EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1965.2.05

А. ЯГЕЛЬ

ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ ДОПУСТИМОСТИ ПРИ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Статья посвящена изучению основной структуры множества параметров t, при которых существует допустимое решение следующей задачи: найти $\max\limits_{\vec{x}(t)\in\Omega_t}\left[(c_1+tc)x_1+\sum\limits_{j=2}^{n}c_jx_j\right]$, где $\Omega_t=\{\vec{x}(t):(\vec{a}_1+t\vec{d})x_1+\sum\limits_{j=2}^{n}\vec{a}_jx_j=\vec{b}+t\vec{b}_1,\ \vec{x}\geqslant\vec{0}\}$. Устанавливается, что множество $L_t=\{t:\Omega_t\neq\Theta\}$ не обязательно связное и замкнутое; множество L_t однозначно определяется при помощи некоторых векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4 \in R_s$, получение которых тесно связано с образующими определенного выпуклого многогранного конуса. Рассматривается вычисление образующих этого конуса.

1. Постановка проблемы

Параметрическая задача рассматриваемого класса ставится следующим образом: для каждого вещественного t найти

$$\Phi(t)=\max_{\vec{x}(t)\in\Omega_t}\left[(c_1+ct)x_1+\sum_{j=2}^{n}c_jx_j\right],$$

$$\text{где}\quad \Omega_t=\{\vec{x}(t):(\vec{a}_1+t\vec{d})x_1+\sum_{j=2}^{n}\vec{a}_jx_j=\vec{b}+t\vec{b}_1,\ x\geqslant 0\},$$

так что при фиксированном t имеем задачу линейного программирования. До сих пор этот класс параметрических задач мало изучен. В данной статье исследуется структура множества параметров, при которых существует допустимое и оптимальное решение соответствующей задачи линейного программирования.

Введем следующие множества параметров: $L_t=\{t:\Omega_t\neq\Theta\}$, $O_t=\{t:t\in L_t,\ \Phi(t)<+\infty\}$ и $N_t=\{t:\Psi_t\neq\Theta\}$, где Θ обозначение пустого множества и $\Psi_t=\{\vec{x}(t):(\vec{a}_1+t\vec{d})x_1+\sum\limits_{j=2}^{n}\vec{a}_jx_j=\vec{0},\ (c_1+tc)x_1+\sum\limits_{j=2}^{n}c_jx_j=1,\ \vec{x}\geqslant\vec{0}\}$. Назовем характеристикой множества $G\subset R$ (R — множество вещественных чисел) минимальное число связных множеств, теоретико-множественной суммой которых является множество G;

характеристику множества G обозначим $H(G)$ и, если $G=\Theta$, то принимаем $H(G)=0$. Из теорем 1, 3, 4 статьи [1] следует, что $H(N_t)\leqslant 1$ и $O_t=L_t\setminus N_t$ (теоретико-множественная разность двух множеств). Таким образом, основной интерес представляют множество L_t и его характеристика. В статье [1] доказывается, что множество N_t можно получить при помощи решения двух задач линейного программирования, поэтому в дальнейшем построению множества O_t внимания не уделяется.

2. Основные свойства множества L_t

Пусть R_s координатное пространство с размерностью s и $\vec{c}_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ — векторы этого пространства. Определим следующие функции:

$$f_j(t)=\begin{cases} 0, & \text{если } j=0,\\ \dfrac{c_{j3}+tc_{j4}}{c_{j1}+tc_{j2}}, & \text{если } 1\leqslant j\leqslant s \text{ и } c_{j1}\neq 0 \text{ или } c_{j2}\neq 0,\\ c_{j3}+tc_{j4}, & \text{если } 1\leqslant j\leqslant s \text{ и } c_{j1}=c_{j2}=0,\\ +\infty, & \text{если } j=s+1, \end{cases}$$

где c_{ji} — j-ая координата вектора $\vec{c}_i$. Для $t\in R$ определим следующие множества индексов:

$$I_t^+=\{j: c_{j1}+tc_{j2}>0\}\cup\{s+1\},$$

$$I_t^-=\{j: c_{j1}+tc_{j2}<0\}\cup\{0\},$$

$$I_t^0=\{j: c_{j1}=c_{j2}=0\}.$$

Если $I_t^0=\Theta$, то считаем, что $\min\limits_{j\in I_t^0} f_j(t)=1$. Множество решений уравнений $c_{j1}+c_{j2}t=0$, $j\notin I_t^0$, обозначим K_t. Имеет место следующая

Теорема 1 (основная теорема). *Для заданного $\{\Omega_t\}$ найдутся целое число s и векторы $\vec{c}_i\in R_s$ $(i=1, 2, 3, 4)$ такие, что множество* $L_t\setminus K_t=\{t: \min\limits_{j\in I_t^+} f_j(t)\geqslant \max\limits_{j\in I_t^-} f_j(t), \min\limits_{j\in I_t^0} f_j(t)\geqslant 0\}$.

Доказательство. По теореме 1 [2] множество $\Omega_t\neq\Theta$ тогда и только тогда, когда при любом решении системы $A^T(t)\vec{u}\geqslant\vec{0}$ (T — транспонированная) имеет место $\vec{u}\cdot\vec{b}(t)\geqslant 0$, где $\vec{b}(t)=\vec{b}+t\vec{b}_1$ и $A(t)=[\vec{a}_1+t\vec{d}, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n]$; это обстоятельство запишем $A^T(t)\vec{u}\geqslant\vec{0}\to\vec{u}\cdot\vec{b}(t)\geqslant 0$. Система $A^T(t)\vec{u}\geqslant 0$ в развернутом виде следующая:

$$\begin{cases} \vec{a}_1(t)\cdot\vec{u}\geqslant 0,\\ \vec{a}_i\cdot\vec{u}\geqslant 0, \quad i=2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

По следствию 2А статьи [3] найдутся векторы $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_s$ такие, что решением подсистемы $\vec{a}_i\vec{u} \geqslant 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$, будет любой вектор $\vec{u}(\vec{\lambda}) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \vec{u}_j$, где $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \geqslant \vec{0}$ и только те векторы. Подставляя $\vec{u}(\vec{\lambda})$ в неравенство $\vec{a}_1(t) \cdot \vec{u} \geqslant 0$, должно быть $\vec{a}_1(t) \cdot \vec{u}(\vec{\lambda}) \geqslant 0 \to \vec{u}(\vec{\lambda}) \cdot \vec{b}(t) \geqslant 0$.

Обозначим $\vec{u}_j \cdot \vec{a}_1 = c_{j1}$, $\vec{u}_j \cdot \vec{d} = c_{j2}$, $\vec{u}_j \cdot \vec{b} = c_{j3}$ и $\vec{u}_j \cdot \vec{b}_1 = c_{j4}$, $j = 1, 2, \ldots, s$.

Следовательно,

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{\lambda} \cdot (\vec{c}_1 + \vec{c}_2 \cdot t) \geqslant 0, \\ \qquad\qquad \vec{\lambda} \geqslant \vec{0}, \end{array}\right. \to \vec{\lambda} \cdot (\vec{c}_3 + t\vec{c}_4) \geqslant 0. \tag{1}$$

Если последнее обстоятельство не имеет места, то совместна система

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{\lambda}(\vec{c}_1 + t\vec{c}_2) \geqslant 0, \\ \vec{\lambda}(\vec{c}_3 + t\vec{c}_4) \leqslant -1, \\ \qquad\quad \vec{\lambda} \geqslant \vec{0}. \end{array}\right. \tag{2}$$

Для совместности системы (2) имеем (по теореме 1 статьи [2])

$$\left\{\begin{array}{lll} u_1(-c_{j1} - tc_{j2}) + u_2(c_{j3} + tc_{j4}) & \geqslant 0, & j = 1, 2, \ldots, s, \\ u_1 & \geqslant 0, & \to -u_2 \geqslant 0, \\ \qquad\qquad u_2 & \geqslant 0. & \end{array}\right. \tag{3}$$

Пусть (u_1, u_2) — решение системы (3); так как $u_2 \geqslant 0$, то при $u_2 > 0$ система (2) несовместна, но тогда на множестве решений системы (1) $\vec{\lambda} \cdot (\vec{c}_3 + t\vec{c}_4) \geqslant 0$. Если в любом решении системы (3) координата $u_2 = 0$, то система (2) совместна, но тогда на множестве решений системы (1) $\vec{\lambda} \cdot (\vec{c}_3 + t\vec{c}_4) < 0$. Таким образом, необходимо, чтобы $u_2 > 0$. Обозначим $\frac{u_1}{u_2} = \mu$, следовательно, $\Omega_t \neq \Theta$ тогда и только тогда, когда совместна система

$$\left\{\begin{array}{l} \mu \cdot (c_{j1} + tc_{j2}) \leqslant c_{j3} + tc_{j4}, \\ \qquad\qquad \mu \geqslant 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Если $j \in I_t^0$, то очевидно должно быть $c_{j3} + tc_{j4} \geqslant 0$, откуда для совместной системы (4) необходимо $\min\limits_{j \in I_t^0} f_i(t) \geqslant 0$. Если же при t_0 имеем $c_{j_01} + t_0 c_{j_02} = 0$ и $j_0 \notin I_t^0$, то $t_0 \in K_t$, следовательно, $t_0 \notin L_t \setminus K_t$. Для индекса $j \in I_{t'}^0 \cup I_{t'}^-$ либо $\mu \geqslant f_i(t')$, либо $\mu \leqslant f_i(t')$. Из сказанного следует, что $L_t \setminus K_t = \{t : \min\limits_{j \in I_t^+} f_i(t) \geqslant \max\limits_{j \in I_t^-} f_i(t),\ \min\limits_{j \in I_t^0} f_i(t) \geqslant 0\}$. Теорема доказана.

Граничную точку t_0 множества L_t в дальнейшем называем критическим параметром этого множества.

С л е д с т в и е 1. Число критических параметров множества L_t конечное.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из вида функции $f_j(t)$ и из конечности множества K_t.

С л е д с т в и е 2. Характеристика множества L_t конечная.

Д о к а з а т е л ь с т в о вытекает из следствия 1.

С л е д с т в и е 3. Если t_0 критический параметр и $t_0 \notin L_t$, то $t_0 \in K_t$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность $\{t_k\}$ такая, что $t_k \in L_t$ и $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = t_0$. Так как при любом t_k система (4) совместна, то начиная с некоторого k_0 необходимо выполнение следующих условий: если $k \geqslant k_0$, то найдется индекс j (не зависящий от k) такой, что $c_{j3} + t_k c_{j4} < 0$, $c_{j1} + t_k c_{j2} < 0$, $c_{j3} + t_0 c_{j4} < 0$ и $c_{j1} + t_0 c_{j2} = 0$. Из последних соотношений вытекает справедливость следствия.

Имеет место и обратная (к теореме 1)

Т е о р е м а 2. *Для любых* $\vec{c}_i \in R_s$, $i = 1, 2, 3, 4$, *можно поставить в соответствии* $\{\Omega_t\}$ *так, что* $\Omega_t \neq \Theta$ *тогда и только тогда, когда* $t \in L_t$, *где* L_t *множество параметров* t, *при которых совместна система* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определения векторов $\vec{a}_1$, $\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{b}_1$ и $\vec{u}_j$ имеем систему

$$\begin{cases} c_{j1} = u_{1j}\cdot a_{11} + u_{2j}\cdot a_{21} + \ldots + u_{mj}\cdot a_{m1}, \\ c_{j2} = u_{1j}\cdot d_1 + u_{2j}\cdot d_2 + \ldots + u_{mj}\cdot d_m, \\ c_{j3} = u_{1j}\cdot b_1 + u_{2j}\cdot b_2 + \ldots + u_{mj}\cdot b_m, \\ c_{j4} = u_{1j}\cdot b_{11} + u_{2j}\cdot b_{21} + \ldots + u_{mj}\cdot b_{m1}. \end{cases} \quad (j = 1, 2, \ldots, s) \tag{5}$$

Одно из решений системы (5) следующее: $m = 4$; $a_{11} = 1$, $a_{i1} = 0$ $(i = 2, 3, 4)$; $d_2 = 1$, $d_i = 0$, $(i = 1, 3, 4)$; $b_3 = 1$, $b_i = 0$, $(i = 1, 2, 4)$; $b_{11} = 1$, $b_{i1} = 0$, $(i = 1, 2, 3)$; $u_{ij} = c_{ji}$, $(i = 1, 2, 3, 4;\ j = 1, 2, \ldots, s)$. Обозначим $\vec{u}_j = (c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4})$. По следствию 4А статьи [3] найдутся векторы $\vec{a}_i \in R_4$, $i = 2, 3, \ldots, p$, такие, что множество решений системы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geqslant 0$, $i = 2, 3, \ldots, p$, совпадет со множеством $\{\vec{u}\} = \{\vec{u}\colon \sum\limits_{j=1}^{s} \lambda_j \vec{u}_j = \vec{u},\ \vec{\lambda} \geqslant \vec{0}\}$.

Если принимать $\Omega_t = \{\vec{x}(t)\colon\ A(t)\vec{x} = \vec{b}(t),\ \vec{x} \geqslant \vec{0}\}$, где $\vec{b}(t) = \vec{b} + t\vec{b}_1$, $A(t) = [\vec{a}_1 + t\vec{d}, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_p]$ и векторы $\vec{b}$, $\vec{b}_1$, $\vec{d}$, $\vec{a}_1$ суть решение системы (5), то, очевидно, $\Omega_t \neq \Theta$ тогда и только тогда, когда $t \in L_t$. Если же система (4) противоречива при любом $t \in R$, то и при любом $t \in R$ множество $\Omega_t = \Theta$. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2, взятые вместе, дают, что с заданием четырех векторов $\vec{c}_i$, которые соответствуют данному множеству $\{\Omega_t\}$, полностью определяется множество L_t, т. е. его критические параметры, принадлежность их ко множеству L_t^* и связные множества, теоретико-множественной суммой которых является множество L_t.

Для параметрических задач, изучаемых в статьях [1, 4, 5], соответствующие множества обозначим Ω_t^*, N_t^*, L_t^*, O_t^* и Ψ^*; для этих задач имеем $H(N_t^*) \leqslant 1$, $H(L_t^*) \leqslant 1$ и $H(O_t^*) \leqslant H(N_t^*) + H(L_t^*) \leqslant 2$. Хотя при $\vec{b}_1 = \vec{0}$ получаем в этих статьях рассмотренные задачи, но в данном случае далеко не всегда $H(L_t) \leqslant 1$, а можем утверждать только, что $H(O_t) \leqslant \leqslant H(L_t) + 1$. Тот факт, что строение множества L_t может быть довольно сложное, подтверждается следующей

Теоремой 3. *Для любого натурального числа s существует множество L_t такое, что $H(L_t) = s + 1$.*

Доказательство. Выбираем $\vec{c}_i \in R_s$, $i = 1, 2, 3, 4$, такие, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, s$, выполняются следующие условия: $c_{j1} = 2j$, $c_{j2} = 1$, $c_{j4} > 0$, $\frac{c_{j3}}{c_{j4}} = 2j - 1$. Тогда система (4) принимает вид

$$\left\{\begin{array}{l} (2+t)\mu \leqslant c_{14}(1+t), \\ (4+t)\mu \leqslant c_{24}(3+t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (2s+t)\mu \leqslant c_{s4}(2s-1+t), \\ \qquad \mu \geqslant 0. \end{array}\right. \tag{6}$$

Очевидно, что при $t \notin [-2s; -1)$ система (6) совместна. Для $t \in (-2j; -2j+1)$, $j = 1, 2, \ldots, s$, система (6) несовместна, так как при неотрицательных μ неравенство $(2j+t)\cdot\mu \leqslant c_{j4}\cdot(2j-1+t)$ не имеет места. Обозначим $V_j = \{t\colon t \in (-2j-1; -2j)\}$, $j = 1, 2, \ldots, s$. Если $t \in V_j$, то можем записать $t = -2j - \varepsilon$, где $\varepsilon \in (0; 1)$.

Пусть интервал V_j фиксирован; тогда неравенства системы (6) запишем в виде $[2(j-k)+t]\cdot\mu \leqslant c_{j-k,4}\cdot[2(j-k)-1+t]$, $k = j-s, \ldots, j-1$. Имеем $2(j-k)+t = -2k-\varepsilon$ и $2(j-k)-1+t = -2k-1-\varepsilon$. Так как для интервала V_j множество $I_t^0 = \Theta$, то для определения c_{j4} на этом интервале имеем условие

$$\min_{j-s \leqslant k \leqslant -1} \frac{c_{j-k,4}\cdot[2(j-k)-1+t]}{2\cdot(j-k)+t} \geqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant j-1} \frac{c_{j-k,4}\cdot[2(j-k)-1+t]}{2\cdot(j-k)+t}$$

или

$$\min_{j-s \leqslant k \leqslant -1} \frac{c_{j-k,4}\cdot(-2k-1-\varepsilon)}{-2k-\varepsilon} \geqslant \max_{0 \leqslant k \leqslant j-1} \frac{c_{j-k,4}\cdot(-2k-1-\varepsilon)}{-2k-\varepsilon}.$$

Если для некоторого $\varepsilon \in (0; 1)$ минимум достигается при индексе $k = -1$ и максимум при $k = 0$, то имеем

$$c_{j+1,4}\left(1+\frac{1}{\varepsilon-2}\right) \geqslant c_{j,4}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{7}$$

Наоборот, если c_{j4} $(j = 1, 2, \ldots, s)$ удовлетворяют условию (7) для некоторого $\varepsilon \in (0; 1)$, то независимо от j минимум и максимум достигаются на индексах $k=-1$ и соответственно $k=0$. Это вытекает из того, что можем выбирать $c_{j+1,4}$ $(j\leqslant s-1)$ так, что с увеличением k величина $1+\frac{1}{2k+\varepsilon}$ уменьшается, а с уменьшением k эта величина увеличивается. Пусть $\vec{c}_4$ фиксирован и при некотором $\varepsilon\in(0;\ 1)$ условия (7) выполнены; покажем, что множество параметров на интервале V_j $(j=1,\ 2,\ \dots,\ s-1)$ связное, т. е. множество параметров, которые удовлетворяют условию (7). Из условий (7) имеем, что $\frac{c_{j+1,4}}{c_{j,4}}\geqslant 1+\frac{2}{\varepsilon-\varepsilon^2}=g(\varepsilon)$. Пусть $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant s-1}\frac{c_{j+1,4}}{c_{j,4}}=\frac{c_{j_0+1,4}}{c_{j_0,4}}=c_0$, следовательно, $g(\varepsilon)\leqslant c_0$. Очевидно, что $\min\limits_{\varepsilon\in(0;\,1)}g(\varepsilon)=g(\frac{1}{2})$; левее и правее от точки $\varepsilon=\frac{1}{2}$ функция $g(\varepsilon)$ на интервале (0; 1) строго возрастающая, отсюда вытекает связность соответствующего множества параметров, которые обозначим S_j $(j=1,\ 2,\ \dots,\ s-1)$. Пусть $S_0=\{t: t\geqslant -1\}$ и $S_s=\{t: t<-2s\}$. Применяя теорему 2, можем построить $\{\Omega_t\}$ так, что соответствующее $L_t=\bigcup\limits_{j=0}^{s}S_j$. Из доказанного вытекает, что $H(L_t)=$ $=\sum\limits_{j=0}^{s}H(S_j)=s+1$. Теорема доказана.

Является ли полученный результат наихудшим в том смысле, что при любых $\vec{c}_i\in R_s$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ для соответственного множества L_t имеем $H(L_t)\leqslant s+1$, пока не известно. Ответ можем дать только в частном случае, именно справедлива следующая

Т е о р е м а 4. *Если* $\vec{c}_i\in R_s$ $(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ *такие, что* $\vec{c}_2>\vec{0}$ *и* $D_j>0$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ s)$, *то* $H(L_t)\leqslant s+1$, *где* $D_j=\begin{vmatrix}c_{j1} & c_{j2}\\ c_{j3} & c_{j4}\end{vmatrix}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Детальное доказательство опускаем, а приводим только его идею. Так как $\frac{df_j(t)}{dt}=\frac{D_j}{(c_{j1}+tc_{j2})^2}$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ s)$, то по условиям теоремы функции $f_j(t)$ неубывающие и нелинейные. Обозначим решение уравнения $c_{j1}+tc_{j2}=0$ через t_j. В области $(-\infty;\ t_j)$ функция $f_j(t)$ выпуклая и в области $(t_j;\ +\infty)$ — вогнутая. Можем считать, что $t_j\leqslant t_{j+1}$ $(j=1,\ 2,\ \dots,\ s-1)$. Рассмотрим непустой интервал $(t_{j_0};\ t_{j_0+1})$. Легко видеть, что на этом интервале при $j\geqslant j_0+1$ имеем $j\in I_t^-$ и при $j\leqslant j_0$ $j\in I_t^+$. Из сказанного следует, что на интервале $(t_{j_0};\ t_{j_0+1})$ $\pi(t)=$ $=\max\limits_{j\in I_t^-}f_j(t)$ выпуклая функция и $\gamma(t)=\min\limits_{j\in I_t^+}f_j(t)$ вогнутая функция. Отсюда следует, что область параметров t, при которых $\gamma(t)-\pi(t)\geqslant 0$, связная. Число интервалов $(t_j;\ t_{j+1})$ $s-1$, и при достаточно больших $|t|$ $\gamma(t)-\pi(t)\geqslant 0$, следовательно, $H(L_t)\leqslant s+1$. Теорема доказана.

Легко убедиться, что такая идея доказательства приложима при условиях $\vec{c}_2\geqslant\vec{0}$ и $D_j\geqslant 0$ $(j=1,2,\dots,s)$ или $\vec{c}_2\leqslant\vec{0}$ и $D_j\leqslant 0$ $(j=1,2,\dots,s)$. В общем случае функции $\pi(t)$ и $\gamma(t)$ не обладают требуемыми свойствами выпуклости и вогнутости, в чем и заключается трудность распространения теоремы 4 на все параметрические задачи рассматриваемого класса.

3. Вычисление векторов $\vec{c}_i$

Во многих приложениях представляет интерес фактическое нахождение векторов $\vec{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, которые соответствуют заданной параметрической задаче. Построение соответствующего множества L_t при помощи этих векторов уже под силу современным быстродействующим вычислительным машинам. Ниже мы укажем на одну возможность вычисления векторов $\vec{c}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, которая в некоторых случаях применима.

При доказательстве теоремы 1 мы пользовались следствием 2А статьи [3], согласно которому найдутся векторы $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_s$ такие, что решением системы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, будут векторы $\vec{u}(\lambda) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \vec{u}_j$, $\lambda_1 \geqslant 0$ $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \geqslant 0$ и только эти векторы. Оказывается, что существует очень простой и хорошо поддающийся программированию алгоритм вычисления векторов $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_s$. Из доказательства теоремы 1 видно, что при фактическом знании векторов $\vec{u}_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$, получение векторов $\vec{c}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ уже не представляет труда.

Множество векторов $\vec{u}_j$ для системы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n \leqslant s)$, которые удовлетворяют следствию 2А статьи [3], обозначим C_n. Определяем

$$U_n^+ = \{\vec{u}_j : \vec{u}_j \in C_n,\ \vec{u}_j \cdot \vec{a}_{n+1} > 0\},\quad U_n^0 = \{\vec{u}_j : \vec{u}_j \in C_n,\ \vec{u}_j \cdot \vec{a}_{n+1} = 0\},$$

$$U_n^- = \{\vec{u}_j : \vec{u}_j \in C_n,\ \vec{u}_j \cdot \vec{a}_{n+1} < 0\} \quad \text{и} \quad U_n = \{\vec{u}_{ij} : \vec{u}_{ij} = \lambda_i \vec{u}_i + \lambda_j \vec{u}_j,$$

$$\lambda_i + \lambda_j = 1,\quad \lambda_i \geqslant 0,\ \lambda_j \geqslant 0,\quad \vec{u}_{ij} \cdot \vec{a}_{n+1} = 0,\quad \vec{u}_i \in U_n^+,\ \vec{u}_j \in U_n^-\}.$$

Имеет место следующая

Теорема 5.

$$C_{n+1} = \begin{cases} U_n^+ \cup U_n^0 \cup U_n &, \text{ если } U_n^+ \neq \Theta \text{ и } U_n^- \neq \Theta, \\ C_n &, \text{ если } U_n^- = \Theta \text{ или } C_n = U_n^0, \\ \{\vec{0}\} &, \text{ если } U_n^+ = \Theta \text{ и } U_n^0 = \Theta. \end{cases}$$

Доказательство. Интерес представляют случаи $U_n^+ \neq \Theta$ и $U_n^- \neq \Theta$, при остальных условиях доказательство тривиальное. Пусть $A^{\angle}$ выпуклый конус, образующие которого суть элементы конечного множества A. Из определения множеств U_n^+, U_n^0, U_n следует, что $(U_n^+ \cup U_n^0 \cup U_n)^{\angle} \subset (C_{n+1})^{\angle}$. Докажем обратное включение указанных множеств. Так как $(C_{n+1})^{\angle} \subset (C_n)^{\angle}$, то $\vec{u}_0 \in (C_n)^{\angle}$. Если $\vec{u}_0 \in (U_n^+ \cup U_n^0)^{\angle}$, то очевидно $\vec{u}_0 \in (U_n^+ \cup U_n^0 \cup U_n)^{\angle}$. По определению $(C_n)^{\angle}$ имеем $\vec{u}_0 = $

$$= \sum_{\vec{u}_i \in U_n^+ \cup U_n^0} \lambda_i^{(0)} \vec{u}_i + \sum_{\vec{u}_k \in U_n^-} \gamma_k^{(0)} \vec{u}_k,\ \vec{\lambda}^{(0)} \geqslant \vec{0},\ \vec{\gamma}^{(0)} \geqslant \vec{0}. \text{ Если } \vec{u}_0 \notin (U_n^+ \cup U_n^0)^{\angle},$$

то должен быть $\vec{\lambda}^{(0)} \neq \vec{0}$ и $\vec{\gamma}^{(0)} \neq \vec{0}$, так как $\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{u}_0 \geqslant 0$; следовательно, векторы $\vec{z} = 2 \sum\limits_{\vec{u}_i \in U_n^+ \cup U_n^-} \lambda_i^{(0)} \vec{u}_i$ и $\vec{y} = 2 \sum\limits_{\vec{u}_k \in U_n^-} \gamma_k^{(0)} \vec{u}_k$ не равны, причем $\vec{z}, \vec{y} \in (C_n)^{\angle}$.

Найдется $\lambda' \in (0; 1)$ такое, что $\vec{a}_{n+1} \cdot [\lambda' \vec{z} + (1-\lambda')\vec{y}] = 0$, откуда $\lambda' = \dfrac{\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{y}}{\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{y} - \vec{a}_{n+1} \cdot \vec{z}}$. Пусть $[\vec{x}_1; \vec{x}_2] = \{\vec{x} : \vec{x} = \lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2, \ \lambda \in [0; 1]\}$.

Обозначим $\vec{z}_1 = \lambda' \vec{z} + (1-\lambda')\vec{y}$, из сказанного следует, что $\vec{u}_0 \in [\vec{z}; \vec{z}_1] \subset [\vec{z}; \vec{y}]$, следовательно, $\vec{u}_0 = \mu' \vec{z} + (1-\mu')\vec{z}_1$, где $\mu' \in [0; 1]$. Очевидно, что $1 - \lambda' = \dfrac{\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{z}}{\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{z} - \vec{a}_{n+1} \cdot \vec{y}}$. Подставляя и вычисляя, имеем $\vec{z}_1 = \lambda' \vec{z} +$

$$+ (1-\lambda')\vec{y} = \frac{2}{\sum\limits_{\vec{u}_i \in U_n^+} \lambda_i^{(0)} (\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{u}_i) - \sum\limits_{\vec{u}_k \in U_n^-} \gamma_k^{(0)} (\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{u}_k)} \times$$

$$\times \left[\sum_{\vec{u}_i \in U_n^+, \vec{u}_k \in U_n^-} (\lambda_i^{(0)} \gamma_k^{(0)} (-\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{u}_k) \vec{u}_i + \gamma_k^{(0)} \lambda_i^{(0)} (\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{u}_i) \vec{u}_k) \right]. \tag{8}$$

Из соотношения (8) легко видно, что $\vec{u}_0 \in (U_n^+ \cup U_n^0 \cup U_n)^{\angle}$, следовательно, $(C_{n+1})^{\angle} \subset (U_n^+ \cup U_n^0 \cup U_n)^{\angle}$. Теорема доказана.

Хотя вычисление векторов множества U_n очень простое, но правило построения множества C_{n+1} на основе теоремы 5 практически не всегда применимо из-за громоздкой численности множества U_n; тем более, что множество U_{n+1} строится исходя из множества C_{n+1}. Этот недостаток вызван тем, что множество $U_n^0 \cup U_n \cup U_n^+$ содержит неэкстремальные образующие (определение см. в [3]) конуса $(C_{n+1})^{\angle}$, которые совершенно лишние.

Если матрица A системы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ квадратичная, то может быть применима следующая

Теорема 6. *Пусть n ранг системы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и соответствующая обратная матрица A^{-1}, тогда $C_n = \{\vec{a}_1'; \ldots; \vec{a}_n'\}$, где $\vec{a}_i'$ i-тый столбец матрицы A^{-1}.*

Доказательство. Пусть $\vec{u}_0$ такое, что $A\vec{u}_0 = \vec{y}_0 \geqslant \vec{0}$, тогда $\vec{u}_0 = A^{-1}\vec{y}_0$. Если же $\vec{y}^* \geqslant \vec{0}$, то $\vec{u}^* = A^{-1}\vec{y}^*$ является решением системы $A\vec{u} \geqslant 0$. Так как $A^{-1}\vec{y}_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^{(0)} \vec{a}_i'$, то из произвольности $\vec{y}_0 \geqslant \vec{0}$ следует справедливость теоремы. Теорема доказана.

Практически вычисления покажут, что теорему 6 целесообразно в первую очередь применять для квадратичной подсистемы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а затем применить теорему 5.

Если число переменных больше числа неравенств в системе $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то построение множества C_n придется начинать с образующих конуса $(C_1)^{\angle}$. Для построения конуса $(C_1)^{\angle}$ можем поступить следующим образом: $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{m-1}$ являются базисом подпространства $\vec{a}_1 \cdot \vec{u} = 0$, $\vec{u}_m = -\sum_{i=1}^{m-1} \vec{u}_i$, $\vec{u}_{m+1} = \vec{a}_1$ и принимаем $C_1 = \{\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_{m+1}\}$. Легко видеть, что $(C_1)^{\angle} = \{\vec{u} : \vec{a}_1 \cdot \vec{u} \geqslant 0\}$. Для построения конусов $(C_2)^{\angle}$, $(C_3)^{\angle}$, ... можно уже пользоваться теоремой 5. Если множество образующих C_n получено, то вычисление векторов $\vec{c}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, не представляет особого труда, это видно из доказательства теоремы 1.

В заключение отметим, что в связи с вычислительным процессом интерес представляет следующий вопрос: как удалить при помощи приемлемого объема вычислений векторы множества $U_k^0 \cup U_k$, которые удовлетворяют условию $\vec{u}_{i_0} = \sum_{\substack{\vec{u}_i \in U_k^0 \cup U_k \\ i \neq i_0}} \alpha_i \vec{u}_i$, $\alpha_i \geqslant 0$? От успешного решения именно этого вопроса зависит успех применения алгоритма, основанного на теореме 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ягель А. Ю., Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭССР, № 24, 46 (1964).
2. Фань Цзи, О системах линейных неравенств (сб. переводов), М., 1959, 215—262.
3. Голдман А. Дж., Таккер А. У., Многогранные выпуклые конусы (сб. переводов), М., 1959, 142—161.
4. Ягель А. Ю., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, № 4, 382—402 (1964).
5. Карабегов В.-К. И., Ж. вычислит. мат. и матем. физики, 3, № 3, 547—558 (1963).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/VII 1964

A. JÄGEL

LUBATAVATE PARAMEETRITE PIIRKONNA KARAKTERISTIKA ÜHE KLASSI PARAMEETRILISTE LINEAARSETE PROGRAMMEERIMISÜLESANNETE PUHUL

Käesolevas artiklis uuritakse parameetrite t hulgas struktuuri, millest sõltub

$$\Phi(t) = \max_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} \left[(c_1 + tc) x_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j x_j \right],$$

kus

$$\Omega_t = \{\vec{x}(t) : (\vec{a}_1 + t\vec{d}) x_1 + \sum_{j=2}^{n} \vec{a}_j x_j = \vec{b} + t\vec{b}_1, \ \vec{x} \geqslant \vec{0}\}.$$

Tõestatakse, et hulk $L_t=\{t:\Omega_t\neq\Theta\}$ ei tarvitse olla sidus ega kinnine. Hulk L_t määratakse üheselt teatud vektorite $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4 \in R_s$ abil, mille saamiseks tuleb arvutada parameetrilise ülesandega seotud koonuse moodustajad. Vaadeldakse selle koonuse moodustajate faktilist leidmist.

A. JÄGEL

CHARACTERISTICS OF THE REGION OF THE PARAMETER OF ADMISSIBILITY IN A PROBLEM OF PARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING

In the present paper the essential structure of the set of real parameter t is described in case of which there exists an admissible solution: it is necessary to find

$$\Phi(t)=\max_{\vec{x}(t)\in\Omega_t}\left[(c_1+tc)x_1+\sum_{j=2}^{n}c_jx_j\right] \text{ where } \Omega_t=\{\vec{x}(t):(\vec{a}_1+t\vec{d})x_1+\sum_{j=2}^{n}\vec{a}_jx_j=\vec{b}+t\vec{b}_1,\ \vec{x}\geqslant 0\}.$$

It is established that the set $L_t=\{t:\Omega_t\neq\Theta\}$ is not always connected and closed. The set L_t is solely determined by means of certain vectors $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$. The calculation of these vectors is described.