EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. IX KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1960, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ IX
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1960, № 3

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1960.3.08

К ТЕОРИИ ПОГЛОЩАЮЩИХ ОПТИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ

П. КАРД,
кандидат физико-математических наук

Введение

Как известно, теория оптических покрытий наиболее проста в случае, если все слои покрытия и ограничивающие среды прозрачны. Наличие поглощения вносит существенные усложнения. До сих пор эти усложнения были серьезным препятствием при всех попытках эффективного применения теории к расчету поглощающих покрытий. Новые рекуррентные формулы, предложенные автором в предыдущей статье [1], могут в значительной степени помочь преодолению указанных затруднений. Они представляют собой усовершенствованную форму известных формул Власова [2] (для поглощающих покрытий) и имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} a &= a_1 b_2 e^{i\alpha_m} + a_2 \tilde{b}_1^* e^{-i\alpha_m} \\ b &= b_1 b_2 e^{i\alpha_m} + a_2 \tilde{a}_1^* e^{-i\alpha_m} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{r}{d} \\ b &= \frac{1}{d} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

а r и d — амплитудные коэффициенты отражения и пропускания. Следует заметить, что мы понимаем амплитудные коэффициенты отражения и пропускания в обобщенном смысле, т. е. включая случаи, когда исходная среда или подложка являются поглощающими.*

В тех случаях, когда энергетические коэффициенты отражения R и пропускания D имеют смысл, они выражаются через a и b по формулам

$$R = \left|\frac{a}{b}\right|^2, \quad D = \frac{1}{|b|^2}. \tag{3}$$

В покрытии выделен слой [индекс m в формулах (1)], который делит покрытие на два подпокрытия — обращенное к исходной среде (индекс 1) и обращенное к конечной среде (индекс 2). Звездочка (*) обозначает комплексно-сопряженную величину, а тильда (~) — величину, относящуюся к сопряженному покрытию, т. е. такому, в котором показатели преломления слоев и ограничивающих сред заменены комплексно-сопряженными величинами. Наконец,

$$\alpha_m = k n_m h_m \tag{4}$$

где k — волновое число в вакууме, n_m — показатель преломления промежуточного слоя, а h_m — его толщина. Падение света везде будем предполагать нормальным.

* Более подробно этот вопрос освещается в работе [3].

В [1] вместе с формулами (1) были получены также следующие важные соотношения:

$$b\tilde{b}^* - a\tilde{a}^* = 1 \tag{5}$$

и

$$a' = -\tilde{a}^* \tag{6}$$

где штрих (′) означает величину, имеющую место при падении света в обратном направлении. Формулы (5) и (6), как и формулы (1), имеют совершенно универсальную применимость.

Целью настоящей статьи является вывод на основе формул (1) некоторых новых соотношений и применение этих результатов в проблеме просветления произвольного поглощающего покрытия. Просветляемое покрытие может состоять из любых однородных и изотропных слоев; их магнитная проницаемость везде положена равной единице.

1. Общие соотношения

Теорема 1. *Если исходная среда, первое подпокрытие и промежуточный слой прозрачны, то*

$$bb^* - aa^* = b_2b_2^* - a_2a_2^* \tag{7}$$

и

$$\tilde{a}b - a\tilde{b} = \tilde{a}_2b_2 - a_2\tilde{b}_2 \tag{8}$$

Доказательство. Формулы (7) и (8) вытекают непосредственно из формул (1). В самом деле, вычисление дает:

$$bb^* - aa^* = (b_1b_1^* - a_1a_1^*)\ (b_2b_2^* - a_2a_2^*)$$

(если учесть, что по условию $a_1 = \tilde{a}_1$ и $b_1 = \tilde{b}_1$). Но

$$b_1b_1^* - a_1a_1^* = \frac{1}{D_1} - \frac{R_1}{D_1} = 1$$

так как первое подпокрытие прозрачно. Следовательно,

$$bb^* - aa^* = b_2b_2^* - a_2a_2^*$$

что и совпадает с формулой (7). Точно так же находим:

$$\tilde{a}b - a\tilde{b} = (b_1b_1^* - a_1a_1^*)\ (\tilde{a}_2b_2 - a_2\tilde{b}_2) = \tilde{a}_2b_2 - a_2\tilde{b}_2$$

что и требовалось.

Теорема 2. *Если исходная среда прозрачна, то замена ее другой, тоже прозрачной средой не изменяет значений величин $bb^* - aa^*$ и $\tilde{a}b - a\tilde{b}$.*

Доказательство основано на общей формуле (см. [1] и [4]):

$$F = \begin{pmatrix} \tilde{b}^* & -\tilde{a}^* \\ -a & b \end{pmatrix} = S_N S_{N-1} \ldots S_1 \begin{pmatrix} \operatorname{ch} u_0 & \operatorname{sh} u_0 \\ \operatorname{sh} u_0 & \operatorname{ch} u_0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

где

$$u_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{n}{n_0} \tag{10}$$

Здесь n_0 и n — показатели преломления исходной среды и подложки, а матрицы $S_1, S_2, \ldots, S_N$ (N — число слоев в покрытии) зависят только от параметров слоев и от подложки, но не от исходной среды. Следовательно, если сделаем замену $n_0 \to n'_0$, то изменится только последний множитель в (9), что приводит к замене F на

$$F' = \begin{pmatrix} \tilde{b}'^* & -\tilde{a}'^* \\ -a' & b' \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(u'_0 - u_0) & \mathrm{sh}(u'_0 - u_0) \\ \mathrm{sh}(u'_0 - u_0) & \mathrm{ch}(u'_0 - u_0) \end{pmatrix} \qquad (11)$$

где

$$u'_0 - u_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{n_0}{n'_0} \qquad (12)$$

есть вещественное число. Сравнение (9) с (11) дает:

$$\left.\begin{aligned} a' &= a\,\mathrm{ch}(u'_0 - u_0) - b\,\mathrm{sh}(u'_0 - u_0) \\ b' &= b\,\mathrm{ch}(u'_0 - u_0) - a\,\mathrm{sh}(u'_0 - u_0) \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Отсюда сразу находим:

$$\left.\begin{aligned} b'b'^* - a'a'^* &= bb^* - aa^* \\ \tilde{a}'b' - a'\tilde{b}' &= \tilde{a}b - a\tilde{b} \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

что и требовалось доказать.

С л е д с т в и е. Из теорем 1 и 2 вытекает, что величины $bb^* - aa^*$ и $\tilde{a}b - a\tilde{b}$ не зависят ни от исходной среды, ни от всей той части покрытия, которая лежит между исходной средой и первым поглощающим слоем. Они зависят только от той части покрытия, которая начинается с первого поглощающего слоя (включительно), и от подложки.

2. Просветление поглощающих покрытий

Просветлением поглощающего покрытия называется такое комбинирование этого покрытия с какими-либо другими покрытиями, в результате которого коэффициент поглощения A уменьшается. В этом разделе мы будем считать исходную среду и подложку прозрачными, так что

$$bb^* - aa^* - 1 = \frac{1 - R - D}{D} = \frac{A}{D} \qquad (15)$$

Добавление к данному поглощающему покрытию прозрачного покрытия сверху (т. е. со стороны исходной среды) не изменяет, как доказано выше, значения $\frac{A}{D}$. Следовательно, просветление этим способом возможно только при условии уменьшения D (и соответственно увеличения R). Более эффективно просветляющее покрытие, добавляемое к просветляемому покрытию снизу (т. е. со стороны подложки), так как этим способом можно уменьшить $\frac{A}{D}$ и, следовательно, достигнуть просветления при различных соотношениях R и D.

Изложим теорию этого метода. Ранее, в статье [5], он был применен автором в частном случае просветления одиночного металлического слоя.

Пусть (фиг. 1) A означает исходную среду, B — подложку, K — поглощающее покрытие, к которому для просветления добавляются два прозрачных покрытия: C со стороны исходной среды и mT со стороны подложки. Здесь m — индекс одиночного выделенного слоя. Применяя формулы (1), примем CK за первое и T за второе подпокрытие, тогда как слой m будет промежуточным. Вычисляя по этим формулам $\frac{A}{D}$ (причем следует учесть прозрачность второго подпокрытия), находим:

$$\frac{A}{D} = bb^* - aa^* - 1 =$$

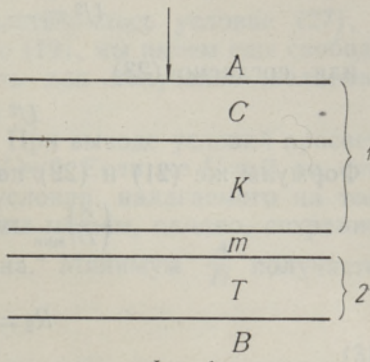
$$= \frac{1}{D_2}\frac{A_1}{D_1} - \frac{R_2}{D_2}\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{D}_1} + 2U\frac{\sqrt{R_2}}{D_2}\cos(2\alpha_m + \sigma - \mu_2 + \nu_2) \quad (16)$$

где

$$\tilde{a}_1 b_1 - a_1 \tilde{b}_1 = U e^{i\sigma} \quad (17)$$

и

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= |a_2| e^{i\mu_2} \\ b_2 &= |b_2| e^{i\nu_2} \end{aligned}\right\} \quad (18)$$



Фиг. 1

Чтобы получить наилучшее просветление, следует выбрать толщину промежуточного слоя так, чтобы

$$\cos(2\alpha_m + \sigma - \mu_2 + \nu_2) = -1 \quad (19)$$

Тогда

$$\frac{A}{D} = \frac{1}{D_2}\frac{A_1}{D_1} - \frac{R_2}{D_2}\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{D}_1} - 2U\frac{\sqrt{R_2}}{D_2} \quad (20)$$

Здесь, в силу доказанных в первом разделе теорем, $\frac{A_1}{D_1}$, $\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{D}_1}$ и U зависят только от K и m, но не зависят от A и C. Найдем минимум $\frac{A}{D}$ относительно R_2. Вычисляя производную и приравнивая ее нулю, находим, что

$$\left(\frac{A}{D}\right)_{\text{мин}} = P + \sqrt{S^2 - U^2} \quad (21)$$

при

$$\sqrt{R_2} = \frac{S - \sqrt{S^2 - U^2}}{U} \quad (22)$$

причем введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{D_1} - \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{D}_1}\right) \\ P &= \frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{D_1} + \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{D}_1}\right) \end{aligned}\right| \quad (23)$$

Формулы (21) и (22) можно упростить, если воспользоваться формулой (5), из которой вытекает:

$$(b\tilde{b}^* - a\tilde{a}^*)(b^*\tilde{b} - a^*\tilde{a}) = 1$$

Следовательно, согласно (17),

$$U^2 = (\tilde{a}_1 b_1 - a_1 \tilde{b}_1)(\tilde{a}_1^* b_1^* - a_1^* \tilde{b}_1^*) + 1 - (b_1 \tilde{b}_1^* - a_1 \tilde{a}_1^*)(b_1^* \tilde{b}_1 - a_1^* \tilde{a}_1)$$

Раскрывая скобки и учитывая, что

$$b_1 b_1{}^* - a_1 a_1{}^* = \frac{A_1}{D_1} + 1$$

и

$$\tilde{b}_1 \tilde{b}_1{}^* - \tilde{a}_1 \tilde{a}_1{}^* = \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{D}_1} + 1,$$

находим:

$$U^2 = -\frac{A_1}{D_1} - \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{D}_1} - \frac{A_1}{D_1} \cdot \frac{\tilde{A}_1}{\tilde{D}_1} \tag{24}$$

или, согласно (23),

$$U^2 = S^2 - P(P+2) \tag{25}$$

Формулы же (21) и (22) получают вид

$$\left(\frac{A}{D}\right)_{\text{мин}} = P + \sqrt{P(P+2)} \tag{26}$$

$$R_2 = \frac{S - \sqrt{P(P+2)}}{S + \sqrt{P(P+2)}} \tag{27}$$

Примечание. Согласно формуле (24), так как $U^2 \geqslant 0$ и $\tilde{D} = \frac{1}{\tilde{b}\,\tilde{b}^*} > 0$, то для любого покрытия

$$\tilde{A} \leqslant 0 \tag{28}$$

причем знак равенства имеет место только в случае отсутствия поглощения.

В формулах (26) и (27) S и P, согласно (23), зависят только от просветляемого покрытия K и от промежуточного слоя m. Более того, легко убедиться, что P не зависит от m. В самом деле,

$$P = \frac{b_1 b_1^* - a_1 a_1^* + \tilde{b}_1 \tilde{b}_1^* - \tilde{a}_1 \tilde{a}_1^*}{2} - 1;$$

при обращении направления падения света b_1 не изменяется, а a_1, согласно формуле (6), переходит в $-\tilde{a}_1{}^*$. Следовательно, P остается без изменения. Но слой m после обращения стал для первого подпокрытия исходной средой, а согласно теореме 2 замена исходной прозрачной среды на другую прозрачную среду не изменяет ни $\frac{A_1}{D_1}$, ни $\frac{\tilde{A}_1}{\tilde{D}_1}$. Следовательно, P тоже не изменяется при такой замене, что и требовалось показать.

Итак, мы нашли, что минимальное значение $\frac{A}{D}$ поглощающего покрытия, которое может быть достигнуто с помощью прозрачного просветляющего покрытия, лежащего между просветляемым покрытием и подложкой, зависит только от самого просветляемого покрытия. Для получения такого наилучшего просветления достаточно выбрать толщину промежуточного слоя m согласно (19), а коэффициент отражения просветляющего покрытия согласно (27).

Обратимся теперь к вычислению коэффициентов пропускания D и отражения R всего просветленного покрытия $ACKmTB$. Согласно (1) и (19), они определяются формулами

$$\frac{R}{D}=\frac{1}{D_2}\left[\frac{R_1}{D_1}+\frac{R_2}{\tilde{D}_1}-2\sqrt{\frac{R_1R_2}{D_1\tilde{D}_1}}\cos\left(\mu_1+\tilde{\nu}_1-\sigma\right)\right] \tag{29}$$

$$\frac{1}{D}=\frac{1}{D_2}\left[\frac{1}{D_1}+\frac{\tilde{R}_1R_2}{\tilde{D}_1}-2\sqrt{\frac{\tilde{R}_1R_2}{D_1\tilde{D}_1}}\cos\left(\tilde{\mu}_1+\nu_1-\sigma\right)\right] \tag{30}$$

где μ_1, $\tilde{\mu}_1$, ν_1 и $\tilde{\nu}_1$ суть фазы чисел a_1, $\tilde{a}_1$, b_1 и $\tilde{b}_1$. Таким образом, в отличие от $\left(\frac{A}{D}\right)_{\text{мин}}$ R и D зависят также от переднего покрытия C. Следовательно, выбирая T так, чтобы удовлетворялось условие (27), и слой m так, чтобы удовлетворялось условие (19), мы имеем еще свободу в выборе C, которую можно использовать для получения желаемых значений R и D.

Сделаем, наконец, еще одно замечание. При выводе условий просветления (19) и (22) мы предполагали, что $U\neq 0$. Если же $U=0$, то, очевидно, условие (19) отпадает в смысле условия, налагаемого на толщину промежуточного слоя, Формально мы можем, однако, сохранить (19), так как при $U=0$ фаза σ произвольна.* Минимум $\frac{A}{D}$ получается из (21) и (23) в виде

$$\left(\frac{A}{D}\right)_{\text{мин}}=P+S=\frac{A_1}{D_1} \tag{31}$$

тогда как (22) дает для этого минимума следующие условия:

$$R_2=0 \tag{32}$$

Смысл формулы (31) состоит, очевидно, в том, что покрытие K (как и CK) уже просветлено, т. е. для него нельзя более уменьшить значение $\frac{A}{D}$. Равенство $U=0$ является, таким образом, признаком просветленности.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Г. Кард, Новые рекуррентные формулы в теории многослойных оптических покрытий, Оптика и спектроскопия, 9, 1960, 95.
2. А. Г. Власов и др., Просветление оптики, Гостехиздат, 1946.
3. P. Kard, Mitmekihiliste optiliste katete teooria põhijooni, Loodus ja matemaatika (в печати).
4. П. Г. Кард, Аналитическая теория оптических свойств многослойных диэлектрических покрытий, Оптика и спектроскопия, 2, 1957, 236.
5. П. Г. Кард, Теория просветления металлических покрытий, Оптика и спектроскопия, 9, 1960, 250.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 9. XII 1959

* В формулах (29) и (30) σ в этом случае подлежит исключению с помощью (19).

NEELAVATE OPTILISTE KATETE TEOORIAST

P. Kard,
füüsikalis-matemaatiliste teaduste kandidaat

Resümee

Lähtudes Vlassovi valemite täiustatud kujust (1), tuletatud autori poolt artiklis [1], uuritakse käesolevas suuruste $bb^* - aa^*$ ja $\tilde{a}b - a\tilde{b}$ omadusi, kus $a = \frac{r}{d}$, $b = \frac{1}{d}$ ning r ja d on katte amplituudsed peegeldumise ja läbilaskvuse koefitsiendid. $\sim$ tähistab konjugeeritud katet, s. o. niisugust, milles kõikide keskkondade murdumisnäitajad on asendatud kaaskomplekssete väärtustega. On leitud, et eespool nimetatud suurused ei olene lähtekeskkonnast ega sellest katte osast, mis asub lähtekeskkonna ja esimese neelava kihi vahel, vaid olenevad ainult katte teisest osast, mis algab esimese neelava kihiga (viimane kaasa arvatud), ning tagakeskkonnast. Neid tulemusi on rakendatud neelavate optiliste katete selgendamise teoorias, kusjuures selgenduse all on mõeldud katte neelamiskoefitsiendi A ja läbilaskvuse koefitsiendi D suhte $\frac{A}{D}$ vähendamist. Selgendamiseks on otstarbekas kasutada kaht dielektrilist (mitteneelavat) lisakatet, millest üks asub selgendatava katte ees ning teine selle taga. Neist lisakatetest omab selgendamise seisukohalt peamist tähtsust tagumine. Selle esimese kihi paksuse ja ülejäänud osa peegeldumiskoefitsiendi sobiva valiku teel [valemid (19) ja (27)] saab teha suurust $bb^* - aa^* - 1 = \frac{A}{D}$ minimaalseks. Miinimumi väärtus oleneb ainult selgendatavast kattest. Eesmine lisakate ei mõjuta üldse $\frac{A}{D}$ väärtust, kuid tema tähtsus seisneb selles, et ta võimaldab kergemini realiseerida kogu selgendatud katte peegeldumise ja läbilaskvuse koefitsientide etteantud väärtusi.

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
9. XII 1959

ON THE THEORY OF THE ABSORBING OPTICAL COATINGS

P. Kard

Summary

By means of the improved Vlassov's formulae (1) introduced by the author in a previous paper [1] the behaviour of the quantities $bb^* - aa^*$ and $\tilde{a}b - a\tilde{b}$ is investigated. Here is $a = \frac{r}{d}$, $b = \frac{1}{d}$, and r, d are the amplitude reflectance and transmittance of the coating. The tilde denotes the conjugated coating, having the complex conjugated values of the refractive indices of all media. It is found that the above quantities depend neither on the medium of incidence nor on that part of the coating, which lies between the medium of incidence and the first absorbing layer. They depend only on the part of the coating beginning with the first absorbing layer (incl.), and on the backing medium. These results are applied to the theory of the improvement of the absorbing optical coatings. Here by the improvement is meant the reduction of the ratio $\frac{A}{D}$ of the coefficient of absorption, A, and the coefficient of transmission, D, of the coating. The improvement of a given absorbing coating may be performed by means of two additional nonabsorbing coatings. One of them, the most important one, lies behind the given coating. One can choose the thickness of the first layer of this back coating and the reflectance of its rest in such a way (s. formulae (19) and (27)) that the quantity $bb^* - aa^* - 1 = \frac{A}{D}$ arrives at a minimum. The value of this minimum depends only on the coating to be improved. The other additional coating lies before the given coating. It does not affect the value of $\frac{A}{D}$, but its purpose is to ensure the desired values of the reflectance and the transmittance of the whole improved coating.

Tartu State University

Received
Dec. 9th, 1959