

А. ЭПШТЕЙН

### ИСКРИВЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ КРУГЛОЙ СТРУИ В СВОБОДНОМ ПОПЕРЕЧНОМ ПОТОКЕ \*

В настоящее время известен ряд попыток аналитического решения задачи об искривлении струи, подаваемой в свободный равномерный поперечный поток под определенным начальным углом  $\alpha_0$ . Очевидно, что траектория такой струи в потоке определяется при прочих равных условиях выходными параметрами струи — скоростью  $V$ , плотностью  $\rho_V$ , абсолютной температурой  $T_V$ , диаметром  $D_0$  и углом выхода  $\alpha_0$ ; кроме того, параметрами потока — скоростью  $W$ , плотностью  $\rho_W$  и абсолютной температурой  $T_W$ .

Значения этих параметров определяют, в общем случае, относительные влияния начального импульса струи и гравитационной (архимедовой) силы на развитие струи. В свою очередь влияние гравитационной силы зависит также от ориентации поперечного потока в пространстве. В настоящей работе рассматривается истечение струи в горизонтальный поперечный поток.

Предложенные до сих пор аналитические решения задачи о траектории струи в поперечном потоке можно разделить на две основные группы.

К первой группе относятся решения кинематического характера [1–3], в которых приходится заранее задаваться законом изменения вертикальной составляющей скорости струи. Эта зависимость принимается, как правило, такой же, как у свободной струи, что находится в противоречии с имеющимися экспериментальными данными [4]. Более обоснованным представляется другой подход к решению данной задачи, при котором за основу берется рассмотрение динамики явления [5–8].

Все аналитические решения неизбежно содержат один или более эмпирических коэффициентов, которые могут быть определены только из экспериментов со струями. По моему мнению, экспериментальные данные, относящиеся к свободной струе, для этой цели едва ли пригодны. Поэтому аналитическое решение, по крайней мере при нынешнем состоянии вопроса, должно быть тесно связано с экспериментальным изучением развития струи в поперечном потоке.

Удачная схема решения этой задачи использована в работе [5]. Однако в этом решении, так же как и в [6, 7], не учитывается влияние гравитационной силы на изгибание струи.

Настоящую работу можно рассматривать как дальнейшее развитие аналитического метода, использованного в работе [5].

\* Работа выполнена в секторе теплофизики Института термофизики и электрофизики АН ЭССР под руководством доктора технических наук Ю. Иванова.

### Теоретическая схема

В основе настоящего решения лежит подтвержденное экспериментально [9, 10] положение, согласно которому обтекание струи поперечным потоком можно рассматривать аналогично обтеканию твердого тела соответствующей формы. При этом пренебрегаем кривизной струи в плоскости симметрии по сравнению с толщиной струи, а также заменяем действительные распределения скорости, плотности и абсолютной температуры в поперечных сечениях струи некоторыми постоянными по сечению средними значениями этих параметров.

На элементарный участок струи толщиной  $dl$  (рис. 1а) действуют следующие силы:

1) сила аэродинамического давления поперечного потока, которую считаем пропорциональной нормальной к оси элемента составляющей скоростного напора поперечного потока

$$dP = c_n \frac{\rho_w (W \sin \alpha_0)^2}{2} b dl, \quad (1)$$

где  $b$  — ширина струи,  $c_n$  — коэффициент сопротивления;

2) гравитационная сила, действующая по вертикали,

$$dR = g \Delta \rho F dl, \quad (2)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения элемента,  $\Delta \rho = \rho_v - \rho_w$  — текущая разность плотностей струи и окружающей среды,  $g$  — ускорение силы тяжести. Действием сил вязкого и турбулентного трения пренебрегаем.

Согласно принципу Д'Аламбера, действие указанных двух сил на элемент, движущийся по криволинейной траектории, уравновешивается действием центробежной силы

$$dC = \frac{\rho_v v^2}{r} F dl, \quad (3)$$

где  $v$  и  $\rho_v$  — средняя текущая скорость и плотность струи соответственно,  $r$  — текущий радиус кривизны оси струи.

Условие равновесия элемента в проекции на нормаль к оси струи запишется в следующем виде:

$$dC = -dP + dR \cos \alpha \quad (4)$$

или с учетом (1) — (3)

$$\rho_v v^2 F = -\frac{c_n}{2} \rho_w W^2 b r \sin^2 \alpha + g \Delta \rho F r \cos \alpha. \quad (5)$$

С целью дальнейших преобразований уравнения (5) примем ряд допущений.

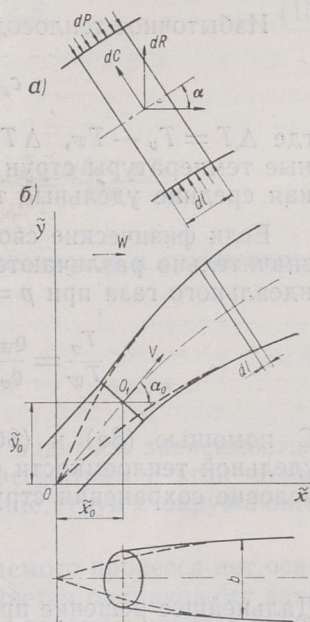


Рис. 1. Схема струи в поперечном потоке.

Составляющую количества движения струи, перпендикулярную направлению поперечного потока, полагаем изменяющейся только под действием гравитационной силы:

$$\rho_v v^2 F \sin \alpha = \rho_v V^2 F_0 \sin \alpha_0 + \int_0^l g \Delta \rho F dl, \quad (6)$$

где  $F_0$  — начальная площадь поперечного сечения струи. При этом предполагается равенство статического давления в струе и в невозмущенном потоке.

Избыточное теплосодержание струи считаем постоянным:

$$c_{pv} \rho_v F v \Delta T = c_{pV} \rho_v F_0 V \Delta T_0, \quad (7)$$

где  $\Delta T = T_v - T_w$ ,  $\Delta T_0 = T_V - T_W$  — текущая и начальная избыточные температуры струи соответственно;  $c_{pv}$  и  $c_{pV}$  — текущая и начальная средние удельные теплоемкости струи (при  $p = \text{const}$ ).

Если физические свойства вещества струи и окружающей среды незначительно различаются между собой, то из уравнения состояния для идеального газа при  $p = \text{const}$  будем иметь

$$\frac{T_v}{T_w} = \frac{\rho_w}{\rho_v} \quad (8a) \quad \text{и} \quad \frac{T_V}{T_W} = \frac{\rho_W}{\rho_V}. \quad (8b)$$

С помощью (8a) и (8b) и пренебрегая незначительным изменением удельной теплоемкости с температурой ( $c_{pv} \simeq c_{pV}$ ), получим вместо (7) условие сохранения струей постоянной плавучести:

$$\Delta \rho F v = \Delta \rho_0 F_0 V. \quad (9)$$

Дальнейшее решение пригодно и для изотермической струи с начальной плотностью, отличной от плотности окружающей среды. В этом случае за исходное допущение следует принять условие (9).

Наконец, предполагаем отсутствие относительного движения струи в горизонтальном направлении, т. е.

$$v_x = W, \quad (10)$$

что подтверждается экспериментальными данными [4] уже на относительно небольшом расстоянии от источника.

Используя (6), (9) и (10) и учитывая, что

$$r = \frac{(1 + y'^2)^{1,5}}{y''} \quad (11)$$

$$\sin \alpha = \frac{y'}{(1 + y'^2)^{0,5}} \quad (12a)$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{(1 + y'^2)^{0,5}} \quad (12b)$$

$$\frac{dl}{v} = \frac{dx}{v_x}, \quad (13)$$

преобразуем (5) к следующему виду:

$$\varrho_V V^2 F_0 \sin \alpha_0 + g \Delta \varrho_0 F_0 \frac{V}{W} x = -\frac{c_n}{2} \varrho_W W^2 b \frac{y'^3}{y''} + g \Delta \varrho_0 F_0 \frac{V}{W} \frac{y'}{y''}. \quad (14)$$

Введя безразмерные переменные  $\tilde{x} = x/D_0$  и  $\tilde{y} = y/D_0$ , а также  $\tilde{b} = b/D_0$  и имея в виду, что  $F_0 = \frac{\pi D_0^2}{4}$ , получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси струи в виде

$$\frac{J}{\tilde{y}'^2} - (I \sin \alpha_0 + J \tilde{x}) \frac{\tilde{y}''}{\tilde{y}'^3} = \frac{2}{\pi} c_n \tilde{b}. \quad (15)$$

Безразмерные комплексы

$$I = \frac{\varrho_V V^2}{\varrho_W W^2} = \frac{T_W V^2}{T_V W^2} \quad \text{и} \quad J = \frac{g D_0 V \Delta \varrho_0}{W^3 \varrho_W} = \frac{g D_0 V \Delta T_0}{W^3 T_V}$$

отражают относительные влияния начального импульса и гравитационной силы соответственно.

### О перемешивании струи

Чтобы решить уравнение (15), необходимо задаться зависимостью, определяющей изменение ширины струи  $b$ . Рассмотрим с этой целью основные факторы, определяющие перемешивание струи с окружающей средой.

Ввиду чрезвычайной сложности рассматриваемого процесса нет основания думать, что перемешивание струи подчиняется одинаковому закону на всем своем протяжении. В нашем анализе рассматривается основной участок струи, характеризующийся отсутствием относительного движения струи по горизонтали [условие (10)]. Начальный (с ядром постоянной скорости) и переходный участки, где еще происходит относительное движение по горизонтали, сравнительно невелики по своему протяжению и ими будем пренебрегать. Одним из факторов, определяющих перемешивание струи, является, очевидно, ее движение относительно окружающей среды, которое на основном участке будет чисто вертикальным. Поэтому можно предположить, что здесь  $\tilde{b} \sim \tilde{y}$ . Непосредственные измерения расширения струи в поперечном потоке [11], а также опыты с изолированными нагретыми массами воздуха, выходящими из узкого щелевидного источника большой длины (так наз. цилиндрическими термиками), характер перемешивания которых очень сходен с перемешиванием отдельных участков изогнутой струи [12], показали, что на не очень большом удалении от источника имеет место линейная зависимость между  $\tilde{b}$  и  $\tilde{y}$ .

Интенсивность перемешивания струи повышается под воздействием присоединенного парного вихря, который образуется в тыловой части струи, благодаря ее обтеканию поперечным потоком в начальной части [9, 13]. Как показано в работе [14], размеры этого вихря увеличиваются прямо пропорционально времени, или, благодаря постоянству скорости горизонтального перемещения струи  $W$ , пропорционально  $\tilde{x}$ .

Наконец, известное участие в перемешивании струи принимает и турбулентность окружающей среды. Расширение струи по этой причине также можно приближенно считать пропорциональным  $x$ . Таким образом, в общем случае получаем следующую зависимость, определяющую расширение струи:

$$\tilde{b} = c\tilde{y} + c_0\tilde{x}, \quad (16)$$

где  $c$  и  $c_0$  — коэффициенты пропорциональности. При этом начало прямоугольной системы координат  $\tilde{x} - \tilde{y}$  помещено в условную точку  $O$  (рис. 1 б), которую назовем полюсом основного участка струи. Положение центра выходящего сечения сопла относительно полюса характеризуется, в общем случае, координатами  $\tilde{x}_0$  и  $\tilde{y}_0$ .

### Уравнение изогнутой оси струи

На сравнительно небольших удалениях от источника, когда вертикальная составляющая скорости струи  $v_y$  еще достаточно велика, относительное движение струи будет наиболее существенным фактором, определяющим ее расширение. При этом его влияние должно значительно превосходить влияние других факторов. По этой причине можно пренебречь вторым членом в правой части уравнения (16) и решать дифференциальное уравнение изогнутой оси в виде

$$\frac{J}{\tilde{y}'^2} - (I \sin \alpha_0 + J\tilde{x}) \frac{\tilde{y}''}{\tilde{y}'^3} = \frac{2}{\pi} c_n c \tilde{y}. \quad (17)$$

Начальные условия:

при  $\tilde{x} = 0$

$$\tilde{y}(0) = 0, \quad \tilde{y}'(0) = \operatorname{tg} \alpha_0. \quad (18)$$

Уравнение (17) — нелинейное, но допускает понижение порядка, если представить его в виде

$$\frac{d}{d\tilde{y}} \left( \frac{I \sin \alpha_0 + J\tilde{x}}{\tilde{y}'} \right) = \frac{2}{\pi} c_n c \tilde{y}. \quad (17a)$$

В результате решения этого уравнения получается уравнение изогнутой оси струи в поперечном потоке в виде

$$\frac{1}{k^3} \tilde{y}^3 + I \cos \alpha_0 \tilde{y} = I \sin \alpha_0 \tilde{x} + \frac{J}{2} \tilde{x}^2, \quad (19)$$

где

$$k^3 = \frac{3\pi}{c_n c} = \frac{9,42}{c_n c}. \quad (20)$$

В случае, когда влияние гравитационной силы незначительно ( $J \ll I$ ), получаем

$$\tilde{x} = \frac{1}{k^3 I \sin \alpha_0} \tilde{y}^3 + \operatorname{ctg} \alpha_0 \tilde{y}. \quad (19a)$$

В частном случае  $\alpha_0 = \pi/2$ , имеем соответственно

$$\tilde{y} = k \sqrt[3]{I\tilde{x} + \frac{J}{2}\tilde{x}^2} \quad (21)$$

и

$$\tilde{y} = k\sqrt[3]{I\tilde{x}}. \quad (21a)$$

Полученные уравнения (19) и (21) действительны как при положительной ( $J > 0$ ), так и отрицательной ( $J < 0$ ) плавучести струи, но в последнем случае лишь до расстояния  $\tilde{x} = \tilde{x}_h$ , где струя достигает своего наибольшего возвышения  $\tilde{h}$ . При  $\tilde{x} > \tilde{x}_h$  струя, опускаясь, продолжает расширяться, что следует учесть, изменив правую часть уравнения (17). В этом случае имеем

$$\frac{J}{\tilde{y}'^2} - (I \sin \alpha_0 + J\tilde{x}) \frac{\tilde{y}''}{\tilde{y}'^3} = \frac{2c_n c}{\pi} (2\tilde{h} - \tilde{y}) \quad (22)$$

и, после интегрирования,

$$-\frac{\tilde{y}^3}{k^3} + \frac{3\tilde{h}}{k^3}\tilde{y}^2 + I \cos \alpha_0 \tilde{y} = I \sin \alpha_0 \tilde{x} + \frac{J}{2}\tilde{x}^2. \quad (23)$$

Максимальное возвышение  $\tilde{h}$  определяется из условия  $\tilde{y}' = 0$ , которое приводит к кубическому уравнению

$$\tilde{h}^3 + 2k^3 I \cos \alpha_0 \tilde{h} + \frac{k^3 I^2 \sin^2 \alpha_0}{2J} = 0. \quad (24)$$

Подставив  $\tilde{h}$  в (19), можно вычислить и расстояние  $\tilde{x}_h$ , которое в случае  $\alpha_0 = \pi/2$  равно

$$\tilde{x}_h = -\frac{I}{J}. \quad (25)$$

### Сравнение теоретического решения с экспериментальными данными

Легко убедиться, что уравнения (19a) и (21a) по своей структуре весьма сходны с соответствующими уравнениями, полученными экспериментальным путем в работах [4, 9]. Величину  $k$  можно определить из сравнения расчета по формулам (19) и (21) с экспериментальными данными.

На рис. 2 показано такое сравнение с данными работы [11], в которой определялась ось максимальной температуры струи при  $\alpha_0 = \pi/2$ . Как видно из графика, экспериментальные точки, полученные из опытов при различных значениях  $I$  и  $J$ , удовлетворительно группируются вокруг линии, проведенной согласно уравнению (21) при средней величине  $k = 1,25$ . Максимальное отклонение точек, соответствующих основному участку струй, от этой линии не превышает 7%, что можно считать вполне допустимым для сложных струевых процессов. Коэффициент  $k$  не является строго постоянной величиной, ибо, как было установлено в [11], коэффициент расширения струи  $c$  может изменяться от 1,05 до 1,22, т. е. в пределах 16%, и, как следует из формулы (20), соответствующее из-

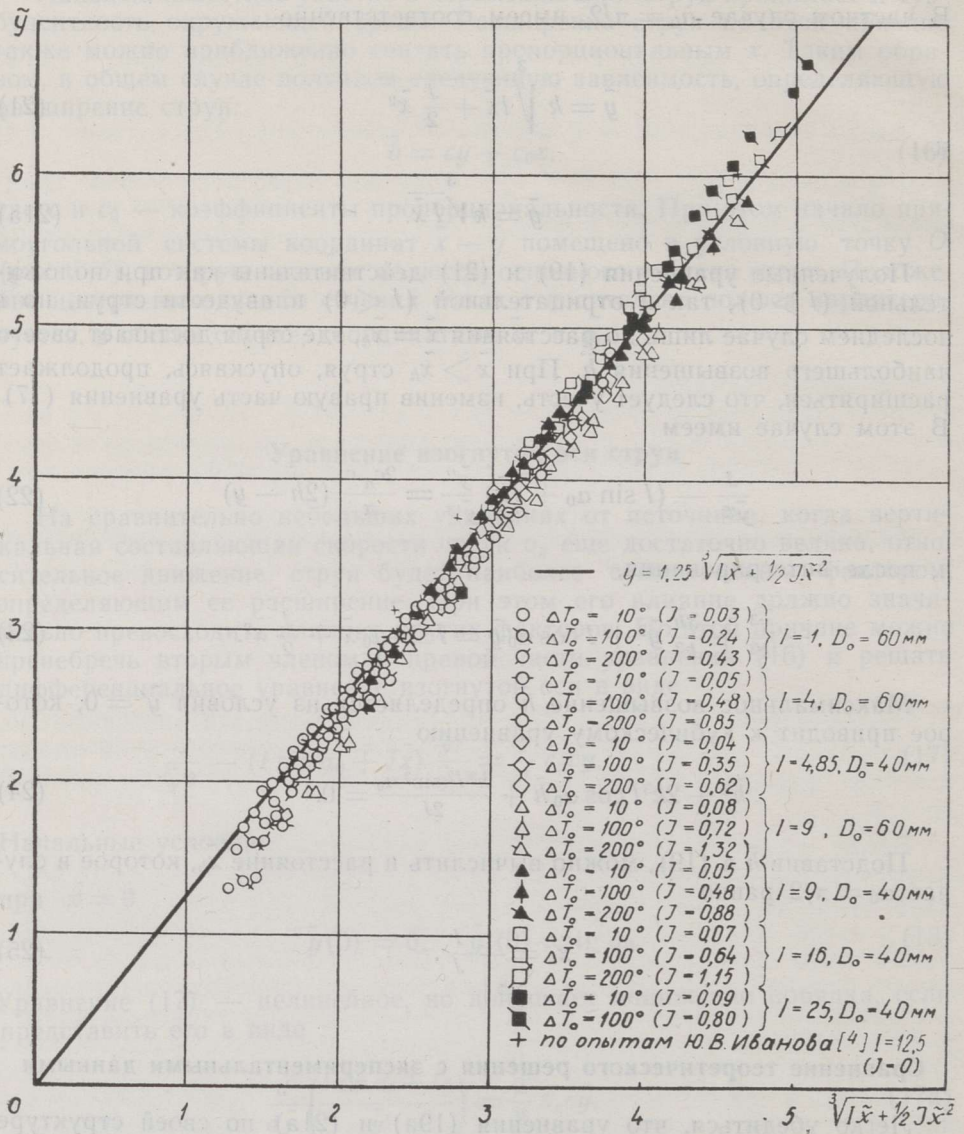


Рис. 2. Сопоставление расчета по формуле (21) с экспериментальными данными [11, 4] по оси максимальной температуры.

менение  $k$  составит в этом случае всего 5%, что практически можно не учитывать. Что касается координат центра выходного сечения сопла относительно полюса, то в данном случае их можно определять по формулам, полученным на основании тех же опытов [11] и действительным в тех пределах изменения основных параметров, в которых проводились опыты ( $l = 1 \div 25$  и  $\alpha_0 = \pi/2$ )

$$\tilde{y}_0 = 0,85 - 0,1 J^{0,825} \quad (26)$$

$$\tilde{x}_0 = 0,58 - \frac{2,22}{J^{0,5}} \quad (27)$$

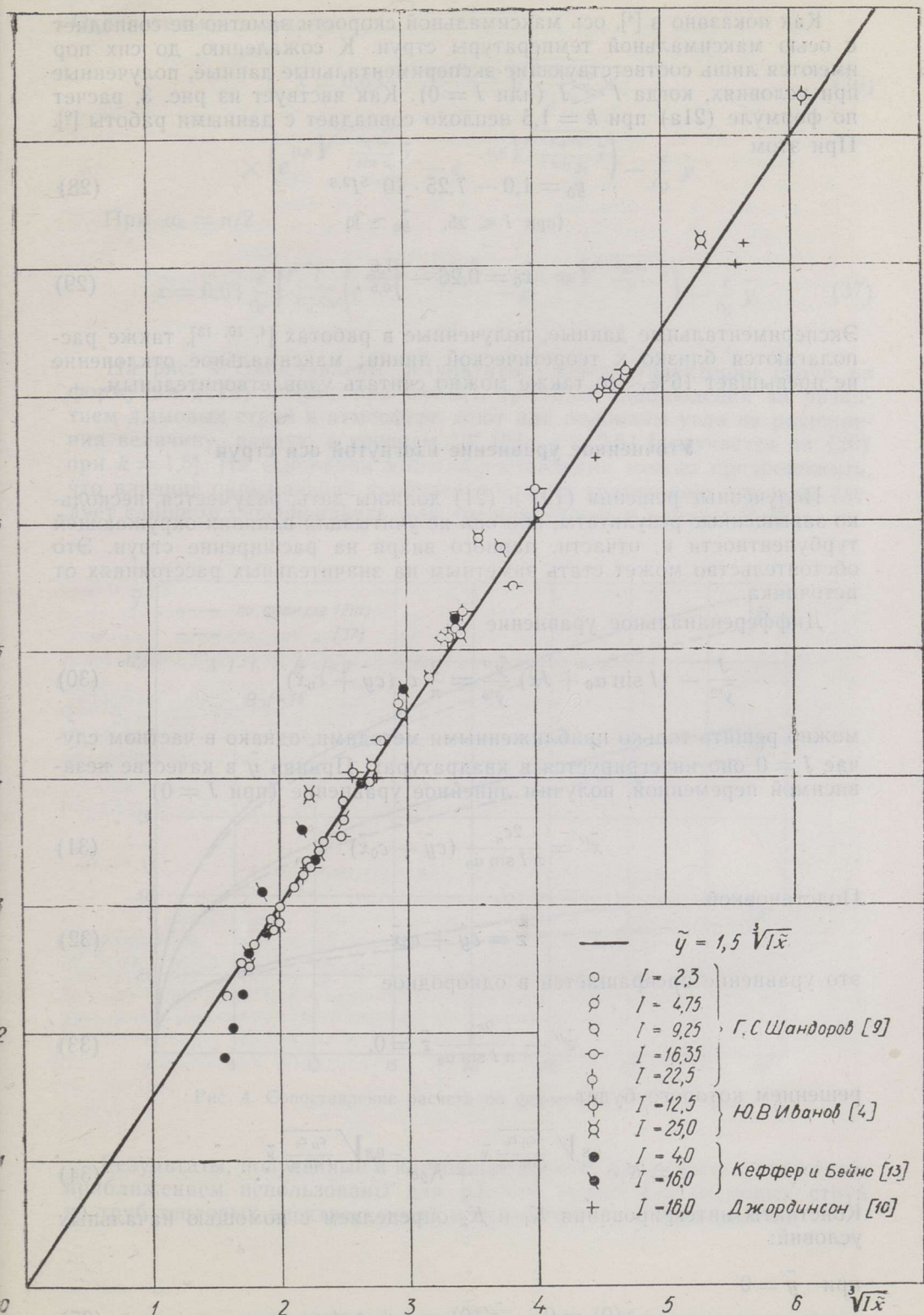


Рис. 3. Сопоставление расчета по формуле (21а) с экспериментальными данными [4, 9, 10, 13] по оси максимальной скорости.



Как показано в [4], ось максимальной скорости заметно не совпадает с осью максимальной температуры струи. К сожалению, до сих пор имеются лишь соответствующие экспериментальные данные, полученные при условиях, когда  $I \ll J$  (или  $J = 0$ ). Как явствует из рис. 3, расчет по формуле (21а) при  $k = 1,5$  неплохо совпадает с данными работы [9].

При этом

$$\tilde{y}_0 = 1,0 - 7,25 \cdot 10^{-5} I^{2,3} \quad (28)$$

(при  $I \leq 25$ ,  $\tilde{y}_0 \simeq 1$ )

$$\tilde{x}_0 = 0,26 - \frac{1,6}{I^{0,5}}. \quad (29)$$

Экспериментальные данные, полученные в работах [4, 10, 13], также располагаются близко к теоретической линии; максимальное отклонение не превышает 16%, что также можно считать удовлетворительным.

### Уточненное уравнение изогнутой оси струи

Полученные решения (19) и (21) должны дать, разумеется, несколько завышенные результаты, ибо они не учитывали влияния окружающей турбулентности и, отчасти, парного вихря на расширение струи. Это обстоятельство может стать заметным на значительных расстояниях от источника.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{J}{\tilde{y}^2} - (I \sin \alpha_0 + J\tilde{x}) \frac{\tilde{y}''}{\tilde{y}^3} = \frac{2}{\pi} c_n (c\tilde{y} + c_0\tilde{x}) \quad (30)$$

можно решить только приближенными методами, однако в частном случае  $J = 0$  оно интегрируется в квадратурах. Приняв  $\tilde{y}$  в качестве независимой переменной, получим линейное уравнение (при  $J = 0$ )

$$\tilde{x}'' = \frac{2c_n}{\pi I \sin \alpha_0} (c\tilde{y} + c_0\tilde{x}). \quad (31)$$

Подстановкой

$$\tilde{z} = c\tilde{y} + c_0\tilde{x} \quad (32)$$

это уравнение превращается в однородное

$$\tilde{z}'' - \frac{2c_n}{\pi I \sin \alpha_0} \tilde{z} = 0, \quad (33)$$

решением которого будет

$$\tilde{z} = K_1 e^{0,8 \sqrt{\frac{c_n c_0}{I \sin \alpha_0}} \tilde{y}} + K_2 e^{-0,8 \sqrt{\frac{c_n c_0}{I \sin \alpha_0}} \tilde{y}}. \quad (34)$$

Константы интегрирования  $K_1$  и  $K_2$  определяем с помощью начальных условий:

при  $\tilde{y} = 0$

$$\tilde{z}(0) = 0, \quad \tilde{z}'(0) = c + c_0 \operatorname{ctg} \alpha_0. \quad (35)$$

Окончательно получаем

$$\tilde{x} = 0,63 \frac{c + c_0 \operatorname{ctg} \alpha_0}{c_0} \sqrt{\frac{I \sin \alpha_0}{c_n c_0}} \times \left( e^{0,8 \sqrt{\frac{c_n c_0}{I \sin \alpha_0}} \tilde{y}} - e^{-0,8 \sqrt{\frac{c_n c_0}{I \sin \alpha_0}} \tilde{y}} \right) - \frac{c}{c_0} \tilde{y}. \quad (36)$$

При  $\alpha_0 = \pi/2$

$$\tilde{x} = 0,63 \frac{c}{c_0} \sqrt{\frac{I}{c_n c_0}} \left( e^{0,8 \sqrt{\frac{c_n c_0}{I}} \tilde{y}} - e^{-0,8 \sqrt{\frac{c_n c_0}{I}} \tilde{y}} \right) - \frac{c}{c_0} \tilde{y}. \quad (37)$$

На рис. 4 сопоставлены результаты расчета траектории струи по формулам (21а) и (37) при  $c = 1,1$ ,  $c_0 = 0,35$  (наблюдения за развитием дымовых струй в атмосфере дают для половины угла их расширения величину, равную в среднем  $10^\circ$  [15]),  $c = 2,54$  [получается из (20) при  $k = 1,5$ ]. На основании этого сопоставления можно предположить, что влияние окружающей турбулентности на траекторию струи не следует слишком переоценивать, как это получилось в работах [3, 8].

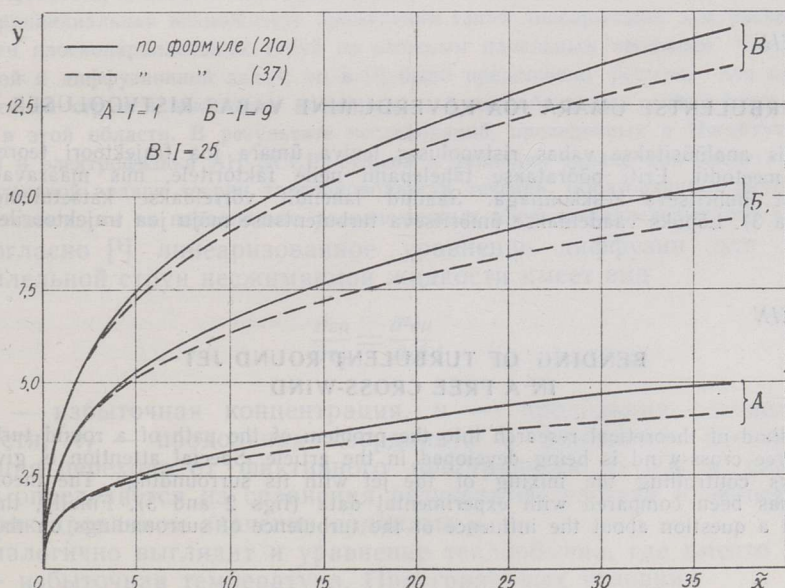


Рис. 4. Сопоставление расчета по формулам (21а) и (37).

Результаты, полученные в настоящей работе, могут быть с известным приближением использованы для расчета траектории дымовых струй из труб тепловых электростанций и промышленных предприятий.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сэттон О. Г., Микрометеорология, М., 1958.
2. Лайхтман Д. Л., Физика приземного слоя атмосферы, М., 1961.
3. Priestley С. Н. В., Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., **82**, No. 352, 165—176 (1956).
4. Иванов Ю. В., Эффективное сжигание надслойных горючих газов в топках паровых котлов, Таллин, 1959.
5. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй, М., 1960.
6. Вахламов С. В., Инж.-физ. ж., **7**, № 10, 112—116 (1964).
7. Визель Я. М., Мостинский И. Л., Инж.-физ. ж., **8**, № 2, 238—242 (1965).
8. Bosanquet С. Н., J. Inst. Fuel, **30**, No. 197, 322—328 (1957).
9. Шандоров Г. С., Ж. технич. физ., **27**, вып. 1, 156—179 (1957).
10. Jordinson R., Aero Res. Counс. R. & M., No. 3074 (1958).
11. Иванов Ю. В., Эпштейн А. М., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **14**, № 4, 588—595 (1965).
12. Scorer R., Natural aerodynamics. London, 1958.
13. Keffer G. F., Baines W. B., J. Fluid Mech., **15**, No. 4, 481—496 (1963).
14. Turner J. S., J. Fluid Mech., **15**, No. 3, 419—432 (1963).
15. Strom G. H., Atmospheric dispersion of stack effluents, В сб. Air pollution, N. Y., 1962.

*Институт термофизики и электрофизики  
Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию  
22/VI 1965

A. EPSTEIN

### TURBULENTSE ÜMARA JOA KÕVERDUMINE VABAS RISTVOOLUSES

Artiklis analüüsitakse vabas ristvooluses leviva ümara joa trajektoori teoreetilise uurimise meetodit. Eriti pööratakse tähelepanu neile faktoritele, mis määravad joa segunemist ümbritseva keskkonnaga. Saadud lahendit võrreldakse katsetulemustega (joon. 2 ja 3). Lõpuks vaadeldakse ümbritseva turbulentsuse mõju joa trajektooreile.

A. EPSTEIN

### BENDING OF TURBULENT ROUND JET IN A FREE CROSS-WIND

A method of theoretical research into the problem of the path of a round turbulent jet in a free cross-wind is being developed in the article. Special attention is given to the factors controlling the mixing of the jet with its surroundings. The theoretical solution has been compared with experimental data (figs 2 and 3). Finally, there is considered a question about the influence of the turbulence of surroundings on the path of the jet.