EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. IX KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1960, NR. 3

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ IX
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1960, № 3

О НЕКОТОРЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ГИЛЬБЕРТА

Л. КИВИСТИК

1. Рассмотрим (в общем нелинейное) уравнение

$$P(x) = 0 \tag{1}$$

где $P(x)$ — дважды дифференцируемый* оператор из вещественного гильбертова пространства H в то же пространство. Заменим операторное уравнение (1) эквивалентным ему функциональным уравнением

$$F(x) = 0 \tag{2}$$

где $F(x) = \| P(x) \|^{\alpha}, \quad \frac{1}{2} < \alpha < \infty$ **.

Такую замену в случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ рассмотрел Альтман [1-3]. Для решения функционального уравнения (2) (в банаховом пространстве) Альтман [6] рекомендовал итерационные методы типа

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n) y_n} y_n \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

где y_n — элементы рассматриваемого пространства.

В нашем случае $F'(x) y = \alpha \| P(x) \|^{\alpha - 2} (P'(x) y,\ P(x))$ и (3) принимает вид

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|P(x_n)\|^2}{\alpha (P'(x_n) y_n,\ P(x_n))} y_n \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{4}$$

где $y_n \in H$, а x_0 — некоторое известное начальное приближение к решению уравнения (1). В зависимости от выбора последовательности элементов $\{y_n\}$ из (4) получаются разные итерационные методы. Мы рассмотрим здесь две возможности выбора элементов y_n: 1) $y_n = Q(x_n) \equiv \overline{P'(x_n)} P(x_n)$, где $\overline{P'(x)}$ — сопряженный к $P'(x)$ линейный оператор, и 2) $y_n = P(x_n)$. В первом случае получим класс методов

* Дифференцируемость понимается здесь и в дальнейшем в смысле Фреше.

** Для $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ предположения последующих теорем были бы противоречивы.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|P(x_n)\|^2}{\alpha \|Q(x_n)\|^2} Q(x_n) \tag{5}$$

рассмотренный при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ Альтманом [1-3]; во втором случае — класс методов

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|P(x_n)\|^2}{\alpha(P'(x_n)P(x_n),\ P(x_n))} P(x_n) \tag{6}$$

рассмотренный при $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$ в работах [1, 4, 7].

Отметим еще, что если выбрать $y_n = [P'(x_n)]^{-1} P(x_n)$ и $\alpha = 1$, то получим известный метод Ньютона.

2. Выведем некоторые соотношения и оценки, существенные для исследования сходимости рассматриваемых методов.

Для всех методов (4) (в том числе и для методов (5) и (6)) справедливо соотношение

$$(Q(x_n),\ x_{n+1} - x_n) = -\frac{1}{\alpha} \| P(x_n) \|^2 \tag{7}$$

Так как оператор $P(x)$ дважды дифференцируем, то, учитывая (7), получим

$$2(P(x_{n+1}),\ P(x_n)) =$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \|P(x_n)\|^2 + (P''(\bar{x}_n)\ (x_{n+1} - x_n)^2,\ P(x_n)) \tag{8}$$

где $\bar{x}_n = x_n + \tau_n(x_{n+1} - x_n)$, $0 \leqslant \tau_n \leqslant 1$. Так как

$$\|P(x_{n+1})\|^2 - 2(P(x_{n+1}),\ P(x_n)) + \|P(x_n)\|^2 = \|P(x_{n+1}) - P(x_n)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|P'(x'_n)(x_{n+1} - x_n)\|^2$$

где $x'_n = x_n + \tau'_n(x_{n+1} - x_n)$, $0 \leqslant \tau'_n \leqslant 1$, то в силу (4) и (8) получим оценку

$$\|P(x_{n+1})\|^2 \leqslant \Big[1 - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}(\|P'(x'_n)\|^2 +$$
$$+ \|P''(\bar{x}_n)\|\,\|P(x_n)\|)\frac{\|P(x_n)\|^2\,\|y_n\|^2}{(y_n,\ Q(x_n))^2}\Big] \|P(x_n)\|^2 \tag{9}$$

Учитывая, что оператор $Q(x) = \overline{P'(x)}\ P(x)$ дифференцируем, можно получить и другую оценку. Формула Тейлора для функционала $\|P(x)\|^2$ с остаточным членом в форме Лагранжа дает

$$\|P(x_{n+1})\|^2 = \|P(x_n)\|^2 + 2(Q(x_n),\ x_{n+1} - x_n) +$$
$$+ (Q'(x''_n)(x_{n+1} - x_n),\ x_{n+1} - x_n)$$

где $x''_n = x_n + \tau''_n(x_{n+1} - x_n)$, $0 \leqslant \tau''_n \leqslant 1$. Учитывая (7) и (4), получим

$$\|P(x_{n+1})\|^2 \leqslant \left(1 - \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\frac{\|Q'(x''_n)\|\,\|P(x_n)\|^2\|y_n\|^2}{(y_n,\ Q(x_n))^2}\right) \|P(x_n)\|^2 \tag{10}$$

3. Доказем о сходимости методов (5) следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° *для всех* $x \in S(x_0, r)$*, *где* $r = \frac{M\delta_0}{\alpha(1-q)}$, *имеют место оценки:*

а) $\|\overline{P'(x)}h\| \geqslant \frac{1}{M}\|h\|$ *для всех* $h \in H$ $(M > 0)$,

б) $\|P'(x)\| \leqslant A$, в) $\|P''(x)\| \leqslant B$;

3° $q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + M^2(A^2 + B\delta_0)} < 1$.

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S(x_0, r)$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *полученная методом* (5), *и справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{M}{\alpha(1-q)}\|P(x_n)\| \leqslant \frac{M\delta_0}{\alpha(1-q)} \cdot q^n \quad (11)$$

Доказательство. Покажем, что если x_0 заменить на x_1, то все условия 1°—3° по-прежнему выполнены. Учитывая условия 2° а) и 1°, получим из (5)

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{M}{\alpha}\|P(x_0)\| < r$$

т. е. $x_1 \in S(x_0, r)$. Поэтому, используя условия 2° и учитывая, что $y_n = Q(x_n)$, получим из (9)

$$\|P(x_1)\|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha^2}[\alpha^2 - 2\alpha + M^2(A^2 + B\delta_0)]\|P(x_0)\|^2$$

Это значит, что найдется постоянная δ_1, которая удовлетворяет условию 1° при x_1:

$$\|P(x_1)\| \leqslant \delta_1 \leqslant q\|P(x_0)\| \leqslant q\delta_0 < \delta_0$$

Условия 2° выполнены также для точки x_1, так как $S(x_1, r_1) \subset S(x_0, r)$, где $r_1 = \frac{M\delta_1}{\alpha(1-q_1)}$, $q_1 = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + M^2(A^2 + B\delta_1)} < q < 1$. Докажем, что $S(x_1, r_1) \subset S(x_0, r)$. Пусть $x \in S(x_1, r_1)$; тогда $\|x - x_0\| \leqslant \|x - x_1\| + \|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{M\delta_1}{\alpha(1-q_1)} + \frac{M\delta_0}{\alpha} \leqslant \frac{M\delta_0}{\alpha(1-q)} = r$, т. е. $x \in S(x_0, r)$ и, таким образом, $S(x_1, r_1) \subset S(x_0, r)$.

Итак, для x_1 выполнены условия 1° — 3° с заменой чисел δ_0, r, q на δ_1, r_1, q_1. Это позволяет продолжать последовательное определение элементов x_n. Вместе с тем получим при всех n

$$\|P(x_{n+1})\| \leqslant \delta_{n+1} \leqslant q_n\|P(x_n)\| \leqslant q^{n+1}\delta_0 \quad (12)$$

где $q_n = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + M^2(A^2 + B\delta_n)} < q_{n-1} \leqslant q < 1$ $(q_0 = q)$;

---

* Символом $S(x_0, r)$ обозначена сфера $\|x - x_0\| \leqslant r$.

$$x_{n+1} \in S(x_n, r_n) \subset S(x_0, r) \tag{13}$$

где $r_n = \dfrac{M\delta_n}{\alpha(1-q_n)}$;

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant \frac{M}{\alpha} \| P(x_n) \| \tag{14}$$

Поэтому в силу (14) и (12)

$$\| x_{n+p} - x_n \| \leqslant \| x_{n+p} - x_{n+p-1} \| + \ldots + \| x_{n+2} - x_{n+1} \| + \| x_{n+1} - x_n \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M}{\alpha} (\| P(x_{n+p-1}) \| + \ldots + \| P(x_{n+1}) \| + \| P(x_n) \|) \leqslant \frac{M}{\alpha} \| P(x_n) \| (q_n^{p-1} + \ldots$$
$$\ldots + q_n + 1) = \frac{M(1-q_n^p)}{\alpha(1-q_n)} \| P(x_n) \| < \frac{M}{\alpha(1-q)} \| P(x_n) \| \leqslant \frac{M\delta_0}{\alpha(1-q)} q^n.$$

Это доказывает существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^* \in H$. Переходя к пределу при $p \to \infty$, получим (11), откуда одновременно видно, что $x^* \in S(x_0, r)$. Так как оператор $P(x)$ непрерывен в $S(x_0, r)$, то $\|P(x^*)\| = \lim \|P(x_n)\| \leqslant \delta_0 \lim q^n = 0$, или $P(x^*) = 0$, т. е. x^* является решением уравнения (1).

Теорема доказана.

4. Если учитывать вместо (9) оценку (10), то можно аналогичным образом доказать следующую теорему:

Теорема 1а. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \delta_0$;

2° *для всех* $x \in S(x_0, r)$, *где* $r = \dfrac{M\delta_0}{\alpha(1-q)}$, *имеют место оценки:*

а) $\|\overline{P'(x)}h\| \geqslant \dfrac{1}{M} \|h\|$ *для всех* $h \in H$ $(M > 0)$,

б) $\|Q'(x)\| \leqslant K$;

3° $q = \dfrac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + M^2 K} < 1$.

Тогда имеют место утверждения теоремы 1.

Примечание 1. Если в теоремах 1 и 1а условие 2°а) заменить более строгим условием

$$|(P'(x)h, h)| \geqslant \frac{1}{M} \|h\|^2 \text{ для всех } h \in H \ (M > 0) \tag{15}$$

(не изменяя других условий), то утверждения теорем остаются в силе, но оценку (11) можно заменить более точной:

$$\|x^* - x_n\| \leqslant M \|P(x_n)\| \leqslant M\delta_0 q^n \tag{16}$$

Действительно, из (15) вытекает 2°а). С другой стороны, учитывая (13), (15) и то, что $x^* \in S(x_0, r)$, получим

$$\|P(x_n)\| \, \|x^* - x_n\| \geqslant |(P(x^*) - P(x_n),\ x^* - x_n)| =$$
$$= |(P'(\bar{x})(x^* - x_n),\ x^* - x_n)| \geqslant \frac{1}{M} \|x^* - x_n\|^2$$

где $\bar{x} = x_n + \tau (x^* - x_n)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. Из последних неравенств следует (16).

5. Учитывая примечание 1, можно аналогично доказательству теоремы 1 доказать следующие теоремы о сходимости методов (6) (которые справедливы и для методов (5)):

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *за исключением* 2°а), *которое заменено условием* (15). *Тогда уравнение* (1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant M\|P(x_0)\|$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *полученная методом* (6) (*или методом* (5)), *и справедлива оценка* (16).

Теорема 2а. *Пусть выполнены условия теоремы* 1а, *за исключением* 2°а), *которое заменено условием* (15). *Тогда имеют место утверждения теоремы* 2.

Примечание 2. В условиях теорем 2 и 2а уравнение (1) имеет в сфере $S(x_0, r)$ единственное решение. Это непосредственное следствие из теоремы 8 статьи [7].

6. Легко проверить, что из условий 2°* теорем 1 и 2 следует неравенство $M^2(A^2 + B\delta_0) \geqslant 1$.

Пусть x^* — решение уравнения (1), находящееся в сфере $S(x_0, r)$. Тогда имеет место равенство

$$Q'(x^*) = \overline{P'(x^*)}\, P'(x^*) \tag{17}$$

Так как $x^* \in S(x_0, r)$, то в силу (17) и условия 2° теорем 1а, 2а $\|P'(x^*)\|^2 = \|Q'(x^*)\| \leqslant K$ и $M^2K \geqslant 1$.

Условие 3° теорем 1—2а равносильно условию

$$c < 2\alpha, \tag{18}$$

где

$$1 \leqslant c = \begin{cases} M^2(A^2 + B\delta_0) & \text{для теорем 1 и 2} \\ M^2K & \text{для теорем 1а и 2а} \end{cases} \tag{19}$$

Радиус r сферы $S(x_0, r)$ в условии 2° этих теорем является функцией от α:

$$r = r(\alpha) = \frac{M\delta_0}{\alpha(1-q)} = \frac{M\delta_0}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + c}} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + c}}{2\alpha - c}\, M\delta_0$$

которая уменьшается с возрастанием α (если $c > 1$) и значения которой становятся сколь угодно близкими к $M\delta_0$, если только α становится достаточно большой по сравнению с c (если $c = 1$, то при $\alpha \geqslant 1$

---

* Условиями 2° теорем 2 и 2а считаем соответственно условия 2° теорем 1 и 1а, где 2°а) заменено условием (15); условия 1° и 3° этих теорем — это соответственно условия 1° и 3° теорем 1 и 1а.

$r = M\delta_0$). Следовательно, подходящим выбором α всегда можно достичь выполнения неравенств (18) и $r(\alpha) \leqslant R$, где $R > M\delta_0$. Итак, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Если существуют такие постоянные M, A и B (соответственно M и K), что все неравенства в условии 2° теорем 1 и 2 (соответственно теорем 1а и 2а) выполнены для всех x из некоторой сферы $S(x_0, R)$, где $R > M\delta_0$, то всегда найдется вещественное число $\bar{\alpha}$, при котором имеют место утверждения теорем 1 и 2 (соответственно 1а и 2а), если только в формулах (5) и (6) положить $\alpha \geqslant \bar{\alpha}$.*

Примечание 3. Априорная оценка погрешности в теоремах 1—2а обеспечивает сходимость методов (5) и (6) с быстротой геометрической прогрессии. При этом минимальным значением знаменателя прогрессии для данной c является

$$q_{\min} = \sqrt{1 - \frac{1}{c}}$$

которое достигается при $\alpha = c$.

Примечание 4. В предыдущих теоремах желательнее пользоваться апостериорными оценками. Но так как вычисление $\|P(x_n)\|$ требует лишней работы, а $\|P(x_n)\| \leqslant q\|P(x_{n-1})\|$, причем $\|P(x_{n-1})\|$ уже вычислена при нахождении x_n, то можно пользоваться и (менее точными) оценками

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{Mq}{\alpha(1-q)} \|P(x_{n-1})\| \quad \text{в теоремах 1, 1а}$$

$$\|x^* - x_n\| \leqslant Mq\|P(x_{n-1})\| \quad \text{в теоремах 2, 2а}$$

Примечание 5. Если условие 3° теорем 1—2а заменить более строгим условием, то оценки 2°а), б), в) можно находить в меньшей области, чем в теоремах 1—2а. Теореме 2, например, соответствует тогда следующая теорема:

Теорема 2_1. *Пусть выполнены условия:*

1° $\quad \|x_1 - x_0\| = \dfrac{\|P(x_0)\|^3}{\alpha\,|(P'(x_0)\,P(x_0),\, P(x_0))|} \leqslant \eta_0;$

2° $\quad$ *для всех $x \in S(x_0, r)$, где $r = \dfrac{\eta_0}{1-q}$, имеют место оценки:*

а) $|(P'(x)h, h)| \geqslant \dfrac{1}{M}\|h\|^2$ *для всех* $h \in H$ $(M > 0)$,

б) $\|P'(x)\| \leqslant A$, $\quad$ в) $\|P''(x)\| \leqslant B$;

3° $\quad q < 1$, *где* $q = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + M^2(A^2 + AB\alpha\eta_0)}, & \text{если } \alpha \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{\alpha}\sqrt{(\alpha-1)^2M^2A^2 + M^2AB\alpha\eta_0}, & \text{если } \alpha > 2. \end{cases}$

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере $\|x - x_0\| \leqslant M\|P(x_0)\|$ решение x^*, к которому сходится последовательность $\{x_n\}$, полученная методом* (5) *или методом* (6), *и справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant M\|P(x_n)\| \leqslant \alpha\eta_0 q^n$$

Если $\alpha \leqslant 2$, то теорема 2_1 может дать лучшие результаты, чем теорема 2. Но если $\alpha > 2$, то условие 3° теоремы 2_1 значительно строже условия 3° теоремы 2. В самом деле, если условие 3° теоремы 2 равносильно требованию $M^2(A^2 + B\delta_0) < 2\alpha$, то условие 3° теоремы 2_1 в случае $\alpha > 2$ требует, чтобы было $M^2(A^2 + B\delta_0) \leqslant M^2(A^2 + AB\alpha\eta_0) < \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^2 < 4$. Это значит, что в данном случае теорема 3 недействительна.

Теорему 2_1 можно доказать аналогично теоремам 1—2а, нужно только иметь в виду, что теперь справедливо неравенство $\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leqslant \leqslant q\|x_{n+1} - x_n\| \quad (n = 0, 1, \ldots)$.

В частном случае $\alpha = 2$ эта теорема совпадает с результатом Альтмана о сходимости метода (6) (см. [4], теорема 2). В приведенной здесь теореме уточнена оценка погрешности и имеются другие несущественные различия.

Можно доказать и теоремы, соответствующие теоремам 1, 1а, 2а (в том же самом смысле, как теорема 2_1 соответствует теореме 2) и дающие в частном случае $\alpha = 2$ результаты, полученные Альтманом [3, 4] для методов (5) и (6) (где $\alpha = 2$). Мы этих теорем не приводим, так как в случае $\alpha > 2$ они страдают тем же недостатком, что и теорема 2_1.

7. П р и м е ч а н и е 6. Как уже отмечено (см. [7], стр. 145, подстрочное примечание), предположения теорем 2 и 4 статьи [1] противоречивы. Из сказанного в начале пункта 6 следует, что противоречивы и условия теорем 1 и 3 той же статьи. Вместе с тем из теорем 1—2а и 2_1 данной статьи видно, что для устранения противоречий можно в [1] условие 1° теоремы 1 заменить условием $B^2K < 2$ и условие 5° теоремы 2 условием $B^2(E^2 + KD) < 2$, изменяя соответственно и постоянные r и α в этих теоремах.

П р и м е ч а н и е 7. На основе теоремы 2 статьи [2] и на основе статьи [5] можно предположить, что при $\alpha = 2$ для методов (5) и (6) найдены эффективные условия, при которых сходимость этих методов второго порядка. Но оказывается, что это не так. Докажем это.

Допустим, что условие 3° теоремы 2 в [2] выполнено, т. е. $2h_0 \leqslant 1$. Тогда из доказательства теоремы 1 той же статьи [2] следует (так как теорема 2 — следствие из теоремы 1), что $2h_n \leqslant 2h_0 \leqslant 1$; значит и $\lim\limits_{n\to\infty} 2h_n \leqslant 1$. Так как $x^* \in S(x_0, r)$, то из условия 2° теоремы 2 в [2] и из равенства (17) настоящей работы получим $K \geqslant \| Q'(x^*) \| = \| P'(x^*) \|^2$. Но это значит, что $\lim 2h_n \geqslant \lim \dfrac{K\|P(x_n)\|^2}{\|Q(x_n)\|^2} \geqslant \lim \dfrac{K}{\|P'(x_n)\|^2} \geqslant 1$.
Таким образом, в случае $2h_0 < 1$ мы получили противоречие, и возможен только случай $2h_0 = 1$. Но тогда оценка погрешности этой теоремы не обеспечивает сходимости второго порядка.

Условия обеих теорем статьи [5] тоже противоречивы. В самом деле, если предполагать, что условие (5) этой статьи $\left(h_0 = B_0K\eta_0 \leqslant \frac{1}{2}\right)$ выполнено, то из доказательства теоремы 1 в [5] следует, что $h_n \leqslant h_0 \leqslant \frac{1}{2}$. Но в силу условий той же теоремы $h_n = B_nK\eta_n \geqslant \dfrac{K\|P(x_n)\|^3}{2\,(P'(x_n)\,P(x_n), P(x_n))^2} \geqslant \dfrac{K}{2\|P'(x_n)\|^2\ \|P(x_n)\|} \to \infty$ при $n \to \infty$, что противоречит требованию (5) из [5]. Отметим, что неравенство (6) этой теоремы также не имеет места, но можно обойтись и без этого требования.

На одно противоречие теоремы 2 статьи [5] обратил внимание Вайнберг (см. РЖМат. 1958, 7929, примечание референта). Сверх того противоречиво и условие (5), выполнение которого требуется в той же теореме.

8. Если условие 2°а) теорем 1—2а заменить (легче проверяемым) условием

$$\|\overline{P'(x_0)}\,h\| \geqslant \frac{1}{M_0}\,\|h\| \text{ для всех } h \in H \ \ (M_0 > 0)$$

или соответственно

$$|(P'(x_0)\,h,\ h)| \geqslant \frac{1}{M_0}\,\|h\|^2 \text{ для всех } h \in H \ \ (M_0 > 0) \tag{20}$$

то имеют место следующие теоремы, доказательство которых можно провести аналогично доказательству теоремы 3 в [7]:

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| = \delta_0 \leqslant \bar{\delta}_0$;

2° $\|\overline{P'(x_0)}\,h\| \geqslant \frac{1}{M_0}\,\|h\|$ *для всех* $h \in H$ $(M_0 > 0)$;

3° *для всех* $x \in S(x_0, r)$, *где* $r = \frac{1}{B}\left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{M^*}\right)\frac{\delta_0}{\bar{\delta}_0}$, *имеют место оценки*

$$\|P'(x)\| \leqslant A, \ \|P''(x)\| \leqslant B;$$

4° *величины* M_0, $\bar{\delta}_0$, A *и* B *такие, что последовательности* $\{M_n\}$ *и* $\{\bar{\delta}_n\}$, *вычисленные из рекуррентных соотношений*

$$M_{n+1} = \frac{M_n}{1 - \frac{1}{\alpha} M_n^2 B \bar{\delta}_n},$$

$$\bar{\delta}_{n+1} = \bar{\delta}_n \cdot \frac{1}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + M_n^2 (A^2 + B\bar{\delta}_n)},$$

сходятся (так что $\frac{1}{\alpha} M_n^2 B \bar{\delta}_n < 1$ *для всех* n*).*

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S(x_0, r)$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *полученная методом* (5), *и справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{B}\left(\frac{1}{M_n} - \frac{1}{M^*}\right)\frac{\delta_n}{\bar{\delta}_n} \leqslant \frac{1}{B}\left(\frac{1}{M_n} - \frac{A}{\sqrt{2\alpha}}\right)\frac{\delta_n}{\bar{\delta}_n},$$

где $M^* = \lim\limits_{n\to\infty} M_n$ *и* $\delta_n = \|P(x_n)\|$.

Теорема 4а. *Пусть выполнены условия:*

1° $\|P(x_0)\| = \delta_0 \leqslant \bar{\delta}_0$;

2° $\|\overline{P'(x_0)}\,h\| \geqslant \frac{1}{M_0}\,\|h\|$ *для всех* $h \in H$ $(M_0 > 0)$;

3° *для всех* $x \in S(x_0, r)$, *где* $r = \frac{1}{B}\left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{M^*}\right)\frac{\delta_0}{\bar{\delta}_0}$, *имеют место оценки*

$$\| P''(x) \| \leqslant B, \ \| Q'(x) \| \leqslant K;$$

4° *величины* M_0, $\bar{\delta}_0$, B *и* K *такие, что последовательности* $\{M_n\}$ и $\{\bar{\delta}_n\}$, *вычисленные из рекуррентных соотношений*

$$M_{n+1} = \frac{M_n}{1 - \frac{1}{\alpha} M_n^2 B \bar{\delta}_n},$$

$$\bar{\delta}_{n+1} = \bar{\delta}_n \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + M_n^2 K},$$

сходятся (так что $\frac{1}{\alpha} M_n^2 B \bar{\delta}_n < 1$ *для всех* n).

Тогда уравнение (1) *имеет в сфере* $S(x_0, r)$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *полученная методом* (5), *и справедлива оценка*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{1}{B}\left(\frac{1}{M_n} - \frac{1}{M^*}\right)\frac{\delta_n}{\bar{\delta}_n} \leqslant \frac{1}{B}\left(\frac{1}{M_n} - \sqrt{\frac{K}{2\alpha}}\right)\frac{\delta_n}{\bar{\delta}_n},$$

где $M^* = \lim M_n$ и $\delta_n = \| P(x_n) \|$.

Примечание 8. Условие 2° теорем 4 и 4а обеспечивает существование правого обратного оператора по отношению к $P'(x_0)$. Пусть кроме того,

$$\| P'(x_0) h \| \geqslant \frac{1}{M_0} \|h\| \text{ для всех } h \in H$$

Тогда существует и левый обратный оператор и имеет место оценка $\| [P'(x_0)]^{-1} \| \leqslant M_0$. Те же неравенства остаются в силе для x_n, если M_0 заменить на M_n.

Теперь можно в теоремах 4 и 4а формулы для оценки погрешностей заменить более удобной формулой

$$\| x^* - x_n \| \leqslant \frac{2 M_n \delta_n}{1 + \sqrt{1 - 2 M_n^2 B \delta_n}} < 2 M_n \delta_n \tag{21}$$

В самом деле, используя формулу Тейлора

$$(P(x^*), h) = (P(x_n) + P'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2} P''(\bar{x}_n)(x^* - x_n)^2, h)$$

в случае $h = \overline{[P'(x_n)]^{-1}(x^* - x_n)}$, получим

$$\frac{1}{2} M_n B \| x^* - x_n \|^2 - \| x^* - x_n \| + M_n \delta_n \geqslant 0$$

откуда и следует (21) (если только $2M_n^2 B \delta_n < 1$).

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4, *за исключением* 2°, *которое заменено условием* (20). *Тогда уравнение* (1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant M^* \delta_0$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность*

$\{x_n\}$, *полученная методом* (5) *или методом* (6), *и имеет место оценка*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant M^* \delta_n \leqslant \frac{\sqrt{2\alpha}}{A}\, \delta_n$$

где $M^* = \lim M_n$ *и* $\delta_n = \| P(x_n) \|$.

Теорема 5а. *Пусть выполнены условия теоремы* 4а, *за исключением* 2°, *которое заменено условием* (20). *Тогда уравнение* (1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant M^* \delta_0$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *полученная методом* (5) *или методом* (6), *и имеет место оценка*

$$\| x^* - x_n \| \leqslant M^* \delta_n \leqslant \sqrt{\frac{2\alpha}{K}}\, \delta_n$$

где $M^* = \lim M_n$ *и* $\delta_n = \| P(x_n) \|$.

9. Рассмотрим теперь еще более общие методы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|P(x_n)\|^2}{\alpha_n \|Q(x_n)\|^2}\, Q(x_n) \tag{5a}$$

и

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\|P(x_n)\|^2}{\alpha_n (P'(x_n)\, P(x_n), P(x_n))} P(x_n), \tag{6a}$$

где $\frac{1}{2} < \alpha_n < \infty$. Пусть

$$\alpha = \inf_n \alpha_n \tag{22}$$

$$\beta = \sup_n \alpha_n < \infty$$

и

$$q = \max \left\{ \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + c},\ \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 - 2\beta + c} \right\} \tag{23}$$

Если, в частности, $\alpha_n \leqslant c$ для всех n, то $q = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + c}$, но если $\alpha_n \geqslant c$ $(n = 0, 1, \ldots)$, то $q = \frac{1}{\beta} \sqrt{\beta^2 - 2\beta + c}$.

Легко убедиться, что теоремы 1—2а остаются в силе, если методы (5) и (6) заменить в них соответственно методами (5а) и (6а), а постоянные α и q определить формулами (22) и (23), где c определено формулой (19).

10. Выберем в формулах (5а) и (6а) числа α_n так, что для всех n

$$M_n^2 B \bar{\delta}_n < \alpha_n$$

$$M_n^2 A^2 + M_n^2 B \bar{\delta}_n < 2\alpha_n \tag{24}$$

где M_n, $\bar{\delta}_n$ вычислены из рекуррентных соотношений

$$M_{k+1} = \frac{M_k}{1 - \frac{1}{\alpha_k} M_k^2 B \bar{\delta}_k},$$

$$\bar{\delta}_{k+1} = \bar{\delta}_k \cdot \frac{1}{\alpha_k} \sqrt{\alpha_k^2 - 2\alpha_k + M_k^2 (A^2 + B\bar{\delta}_k)} \tag{25}$$

Если окажется возможным конструировать последовательность $\{\alpha_n\}$ так, что $\sup\limits_n \alpha_n < +\infty$, то последовательности $\{M_n\}$ и $\{\bar{\delta}_n\}$ сходятся и имеет место теорема, аналогичная теореме 5:

Теорема 6. *Если выполнены условия* 1°, 3° *теоремы* 4, *условие* (20) *и существует такая последовательность вещественных чисел* $\{\alpha_n\}$, *что* $\sup\limits_n \alpha_n = \beta < \infty$ *и имеют место неравенства* (24), *где* M_n *и* $\bar{\delta}_n$ *вычислены из рекуррентных соотношений* (25), *то уравнение* (1) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant M^* \delta_0$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *полученная методом* (5a) *или методом* (6a), *и справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant M^* \delta_n \leqslant \frac{\sqrt{2\beta}}{A} \delta_n$$

где $M^* = \lim M_n$ *и* $\delta_n = \|P(x_n)\|$.

Легко убедиться, что для методов (5a) и (6a) имеют место также теоремы, аналогичные теоремам 4, 4a и 5a.

11. Рассмотренные методы применимы, в частности, и для решения линейного уравнения

$$P(x) \equiv Lx - y = 0 \tag{26}$$

где y — заданный элемент пространства H. При этом полученные результаты упрощаются, потому что $P'(x) = L$ и $P''(x) = 0$. Так как теперь $\|Q'(x)\| = \|\bar{L}L\| = \|L\|^2$, то теорема 1 и 1a (а также теоремы 2 и 2a) совпадают. Мы получим из теорем 1—2a следующие две теоремы:

Теорема 1б. *Если линейный ограниченный оператор* L *удовлетворяет условиям:*

1° $\quad \|\bar{L}h\| \geqslant \frac{1}{M} \|h\|$ *для всех* $h \in H \qquad (M > 0)$,

2° $\quad q = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + M^2 \|L\|^2} < 1$,

то уравнение (26) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant M \|P(x_0)\|$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *полученная методом* (5) (*исходя из произвольно выбранной точки* x_0), *и имеет место оценка*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{M}{1-q} \|P(x_n)\| \leqslant \frac{M \|P(x_0)\|}{1-q} q^n.$$

Теорема 2б. *Если линейный ограниченный оператор* L *удовлетворяет условиям:*

1° $|(Lh, h)| \geqslant \frac{1}{M} \|h\|^2$ *для всех* $h \in H$ $(M > 0)$,

2° $q = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + M^2 \|L\|^2} < 1$,

то уравнение (26) *имеет в сфере* $\|x - x_0\| \leqslant M \|P(x_0)\|$ *решение* x^*, *к которому сходится последовательность* $\{x_n\}$, *полученная методом* (5) *или методом* (6) (*исходя из произвольно выбранной точки* x_0), *и имеет место оценка*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant M \|P(x_n)\| \leqslant M \|P(x_0)\| q^n.$$

В случае линейного уравнения остальные теоремы не дают ничего нового по сравнению с теоремами 1—2а, но результаты методов (5а) и (6а), упомянутые в пункте 9, остаются в силе.

Если $\alpha = 2$, то теоремы 1б и 2б дают соответствующие теоремы из [3] и [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. M. Altman, Connection Between the Method of Steepest Descent and Newton's Method, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, No. 11, 1957, 1031—1036.
2. M. Altman, Concerning Approximate Solutions of Non-Linear Functional Equations, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, No. 5, 1957, 461—465.
3. M. Altman, On the Approximate Solutions of Operator Equations in Hilbert Space, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, No. 6, 1957, 605—609.
4. M. Altman, Concerning the Approximate Solutions of Operator Equations in Hilbert Space, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, No. 7, 1957, 711—715.
5. M. Altman, A Note of Approximate Solutions of Non-Linear Operator Equations in Hilbert Space, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, No. 8, 1957, 783—787.
6. M. Altman, On the Approximate Solutions of Non-Linear Functional Equations, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5, No. 5, 1957, 457—460.
7. Л. Кивистик, О методе наискорейшего спуска для решения нелинейных уравнений, Изв. АН ЭССР. Серия физ.-мат. и техн. наук, т. IX, № 2, 1960, 145—159.

Институт энергетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
2. XI 1959

MÕNEDEST ITERATSIOONIMEETODITEST OPERAATORVÕRRANDITE LAHENDAMISEKS HILBERTI RUUMIS

L. Kivistik

Resümee

Artiklis käsitletakse operaatorvõrrandi $P(x) = 0$ ligikaudset lahendamist iteratsioonimeetoditega (5), (6), (5a), (6a) ja antakse nende meetodite koonduvuseks piisavad tingimused. Erijuhuna vaadeldakse lineaarset võrrandit (punkt 11), mille puhul üldised tulemused lihtsustuvad.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Energeetika Instituut

Saabus toimetusse
2. XI 1959

ON SOME ITERATIVE METHODS FOR SOLVING OPERATOR EQUATIONS IN HILBERT SPACE

L. Kivistik

Summary

Let $P(x)=0$ be a linear or non-linear operator equation in Hilbert space. For solving this equation the present paper considers the following methods

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\|P(x_n)\|^2}{\alpha_n(P'(x_n)P(x_n),\ P(x_n))}P(x_n)$$

and

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\|P(x_n)\|^2}{\alpha_n\|Q(x_n)\|^2}Q(x_n),$$

where $Q(x)=\overline{P'(x)}P(x)$ (the linear operator $\overline{P'(x)}$ is adjoint of $P'(x)$) and α_n ($n=0, 1, \ldots$) are real numbers such that $\frac{1}{2}<\alpha_n<\infty$.

The convergence of these methods is proved under several assumptions. The particular case $\alpha_n=\alpha$ ($n=0, 1, \ldots$) is especially considered.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Energetics

Received
Nov. 2nd, 1959