью автоматизировать процесс вычисления траектории режущего инструмента.
2. Необходимая и достаточная начальная информация уменьшается в 10—15 раз, так как полярные радиусы и поперечные сечения могут быть заданы через значительно большие интервалы.
3. Во много раз уменьшается время, необходимое как для вычисления, так и для обработки пространственно-сложной детали.

Автор приносит глубокую благодарность В. А. Котельникову за ценные замечания по данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. E. C. Johnson, A Numerically Controlled Cam-Milling Machine, «Transactions of the I.R.E., III, 1956.
2. Б. Тамм. Линейные методы интерполирования кривых третьего порядка для станков с программным управлением. Изв. АН ЭССР, Серия физ.-мат. и техн. наук, т. IX, № 2, 1960.

*Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
19. V 1961

TEATUD LIIKI KÕVERPINDADE TÖÖTLEMISE TRAJEKTOORI AUTOMAATSE
ARVUTAMISE MEETODITEST

B. Tamm

Resümee

Artiklis käsitletakse teatud liiki kõverpindade töötlemiseks vajalike trajektooride arvutamise meetodeid. Esitatud meetod võimaldab arvutusprotsessi täielikult automatiseerida elektronarvuti abil. Viimasest saadav informatsioon võib olla sisendinformatsiooniks interpolaatorile, mis juhib spetsiaalset lõikepinkki kolmemõõtmeliste keeruliste pindadega detaili töötlemisel.

*Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut*

Saabus toimetusse
19. V 1961

ON THE AUTOMATIC COMPUTATION METHODS OF THE TRAJECTORY OF
CERTAIN CURVED PLANES

B. Tamm

Summary

The paper deals with methods of computing trajectories necessary for the cutting of a certain kind of curved planes. The proposed method allows a complete automation of the computational process by digital computers. The information obtained from the latter may be an interior information for an interpolator conducting a special cutting lathe for the working of details with three-dimensioned complicated planes.

*Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Cybernetics*

Received
May 19th, 1961