EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1966, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1966, № 2

С. УЛЬМ

О ПОСТРОЕНИИ АЛГОРИФМОВ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Решение некоторых задач оптимального управления можно привести к задачам нахождения абсолютных минимумов некоторых функционалов в пространствах функций. Для приближенного решения последних можно использовать алгорифмы, выработанные для решения нелинейных уравнений. Так, в работах М. Аоки [1, 2] для решения задач оптимального управления были обобщены метод Ньютона и некоторый вариант метода градиентов.

В настоящей статье на основании методов функционального анализа дается более общая схема построения методов такого типа для решения некоторых задач оптимального управления.

1. Пусть $\mathfrak{X}$ и U — банаховы (гильбертовы) пространства; $\mathfrak{X}^*$ и U^* — сопряженные к $\mathfrak{X}$ и U пространства. Пусть оператор $K \in (U \to \mathfrak{X})$, а c — некоторый фиксированный элемент пространства $\mathfrak{X}$. Символ (y, x) обозначает при фиксированном $y \in \mathfrak{X}^*$ значение линейного функционала в пространстве $\mathfrak{X}$ (ср. [3]). Аналогичный смысл имеет (v, u) при $v \ni U^*$, $u \in U$.

Рассмотрим функционал

$$\varphi(u) = f(x, u), \tag{1}$$

где $u \in U$; $x = c + Ku \in \mathfrak{X}$.

Введем обозначения*:

$F_1(x, u) \in \mathfrak{X}^*$ — частный градиент функционала $f(x, u)$ по x, т. е.

$$f_x(x, u)k = (F_1(x, u), k);\ k \in \mathfrak{X};$$

$F_2(x, u) \in U^*$ — частный градиент функционала $f(x, u)$ по u, т. е.

$$f_u(x, u)h = (F_2(x; u), h);\ h \in U;$$

$$\left.\begin{matrix} F_{1x}(x, u) \\ F_{1u}(x, u) \end{matrix}\right\} \text{— частные производные оператора } F_1(x, u);$$

$$\left.\begin{matrix} F_{2x}(x, u) \\ F_{2u}(x, u) \end{matrix}\right\} \text{— частные производные оператора } F_2(x, u).$$

---

* Символы $f_x(x, u)$, $f_u(x, u)$ обозначают частные производные функционала $f(x, u)$.

Тогда по определению (см., напр., [3])

$$\varphi'(u)h = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(u+th)-\varphi(u)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(c+K(u+th),\, u+th) - f(c+Ku,\, u)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(F_1(c+Ku,u),\, tKh) + (F_2(c+Ku,u),\, th) + \ldots}{t} =$$

$$= (K^* F_1(c+Ku,u) + F_2(c+Ku,u),\, h), \tag{2}$$

где $K^* \in (X^* \to U^*)$ — сопряженный к оператору K.

Итак, по (2)

$$\operatorname{grad}\varphi(u) = \Phi(u) = K^* F_1(c+Ku,u) + F_2(c+Ku,u). \tag{3}$$

Дальше найдем:

$$\Phi'(u)h = \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{K^* F_1(c+K(u+th),\, u+th) - K^* F_1(c+Ku,u)}{t} + \right.$$

$$\left. + \frac{F_2(c+K(u+th),\, u+th) - F_2(c+Ku,u)}{t} \right\} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{K^* F_{1x}(c+Ku,u)\, tKh + K^* F_{1u}(c+Ku,u)\, th + \ldots}{t} + \right.$$

$$\left. + \frac{F_{2x}(c+Ku,u)\, tKh + F_{2u}(c+Ku,u)\, th + \ldots}{t} \right\} =$$

$$= (K^* F_{1x} K + K^* F_{1u} + F_{2x} K + F_{2u})\, h,$$

т. е.

$$\Phi'(u) = K^* F_{1x}(c+Ku,u) K + K^* F_{1u}(c+Ku,u) +$$

$$+ F_{2x}(c+Ku,u) K + F_{2u}(c+Ku,u). \tag{4}$$

Отметим еще, что при фиксированном $u \in U$ сопряженный к линейному оператору $\Phi'(u)$ есть оператор

$$\Phi'^*(u) = K^* F_{1x}^* K + F_{1u}^* K + K^* F_{2x}^* + F_{2u}^*,$$

где F_{1x}^*, F_{1u}^*, F_{2x}^*, F_{2u}^* — операторы, сопряженные соответственно к F_{1x}, F_{1u}, F_{2x}, F_{2u}.

2. Критические точки функционала $\varphi(u)$ удовлетворяют уравнению

$$\Phi(u) = 0. \tag{5}$$

Отметим, что если решение u уравнения (5) единственно и выполнены достаточные условия минимума [3], то u непременно является точкой абсолютного минимума функционала $\varphi(u)$.

Итак, для нахождения точек минимума (локальных или абсолютных) функционалов $\varphi(u)$ можно применить алгорифмы, используемые для решения нелинейного уравнения (5). Рассмотрим некоторые основные алгорифмы такого типа.

1. Градиентные методы (см., напр., [4–6])

а) $u_{n+1}=u_n-\varepsilon_n\Phi(u_n)$

или

$$u_{n+1}=u_n-\varepsilon_n[K^*F_1(c+Ku_n,u_n)+F_2(c+Ku_n,u_n)]; \tag{6}$$

б) $u_{n+1}=u_n-\varepsilon_n\Phi'^*(u_n)\,\Phi(u_n)$

или

$$u_{n+1}=u_n-\varepsilon_n[K^*\overset{*}{F}_{1x}(c+Ku_n,\,u_n)K+\overset{*}{F}_{1u}(c+Ku_n,\,u_n)K+$$
$$+K^*\overset{*}{F}_{2x}(c+Ku_n,\,u_n)+\overset{*}{F}_{2u}(c+Ku_n,\,u_n)][K^*F_1(c+Ku_n,\,u_n)+$$
$$+F_2(c+Ku_n,\,u_n)]. \tag{7}$$

Здесь ε_n — положительные числа, для выбора которых имеются различные возможности (см., напр., [5, 6]).

Замечание 1. Алгорифмы (6) и (7) в общем имеют смысл только тогда, когда $U=U^*$; в противном случае их надо заменить соответственно алгорифмами

$$u_{n+1}=u_n-\varepsilon_n A\,\Phi(u_n) \tag{6'}$$

и

$$u_{n+1}=u_n-\varepsilon_n B\,\Phi'^*(u_n)A\,\Phi(u_n), \tag{7'}$$

где

$$A,\,B\in(U^*\to U).$$

2. Методы Ньютона [7]

а) модифицированный метод:

$$u_{n+1}=u_n-[\Phi'(u_0)]^{-1}\Phi(u_n)$$

или

$$u_{n+1}=u_n-[K^*F_{1x}(c+Ku_0,\,u_0)K+K^*F_{1u}(c+Ku_0,\,u_0)+$$
$$+F_{2x}(c+Ku_0,\,u_0)K+F_{2u}(c+Ku_0,\,u_0)]^{-1}\times$$
$$\times[K^*F_1(c+Ku_n,\,u_n)+F_2(c+Ku_n,\,u_n)]; \tag{8}$$

б) основной метод:

$$u_{n+1}=u_n-[\Phi'(u_n)]^{-1}\Phi(u_n)$$

или

$$u_{n+1}=u_n-[K^*F_{1x}(c+Ku_n,\,u_n)K+K^*F_{1u}(c+Ku_n,\,u_n)+$$
$$+F_{2x}(c+Ku_n,\,u_n)K+F_{2u}(c+Ku_n,\,u_n)]^{-1}\times$$
$$\times[K^*F_1(c+Ku_n,\,u_n)+F_2(c+Ku_n,\,u_n)]. \tag{9}$$

3. Другой возможностью построения алгорифмов для решения уравнения (5) является использование обобщенных разделенных разностей.

Рассмотрим оператор

$$\Phi(u) = K^*F_1(c+Ku, u) + F_2(c+Ku, u). \qquad (10)$$

Обобщенная разделенная разность $\Phi(u', u'')$ определяется следующим образом (ср. [10]):

а) для каждых фиксированных $u', u'' \in U$ оператор $\Phi(u', u'')$ является линейным, причем

$$\Phi(u', u'')(u' - u'') = \Phi(u') - \Phi(u'');$$

б) $\Phi(u, u) = \Phi'(u)$.

Аналогичным образом определяем частные разделенные разности для оператора $F(x, u)$:

$$F(x', x''; u)(x' - x'') = F(x', u) - F(x'', u)$$

$$F(x, x; u) = F_x(x, u)$$

и

$$F(x; u', u'')(u' - u'') = F(x, u') - F(x, u'')$$

$$F(x; u, u) = F_u(x, u).$$

Найдем выражение для оператора $\Phi(u', u'')$:

$$\begin{aligned}
&\Phi(u', u'')(u' - u'') = \Phi(u') - \Phi(u'') = \\
&= K^*F_1(c+Ku', u') - K^*F_1(c+Ku'', u'') + F_2(c+Ku', u') - \\
&- F_2(c+Ku'', u'') = \\
&= K^*F_1(c+Ku', u') - K^*F_1(c+Ku'', u') + K^*F_1(c+Ku'', u') - \\
&- K^*F_1(c+Ku'', u'') + F_2(c+Ku', u') - F_2(c+Ku'', u') + \\
&+ F_2(c+Ku'', u') - F_2(c+Ku'', u'') = \\
&= [K^*F_1(c+Ku', c+Ku''; u')K + K^*F_1(c+Ku''; u', u'') + \\
&+ F_2(c+Ku', c+Ku''; u')K + F_2(c+Ku''; u', u'')](u' - u''),
\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
\Phi(u', u'') = {} & K^*F_1(c+Ku', c+Ku''; u')K + K^*F_1(c+Ku''; u', u'') + \\
& + F_2(c+Ku', c+Ku''; u')K + F_2(c+Ku''; u', u''). \qquad (11)
\end{aligned}$$

Используя полученное выражение, можно для решения уравнения (5) построить алгорифмы:

а) интерполяционный аналог метода градиентов [9]:

$$u_{n+1} = u_n - \varepsilon_n \Phi^*(u_n, u_{n-1})\Phi(u_n)$$

($\Phi^*(u_n, u_{n-1})$ — сопряженный к $\Phi(u_n, u_{n-1})$ оператор)

или

$$u_{n+1}=u_n-\varepsilon_n[K^*F_1^*\,(c+Ku_n,\ c+Ku_{n-1};\ u_n)K+$$
$$+F_1^*\,(c+Ku_{n-1};\ u_n,\ u_{n-1})K+K^*F_2^*\,(c+Ku_n,\ c+Ku_{n-1};\ u_n)+$$
$$+F_2^*\,(c+Ku_{n-1};\ u_n,\ u_{n-1})][K^*F_1(c+Ku_n,\ u_n)+F_2(c+Ku_n,\ u_n)]; \quad (12)$$

предполагается, что $U=U^*$ (ср. замечание 1);

б) метод хорд [8, 10]:

$$u_{n+1}=u_n-[\Phi(u_n,\ u_{n-1})]^{-1}\Phi(u_n)$$

или

$$u_{n+1}=u_n-[K^*F_1(c+Ku_n,\ c+Ku_{n-1};\ u_n)K+K^*F_1(c+Ku_{n-1};\ u_n,\ u_{n-1})+$$
$$+F_2(c+Ku_n,\ c+Ku_{n-1};\ u_n)K+F_2(c+Ku_{n-1};\ u_n,\ u_{n-1})]^{-1}\times$$
$$\times[K^*F_1(c+Ku_n,\ u_n)+F_2(c+Ku_n,\ u_n)]; \quad (13)$$

в) метод Стеффенсена (ср. [11]):

$$u_{n+1}=u_n-[\Phi(u_n,\ u_n-A\,\Phi(u_n))]^{-1}\Phi(u_n),$$
$$A\in(U^*\to U)$$

или

$$u_{n+1}=u_n-[K^*F_1(c+Ku_n,\ c+Kv_n;\ u_n)K+$$
$$+K^*F_1(c+Kv_n;\ u_n,\ v_n)+F_2(c+Ku_n,\ c+Kv_n;\ u_n)K+$$
$$+F_2(c+Kv_n;\ u_n,\ v_n)]^{-1}\,[K^*F_1(c+Ku_n,\ u_n)+F_2(c+Ku_n,\ u_n)], \quad (14)$$

где

$$v_n=u_n-A[K^*F_1(c+Ku_n,\ u_n)+F_2(c+Ku_n,\ u_n)]. \quad (15)$$

4. Рассмотрим задачу оптимального управления. Предположим, что требуется минимизировать по u интеграл

$$f(x,u)=\int_0^T H(x,u)\,dt, \quad (16)$$

причем

$$\frac{dx}{dt}=ax+bu;\quad x(0)=x_0. \quad (17)$$

Допустим, что $a=a(t)$, $b=b(t)$ — непрерывные функции и $H(x,u)$ обладает нужными дифференциальными свойствами; T — фиксированное число.

Обозначим через $U(t,\tau)$ разрешающую функцию для уравнения $\frac{dx}{dt}=ax$; тогда из (17)

$$x(t)=U(t,0)\,x_0+\int_0^t U(t,\tau)\,b(\tau)\,u(\tau)\,d\tau=c+Ku, \quad (18)$$

где

$$c = c(t) = U(t, 0)\, x_0 \tag{19}$$

$$Ku = Ku(t) = \int_0^t U(t, \tau)\, b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau. \tag{20}$$

Если $a = \mathrm{const}$, то, например, $U(t, \tau) = e^{a(t-\tau)}$.

Итак, в данном случае

$$f(x, u) = \int_0^T H\Big(c(t) + \int_0^t U(t, \tau)\, b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau,\ u(t)\Big)\, dt =$$

$$= f(c + Ku, u) = \varphi(u). \tag{21}$$

Выбираем $\mathfrak{X} = U = L^2[0, T]$. Тогда $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^*$; $U = U^*$. Отметим, что если $u(t) \in L^2$, $U(t, \tau)$ непрерывна по t и интеграл

$$\int_0^T \int_0^T U^2(t, \tau)\, b^2(\tau)\, dt\, d\tau$$

является ограниченным, то и $x(t) \in L^2$ непрерывна.

Определим скалярное произведение обычным образом:

$$(u, v) = \int_0^T u(t)\, v(t)\, dt. \tag{22}$$

Тогда

$$(v, Ku) = \int_0^T v(t)\, dt \int_0^t U(t, \tau)\, b(\tau)\, u(\tau)\, d(\tau) =$$

$$= \int_0^T b(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \int_\tau^T U(t, \tau)\, v(t)\, dt =$$

$$= \int_0^T b(t)\, u(t)\, dt \int_t^T U(\tau, t)\, v(\tau)\, d\tau = (u, K^* v),$$

т. е.

$$K^* v = b(t) \int_t^T U(\tau, t)\, v(\tau)\, d\tau. \tag{23}$$

Так как

$$f(x, u) = \int_0^T H(x(t), u(t))\, dt,$$

то

$$F_1=\frac{\partial H}{\partial x};\qquad F_2=\frac{\partial H}{\partial u};\qquad F_{1x}=F^*_{1x}=\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$$

$$F_{1u}=F_{2x}=F^*_{1u}=F^*_{2x}=\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial u};\qquad F_{2u}=\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$$

$$F_1(x',x'';u)=F^*_1(x',x'';u)=\frac{\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=x'\\u=u}}-\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=x''\\u=u}}}{x'-x''}\tag{24}$$

$$F_2(x',x'';u)=F^*_2(x',x'';u)=\frac{\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{\substack{x=x'\\u=u}}-\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{\substack{x=x''\\u=u}}}{x'-x''}$$

$$F_1(x;u',u'')=F^*_1(x;u',u'')=\frac{\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=x\\u=u'}}-\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=x\\u=u''}}}{u'-u''}$$

$$F_2(x;u',u'')=F^*_2(x;u',u'')=\frac{\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{\substack{x=x\\u=u'}}-\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{\substack{x=x\\u=u''}}}{u'-u''}.$$

5. Теперь на основании формул (6)—(9) и (11)—(14) легко получить различные алгорифмы для приближенной минимизации функционала (21) (или для решения задачи (16)—(17)). Выпишем подробно некоторые из них. Используем для краткости обозначения:

$$\frac{\partial H_{(n)}}{\partial u}=\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_n\\u=u_n}};\quad \frac{\partial H_{(n)}}{\partial x}=\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_n\\u=u_n}}\qquad \text{и т. д.,}$$

где

$$x_n=U(t,0)\,x_0+\int_0^t U(t,\tau)\,b(\tau)\,u_n(\tau)\,d\tau.$$

Алгорифм (6):

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)-\varepsilon_n\left[b(t)\int_t^T U(\tau,t)\,\frac{\partial H_{(n)}}{\partial x}(\tau)\,d\tau+\frac{\partial H_{(n)}}{\partial u}(t)\right]\tag{25}$$

$$n=0,\ 1,\ \ldots.$$

Алгорифм (9):

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+\Delta u_n(t);$$

$\Delta u_n(t)$ определяется на каждом шагу из линейного интегрального уравнения

$$b(t)\int_t^T U(\tau,t)\left\{\frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial x^2}(\tau)\int_0^\tau U(\tau,s)\,b(s)\,\Delta u_n(s)\,ds\right\}d\tau+$$

$$+b(t)\int_t^T U(\tau,t)\,\frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial x\partial u}(\tau)\,\Delta u_n(\tau)\,d\tau+\frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial u\partial x}(t)\int_0^t U(t,\tau)\,b(\tau)\,\Delta u_n(\tau)\,d\tau+$$

$$+\frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial u^2}(t)\,\Delta u_n(t)=-b(t)\int_t^T U(\tau,t)\,\frac{\partial H_{(n)}}{\partial x}(\tau)\,d\tau-\frac{\partial H_{(n)}}{\partial u}(t). \qquad (26)$$

Отметим, что алгорифм (25) при специальном выборе ε_n и алгорифм (26) получены в [1, 2] из некоторых других соображений.

Алгорифм (7):

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)-\varepsilon_n\Delta u_n(t),$$

где

$$\Delta u_n(t)=b(t)\int_t^T U(\tau,t)\Big[\frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial x^2}(\tau)\int_0^\tau U(\tau,s)\,b(s)\,g_n(s)\,ds+$$

$$+\frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial u\partial x}(\tau)\,g_n(\tau)\Big]d\tau+\frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial x\partial u}(t)\int_0^t U(t,\tau)\,b(\tau)\,g_n(\tau)\,d\tau+\frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial u^2}(t)\,g_n(t), \qquad (27)$$

а

$$g_n(t)=b(t)\int_t^T U(\tau,t)\,\frac{\partial H_{(n)}}{\partial x}(\tau)\,d\tau+\frac{\partial H_{(n)}}{\partial u}(t).$$

Выбирая, например, в формуле (27)

$$\varepsilon_n=\frac{\|\Phi(u_n)\|^2}{\|\Phi'^*(u_n)\Phi(u_n)\|^2}$$

или

$$\varepsilon_n=\frac{\int_0^T g_n^2(t)\,dt}{\int_0^T \Delta u_n^2(t)\,dt}, \qquad (28)$$

получим итерационный метод с минимальными ошибками [12].

Алгорифм (13):

$$u_{n+1}(t)=u_n(t)+\Delta u_n(t) \qquad (n=1,2,\ldots),$$

где $\Delta u_n(t)$ определяется из уравнения (26), если в нем величины

$$\frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial x\,\partial u},\quad \frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial u\partial x},\quad \frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial u^2} \qquad (29)$$

заменить соответственно величинами

$$\frac{\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_n\\u=u_n}} - \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_{n-1}\\u=u_n}}}{x_n - x_{n-1}}; \quad \frac{\left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_n\\u=u_n}} - \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_n\\u=u_{n-1}}}}{u_n - u_{n-1}}$$

$$\frac{\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_n\\u=u_n}} - \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_{n-1}\\u=u_n}}}{x_n - x_{n-1}}; \quad \frac{\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_n\\u=u_n}} - \left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_n\\u=u_{n-1}}}}{u_n - u_{n-1}}. \tag{30}$$

Отметим, что для применения алгорифма требуются два начальных приближения.

Алгорифм (10):

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \varepsilon_n \Delta u_n(t),$$

где $\Delta u_n(t)$ вычисляется по формуле (27), если в ней величины (29) заменить соответственно величинами (30).

6. Рассмотренные методы можно применить и для решения проблемы (ср. [1, 13]): минимизировать по u интеграл

$$f(x, u) = \int_0^T H(x, u)\,dt, \tag{31}$$

причем

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x, u); \quad x(0) = x_0. \tag{32}$$

Пусть $u_n(t)$ — некоторое приближение к оптимальному управлению; $x_n(t)$ — соответствующее решение уравнения (32).

Линеаризуем уравнение (32);

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x_n, u_n) + \psi_x(x_n, u_n)(x - x_n) + \psi_u(x_n, u_n)(u - u_n). \tag{33}$$

Из уравнения (33)

$$x(t) = U_n(t, 0)x_0 + \int_0^t U_n(t, \tau)\,[\psi(x_n(\tau), u_n(\tau)) -$$

$$- \psi_x(x_n(\tau), u_n(\tau))\,x_n(\tau) + \psi_u(x_n(\tau), u_n(\tau))\,(u(\tau) - u_n(\tau))]d\tau =$$

$$= c_n + K_n u,$$

где

$U_n(t, \tau)$ — разрешающая функция для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \psi_x(x_n, u_n)\,x;$$

$$c_n = U_n(t, 0)\, x_0 + \int_0^t U_n(t, \tau)\, [\psi(x_n(\tau), u_n(\tau)) - \psi_x(x_n(\tau), u_n(\tau))\, x_n(\tau) -$$

$$- \psi_u(x_n(\tau), u_n(\tau))\, u_n(\tau)]\, d\tau;$$

$$K_n u = \int_0^t U_n(t, \tau)\, \psi_u(x_n(\tau), u_n(\tau))\, u(\tau)\, d\tau.$$

Для определения $u_{n+1}(t)$ используем один из алгорифмов, рассмотренных выше [т. е. осуществим один итерационный шаг для решения задачи (31), (33)]. Например, на основании алгорифма (7) получим

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) - \varepsilon_n\, \Delta u_n(t),$$

где

$$\Delta u_n(t) = \Big\{ \psi_u(x_n(t), u_n(t)) \int_t^T U_n(\tau, t) \Big[\frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial x^2}(\tau) \int_0^\tau U_n(\tau, s)\, \psi_u(x_n(s), u_n(s)) \times$$

$$\times g_n(s)\, ds + \frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial u\, \partial x}(\tau)\, g_n(\tau)\Big]\, d\tau + \frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial x\, \partial u}(t) \int_0^t U_n(t, \tau)\, \psi_u(x_n(\tau), u_n(\tau)) \times$$

$$\times g_n(\tau)\, d\tau + \frac{\partial^2 H_{(n)}}{\partial u^2}(t)\, g_n(t), \tag{34}$$

а

$$g_n(t) = \psi_u(x_n(t), u_n(t)) \int_t^T U_n(\tau, t)\, \frac{\partial H_{(n)}}{\partial x}(\tau)\, d\tau + \frac{\partial H_{(n)}}{\partial u}(t) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{35}$$

Индекс (n) обозначает, что частные производные вычислены при значениях аргументов $x = c_n + K_n u_n$; $u = u_n$.

Если $u_{n+1}(t)$ вычислен, то $x_{n+1}(t)$ найдем из уравнения (32) и т. д.

Отметим, что вместо (33) можно использовать и другие способы линеаризации, например:

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x_n, u_n) + \frac{\psi(x_n, u_n) - \psi(x_{n-1}, u_n)}{x_n - x_{n-1}}\, (x - x_n) +$$

$$+ \frac{\psi(x_{n-1}, u_n) - \psi(x_{n-1}, u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}}\, (u - u_n) \tag{36}$$

или

$$\frac{dx}{dt} = \psi(x_n, u_n) + \frac{\psi(x_n, u_n) - \psi(y_n, u_n)}{x_n - y_n}\, (x - x_n) +$$

$$+ \frac{\psi(y_n, u_n) - \psi(y_n, u_{n-1})}{u_n - u_{n-1}}\, (u - u_n), \tag{37}$$

где

$$y_n = \int_0^t \psi(x_n(t), u_n(t))\,dt. \quad (38)$$

Замечание 2. Все приведенные алгорифмы легко обобщаются на случай, если x и u векторные величины.

Замечание 3. Используя методику «функций штрафа» (ср., напр., [14, 15]), можно приведенные алгорифмы приспособить и для решения некоторых задач, где на x и u наложены ограничения.

Замечание 4. Для исследования сходимости приведенных методов можно использовать общие теоремы о сходимости соответствующих методов для решения нелинейных операторных уравнений (ср., напр., [4–12]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Aoki M., J. Math. Anal. and Appl., **5**, No. 3, 418—434 (1962).
2. Aoki M., J. Basic Engng, Trans. ASME, **D 85**, No. 2, 177—180 (1963).
3. Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956.
4. Вайнберг М. М., Сибирск. матем. ж., **2**, № 2, 201—220 (1961).
5. Линьков Е. И., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, **96**, 221—230 (1960).
6. Кивистик Л. А., ДАН, **136**, № 1, 22—25 (1961).
7. Канторович Л. В., Усп. матем. наук, **12**, вып. 6 (28), 89—195 (1948).
8. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **13**, № 3, 217—227 (1964).
9. Ульм С., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **12**, № 2, 132—140 (1963).
10. Сергеев А. С., Сибирск. матем. ж., **2**, № 2, 282—289 (1961).
11. Ульм С., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **4**, № 6, 1093—1097 (1964).
12. Фридман В. М., ДАН, 139, № 5, 1063—1066 (1961).
13. Bellman R., Quart. Appl. Math., vol. **16**, XVI, No. 3, 295—305 (1958).
14. Шатровский Л. И., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **2**, № 3, 488—491 (1962).
15. Фельдбаум А. А., Основы теории оптимальных автоматических систем, М., 1963.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/VI 1965

S. ULM

ALGORITMIDE KOOSTAMISEST MÕNEDE OPTIMAALSE JUHTIMISE ÜLESANNETE LIGIKAUDSEKS LAHENDAMISEKS

Artiklis esitatakse üldine, funktsionaalanalüüsil baseeruv metoodika mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks kasutatavate algoritmide (Newtoni meetod, gradientide meetodid ning nende interpolatsioonanaloogid) ülekandmiseks optimaalse juhtimise teatud tüüpi ülesannete ligikaudseks lahendamiseks.

S. ULM

ON A TECHNIQUE OF THE CONSTRUCTION OF ALGORITHMS FOR APPROXIMATE EVALUATION OF SOME OPTIMUM CONTROL PROBLEMS

This paper considers the solving of a certain class of optimum control problems, making use of general methods of the functional analysis (Newton's method, the methods of gradients and their interpolate analogues).