

А. ЯГЕЛЬ

ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРОВ ДОПУСТИМОСТИ ПРИ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Статья посвящена изучению основной структуры множества параметров t , при которых существует допустимое решение следующей задачи: найти $\max_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} \left[(c_1 + tc)x_1 + \sum_{j=2}^n c_j x_j \right]$, где $\Omega_t = \{ \vec{x}(t) : (\vec{a}_1 + t\vec{d})x_1 + \sum_{j=2}^n \vec{a}_j x_j = \vec{b} + t\vec{b}_1, \vec{x} \geq \vec{0} \}$. Устанавливается, что множество $L_t = \{t : \Omega_t \neq \emptyset\}$ не обязательно связное и замкнутое; множество L_t однозначно определяется при помощи некоторых векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4 \in R_s$, получение которых тесно связано с образующими определенного выпуклого многогранного конуса. Рассматривается вычисление образующих этого конуса.

1. Постановка проблемы

Параметрическая задача рассматриваемого класса ставится следующим образом: для каждого вещественного t найти

$$\Phi(t) = \max_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} \left[(c_1 + ct)x_1 + \sum_{j=2}^n c_j x_j \right],$$

$$\text{где } \Omega_t = \{ \vec{x}(t) : (\vec{a}_1 + t\vec{d})x_1 + \sum_{j=2}^n \vec{a}_j x_j = \vec{b} + t\vec{b}_1, \vec{x} \geq \vec{0} \},$$

так что при фиксированном t имеем задачу линейного программирования. До сих пор этот класс параметрических задач мало изучен. В данной статье исследуется структура множества параметров, при которых существует допустимое и оптимальное решение соответствующей задачи линейного программирования.

Введем следующие множества параметров: $L_t = \{t : \Omega_t \neq \emptyset\}$, $O_t = \{t : t \in L_t, \Phi(t) < +\infty\}$ и $N_t = \{t : \Psi_t \neq \emptyset\}$, где \emptyset обозначение пустого множества и $\Psi_t = \{ \vec{x}(t) : (\vec{a}_1 + t\vec{d})x_1 + \sum_{j=2}^n \vec{a}_j x_j = \vec{0}, (c_1 + tc)x_1 + \sum_{j=2}^n c_j x_j = 1, \vec{x} \geq \vec{0} \}$. Назовем характеристикой множества $G \subset R$ (R — множество вещественных чисел) минимальное число связных множеств, теоретико-множественной суммой которых является множество G ;

характеристику множества G обозначим $H(G)$ и, если $G = \emptyset$, то принимаем $H(G) = 0$. Из теорем 1, 3, 4 статьи [1] следует, что $H(N_t) \leq 1$ и $O_t = L_t \setminus N_t$ (теоретико-множественная разность двух множеств). Таким образом, основной интерес представляют множество L_t и его характеристика. В статье [1] доказывается, что множество N_t можно получить при помощи решения двух задач линейного программирования, поэтому в дальнейшем построению множества O_t внимания не уделяется.

2. Основные свойства множества L_t

Пусть R_s координатное пространство с размерностью s и \vec{c}_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — векторы этого пространства. Определим следующие функции:

$$f_j(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } j = 0, \\ \frac{c_{j3} + tc_{j4}}{c_{j1} + tc_{j2}}, & \text{если } 1 \leq j \leq s \text{ и } c_{j1} \neq 0 \text{ или } c_{j2} \neq 0, \\ c_{j3} + tc_{j4}, & \text{если } 1 \leq j \leq s \text{ и } c_{j1} = c_{j2} = 0, \\ +\infty, & \text{если } j = s+1, \end{cases}$$

где c_{ji} — j -ая координата вектора \vec{c}_i . Для $t \in R$ определим следующие множества индексов:

$$I_t^+ = \{j : c_{j1} + tc_{j2} > 0\} \cup \{s+1\},$$

$$I_t^- = \{j : c_{j1} + tc_{j2} < 0\} \cup \{0\},$$

$$I_t^0 = \{j : c_{j1} = c_{j2} = 0\}.$$

Если $I_t^0 = \emptyset$, то считаем, что $\min_{j \in I_t^0} f_j(t) = 1$. Множество решений уравнений $c_{j1} + c_{j2}t = 0$, $j \notin I_t^0$, обозначим K_t . Имеет место следующая

Теорема 1 (основная теорема). Для заданного $\{\Omega_t\}$ найдутся целое число s и векторы $\vec{c}_i \in R_s$ ($i = 1, 2, 3, 4$) такие, что множество $L_t \setminus K_t = \{t : \min_{j \in I_t^+} f_j(t) \geq \max_{j \in I_t^-} f_j(t), \min_{j \in I_t^0} f_j(t) \geq 0\}$.

Доказательство. По теореме 1 [2] множество $\Omega_t \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда при любом решении системы $A^T(t) \vec{u} \geq \vec{0}$ (T — транспонированная) имеет место $\vec{u} \cdot \vec{b}(t) \geq 0$, где $\vec{b}(t) = \vec{b} + t\vec{b}_1$ и $A(t) = [a_1 + td, a_2, \dots, a_n]$; это обстоятельство запишем $A^T(t) \vec{u} \geq \vec{0} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{b}(t) \geq 0$. Система $A^T(t) \vec{u} \geq \vec{0}$ в развернутом виде следующая:

$$\begin{cases} \vec{a}_1(t) \cdot \vec{u} \geq 0, \\ \vec{a}_i \cdot \vec{u} \geq 0, & i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

По следствию 2А статьи [3] найдутся векторы $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s$ такие, что решением подсистемы $\vec{a}_i \vec{u} \geq 0, i = 2, 3, \dots, n$, будет любой вектор $\vec{u}(\vec{\lambda}) = \sum_{j=1}^s \lambda_j \vec{u}_j$, где $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_s) \geq \vec{0}$ и только те векторы. Подставляя $\vec{u}(\vec{\lambda})$

в неравенство $\vec{a}_1(t) \cdot \vec{u} \geq 0$, должно быть $\vec{a}_1(t) \cdot \vec{u}(\vec{\lambda}) \geq 0 \rightarrow \vec{u}(\vec{\lambda}) \cdot \vec{b}(t) \geq 0$. Обозначим $\vec{u}_j \cdot \vec{a}_1 = c_{j1}, \vec{u}_j \cdot \vec{d} = c_{j2}, \vec{u}_j \cdot \vec{b} = c_{j3}$ и $\vec{u}_j \cdot \vec{b}_1 = c_{j4}, j = 1, 2, \dots, s$.

Следовательно,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\lambda} \cdot (\vec{c}_1 + \vec{c}_2 \cdot t) \geq 0, \\ \vec{\lambda} \geq \vec{0}, \end{array} \right. \rightarrow \vec{\lambda} \cdot (\vec{c}_3 + t\vec{c}_4) \geq 0. \quad (1)$$

Если последнее обстоятельство не имеет места, то совместна система

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\lambda}(\vec{c}_1 + t\vec{c}_2) \geq 0, \\ \vec{\lambda}(\vec{c}_3 + t\vec{c}_4) \leq -1, \\ \vec{\lambda} \geq \vec{0}. \end{array} \right. \quad (2)$$

Для совместности системы (2) имеем (по теореме 1 статьи [2])

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(-c_{j1} - tc_{j2}) + u_2(c_{j3} + tc_{j4}) \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \\ u_1 \geq 0, \quad \rightarrow -u_2 \geq 0, \\ u_2 \geq 0. \end{array} \right. \quad (3)$$

Пусть (u_1, u_2) — решение системы (3); так как $u_2 \geq 0$, то при $u_2 > 0$ система (2) несовместна, но тогда на множестве решений системы (1) $\vec{\lambda} \cdot (\vec{c}_3 + t\vec{c}_4) \geq 0$. Если в любом решении системы (3) координата $u_2 = 0$, то система (2) совместна, но тогда на множестве решений системы (1) $\vec{\lambda} \cdot (\vec{c}_3 + t\vec{c}_4) < 0$. Таким образом, необходимо, чтобы $u_2 > 0$. Обозначим $\frac{u_1}{u_2} = \mu$, следовательно, $\Omega_t \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда совместна система

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \cdot (c_{j1} + tc_{j2}) \leq c_{j3} + tc_{j4}, \\ \mu \geq 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Если $j \in I_t^0$, то очевидно должно быть $c_{j3} + tc_{j4} \geq 0$, откуда для совместной системы (4) необходимо $\min_{j \in I_t^0} f_j(t) \geq 0$. Если же при t_0 имеем

$c_{j_0 1} + t_0 c_{j_0 2} = 0$ и $j_0 \notin I_t^0$, то $t_0 \in K_t$, следовательно, $t_0 \notin L_t \setminus K_t$. Для индекса $j \in I_t^0 \cup I_t^-$ либо $\mu \geq f_j(t')$, либо $\mu \leq f_j(t')$. Из сказанного следует, что $L_t \setminus K_t = \{t : \min_{j \in I_t^+} f_j(t) \geq \max_{j \in I_t^-} f_j(t), \min_{j \in I_t^0} f_j(t) \geq 0\}$. Теорема доказана.

Граничную точку t_0 множества L_t в дальнейшем называем критическим параметром этого множества.

Следствие 1. Число критических параметров множества L_t конечное.

Доказательство вытекает из вида функции $f_j(t)$ и из конечности множества K_t .

Следствие 2. Характеристика множества L_t конечная.

Доказательство вытекает из следствия 1.

Следствие 3. Если t_0 критический параметр и $t_0 \notin L_t$, то $t_0 \in K_t$.

Доказательство. Пусть последовательность $\{t_k\}$ такая, что $t_k \in L_t$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = t_0$. Так как при любом t_k система (4) совместна, то начиная с некоторого k_0 необходимо выполнение следующих условий: если $k \geq k_0$, то найдется индекс j (не зависящий от k) такой, что $c_{j3} + t_k c_{j4} < 0$, $c_{j1} + t_k c_{j2} < 0$, $c_{j3} + t_0 c_{j4} < 0$ и $c_{j1} + t_0 c_{j2} = 0$. Из последних соотношений вытекает справедливость следствия.

Имеет место и обратная (к теореме 1)

Теорема 2. Для любых $\vec{c}_j \in R_s$, $i = 1, 2, 3, 4$, можно поставить в соответствие $\{\Omega_t\}$ так, что $\Omega_t \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $t \in L_t$, где L_t множество параметров t , при которых совместна система (4).

Доказательство. Для определения векторов $\vec{a}_1, \vec{d}, \vec{b}, \vec{b}_1$ и \vec{u}_i имеем систему

$$\begin{cases} c_{j1} = u_{1j} \cdot a_{11} + u_{2j} \cdot a_{21} + \dots + u_{mj} \cdot a_{m1}, \\ c_{j2} = u_{1j} \cdot d_1 + u_{2j} \cdot d_2 + \dots + u_{mj} \cdot d_m, \\ c_{j3} = u_{1j} \cdot b_1 + u_{2j} \cdot b_2 + \dots + u_{mj} \cdot b_m, \\ c_{j4} = u_{1j} \cdot b_{11} + u_{2j} \cdot b_{21} + \dots + u_{mj} \cdot b_{m1}. \end{cases} \quad (j = 1, 2, \dots, s) \quad (5)$$

Одно из решений системы (5) следующее: $m = 4$; $a_{11} = 1, a_{i1} = 0$ ($i = 2, 3, 4$); $d_2 = 1, d_i = 0$, ($i = 1, 3, 4$); $b_3 = 1, b_i = 0$, ($i = 1, 2, 4$); $b_{11} = 1, b_{i1} = 0$, ($i = 1, 2, 3$); $u_{ij} = c_{ji}$, ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, \dots, s$). Обозначим $\vec{u}_j = (c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4})$. По следствию 4А статьи [3] найдутся векторы $\vec{a}_i \in R_4$, $i = 2, 3, \dots, p$, такие, что множество решений системы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geq 0$, $i = 2, 3, \dots, p$, совпадет со множеством $\{\vec{u}\} = \{\vec{u}: \sum_{j=1}^s \lambda_j \vec{u}_j = \vec{u}, \vec{\lambda} \geq \vec{0}\}$.

Если принимать $\Omega_t = \{x(t): A(t)x = \vec{b}(t), x \geq \vec{0}\}$, где $\vec{b}(t) = \vec{b} + t\vec{b}_1$, $A(t) = [\vec{a}_1 + t\vec{d}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_p]$ и векторы $\vec{b}, \vec{b}_1, \vec{d}, \vec{a}_1$ суть решение системы (5), то, очевидно, $\Omega_t \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $t \in L_t$. Если же система (4) противоречива при любом $t \in R$, то и при любом $t \in R$ множество $\Omega_t = \emptyset$. Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2, взятые вместе, дают, что с заданием четырех векторов \vec{c}_i , которые соответствуют данному множеству $\{\Omega_t\}$, полностью определяется множество L_t , т. е. его критические параметры, принадлежность их

и максимум достигаются на индексах $k = -1$ и соответственно $k = 0$. Это вытекает из того, что можем выбрать $c_{j+1,4}$ ($j \leq s-1$) так, что с увеличением k величина $1 + \frac{1}{2k+\varepsilon}$ уменьшается, а с умень-

шением k эта величина увеличивается. Пусть c_4 фиксирован и при некотором $\varepsilon \in (0; 1)$ условия (7) выполнены; покажем, что множество параметров на интервале V_j ($j = 1, 2, \dots, s-1$) связное, т. е. множество параметров, которые удовлетворяют условию (7). Из условий (7) имеем, что $\frac{c_{j+1,4}}{c_{j,4}} \geq 1 + \frac{2}{\varepsilon - \varepsilon^2} = g(\varepsilon)$. Пусть $\min_{1 \leq j \leq s-1} \frac{c_{j+1,4}}{c_{j,4}} = \frac{c_{j_0+1,4}}{c_{j_0,4}} = c_0$, следовательно, $g(\varepsilon) \leq c_0$. Очевидно, что $\min_{\varepsilon \in (0; 1)} g(\varepsilon) = g(\frac{1}{2})$; левее и правее

от точки $\varepsilon = \frac{1}{2}$ функция $g(\varepsilon)$ на интервале $(0; 1)$ строго возрастающая, отсюда вытекает связность соответствующего множества параметров, которые обозначим S_j ($j = 1, 2, \dots, s-1$). Пусть $S_0 = \{t : t \geq -1\}$ и $S_s = \{t : t < -2s\}$. Применяя теорему 2, можем построить $\{\Omega_t\}$ так, что соответствующее $L_t = \bigcup_{j=0}^s S_j$. Из доказанного вытекает, что $H(L_t) =$

$$= \sum_{j=0}^s H(S_j) = s + 1. \text{ Теорема доказана.}$$

Является ли полученный результат наилучшим в том смысле, что при любых $c_i \in R_s$ ($i = 1, 2, 3, 4$) для соответственного множества L_t имеем $H(L_t) \leq s + 1$, пока не известно. Ответ можем дать только в частном случае, именно справедлива следующая

Теорема 4. Если $\vec{c}_i \in R_s$ ($i = 1, 2, 3, 4$) такие, что $\vec{c}_2 > \vec{0}$ и $D_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$), то $H(L_t) \leq s + 1$, где $D_j = \begin{vmatrix} c_{j1} & c_{j2} \\ c_{j3} & c_{j4} \end{vmatrix}$.

Доказательство. Детальное доказательство опускаем, а приводим только его идею. Так как $\frac{df_j(t)}{dt} = \frac{D_j}{(c_{j1} + tc_{j2})^2}$ ($j = 1, 2, \dots, s$), то по условиям теоремы функции $f_j(t)$ неубывающие и нелинейные. Обозначим решение уравнения $c_{j1} + tc_{j2} = 0$ через t_j . В области $(-\infty; t_j)$ функция $f_j(t)$ выпуклая и в области $(t_j; +\infty)$ — вогнутая. Можем считать, что $t_j \leq t_{j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, s-1$). Рассмотрим непустой интервал $(t_{j_0}; t_{j_0+1})$. Легко видеть, что на этом интервале при $j \geq j_0 + 1$ имеем $j \in I_t^-$ и при $j \leq j_0$ $j \in I_t^+$. Из сказанного следует, что на интервале $(t_{j_0}; t_{j_0+1})$ $\pi(t) = \max_{j \in I_t^-} f_j(t)$ выпуклая функция и $\gamma(t) = \min_{j \in I_t^+} f_j(t)$ вогнутая функция.

Отсюда следует, что область параметров t , при которых $\gamma(t) - \pi(t) \geq 0$, связная. Число интервалов $(t_j; t_{j+1})$ $s - 1$, и при достаточно больших $|t|$ $\gamma(t) - \pi(t) \geq 0$, следовательно, $H(L_t) \leq s + 1$. Теорема доказана.

Легко убедиться, что такая идея доказательства приложима при условиях $\vec{c}_2 \geq \vec{0}$ и $D_j \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$) или $\vec{c}_2 \leq \vec{0}$ и $D_j \leq 0$ ($j = 1, 2, \dots, s$). В общем случае функции $\pi(t)$ и $\gamma(t)$ не обладают требуемыми свойствами выпуклости и вогнутости, в чем и заключается трудность распространения теоремы 4 на все параметрические задачи рассматриваемого класса.

3. Вычисление векторов \vec{c}_i

Во многих приложениях представляет интерес фактическое нахождение векторов \vec{c}_i ($i = 1, 2, 3, 4$), которые соответствуют заданной параметрической задаче. Построение соответствующего множества L_i при помощи этих векторов уже под силу современным быстродействующим вычислительным машинам. Ниже мы укажем на одну возможность вычисления векторов \vec{c}_i ($i = 1, 2, 3, 4$), которая в некоторых случаях применима.

При доказательстве теоремы 1 мы пользовались следствием 2А статьи [3], согласно которому найдутся векторы $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s$ такие, что решением системы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$, будут векторы $\vec{u}(\lambda) = \sum_{j=1}^s \lambda_j \vec{u}_j, \lambda_i \geq 0, \lambda_1, \dots, \lambda_s \geq 0$ и только эти векторы. Оказывается, что существует очень простой и хорошо поддающийся программированию алгоритм вычисления векторов $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_s$. Из доказательства теоремы 1 видно, что при фактическом знании векторов $\vec{u}_j, j = 1, 2, \dots, s$, получение векторов $\vec{c}_i, i = 1, 2, 3, 4$ уже не представляет труда.

Множество векторов \vec{u}_j для системы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geq 0$ ($i = 1, \dots, n \leq s$), которые удовлетворяют следствию 2А статьи [3], обозначим C_n . Определяем

$$U_n^+ = \{\vec{u}_j : \vec{u}_j \in C_n, \vec{u}_j \cdot \vec{a}_{n+1} > 0\}, \quad U_n^0 = \{\vec{u}_j : \vec{u}_j \in C_n, \vec{u}_j \cdot \vec{a}_{n+1} = 0\},$$

$$U_n^- = \{\vec{u}_j : \vec{u}_j \in C_n, \vec{u}_j \cdot \vec{a}_{n+1} < 0\} \quad \text{и} \quad U_n = \{\vec{u}_{ij} : \vec{u}_{ij} = \lambda_i \vec{u}_i + \lambda_j \vec{u}_j,$$

$$\lambda_i + \lambda_j = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \lambda_j \geq 0, \quad \vec{u}_{ij} \cdot \vec{a}_{n+1} = 0, \quad \vec{u}_i \in U_n^+, \vec{u}_j \in U_n^-\}.$$

Имеет место следующая

Теорема 5.

$$C_{n+1} = \begin{cases} U_n^+ \cup U_n^0 \cup U_n^- & , \text{ если } U_n^+ \neq \emptyset \text{ и } U_n^- \neq \emptyset, \\ C_n & , \text{ если } U_n^- = \emptyset \text{ или } C_n = U_n^0, \\ \{\vec{0}\} & , \text{ если } U_n^+ = \emptyset \text{ и } U_n^0 = \emptyset. \end{cases}$$

Доказательство. Интерес представляют случаи $U_n^+ \neq \emptyset$ и $U_n^- \neq \emptyset$, при остальных условиях доказательство тривиальное. Пусть $A \subset$ выпуклый конус, образующие которого суть элементы конечного множества A . Из определения множеств U_n^+, U_n^0, U_n^- следует, что $(U_n^+ \cup U_n^0 \cup U_n^-) \subset (C_{n+1}) \subset (C_n) \subset$. Докажем обратное включение указанных множеств.

Так как $(C_{n+1}) \subset (C_n) \subset$, то $\vec{u}_0 \in (C_n) \subset$. Если $\vec{u}_0 \in (U_n^+ \cup U_n^0) \subset$, то очевидно $\vec{u}_0 \in (U_n^+ \cup U_n^0 \cup U_n^-) \subset$. По определению $(C_n) \subset$ имеем $\vec{u}_0 = \sum_{\vec{u}_i \in U_n^+ \cup U_n^0} \lambda_i^{(0)} \vec{u}_i + \sum_{\vec{u}_k \in U_n^-} \gamma_k^{(0)} \vec{u}_k, \vec{\lambda}^{(0)} \geq \vec{0}, \vec{\gamma}^{(0)} \geq \vec{0}$. Если $\vec{u}_0 \notin (U_n^+ \cup U_n^0) \subset$,

то должен быть $\vec{\lambda}^{(0)} \neq \vec{0}$ и $\vec{\gamma}^{(0)} \neq \vec{0}$, так как $\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{u}_0 \geq 0$; следовательно, векторы $\vec{z} = 2 \sum_{\vec{u}_i \in U_n^+ \cup U_n^-} \lambda_i^{(0)} \vec{u}_i$ и $\vec{y} = 2 \sum_{\vec{u}_k \in U_n^-} \gamma_k^{(0)} \vec{u}_k$ не равны, причем $\vec{z}, \vec{y} \in (C_n)^\circ$.

Найдется $\lambda' \in (0; 1)$ такое, что $\vec{a}_{n+1} \cdot [\lambda' \vec{z} + (1 - \lambda') \vec{y}] = 0$, откуда $\lambda' = \frac{\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{y}}{\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{z} - \vec{a}_{n+1} \cdot \vec{y}}$. Пусть $[x_1; x_2] = \{x : x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \lambda \in [0; 1]\}$.

Обозначим $\vec{z}_1 = \lambda' \vec{z} + (1 - \lambda') \vec{y}$, из сказанного следует, что $\vec{u}_0 \in [\vec{z}; \vec{z}_1] \subset [\vec{z}; \vec{y}]$, следовательно, $\vec{u}_0 = \mu' \vec{z} + (1 - \mu') \vec{z}_1$, где $\mu' \in [0; 1]$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \text{что } 1 - \lambda' &= \frac{\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{z}}{\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{z} - \vec{a}_{n+1} \cdot \vec{y}}. \text{ Подставляя и вычисляя, имеем } \vec{z}_1 = \lambda' \vec{z} + \\ &+ (1 - \lambda') \vec{y} = \frac{2}{\sum_{\vec{u}_i \in U_n^+} \lambda_i^{(0)} (\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{u}_i) - \sum_{\vec{u}_k \in U_n^-} \gamma_k^{(0)} (\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{u}_k)} \times \\ &\times \left[\sum_{\vec{u}_i \in U_n^+, \vec{u}_k \in U_n^-} (\lambda_i^{(0)} \gamma_k^{(0)} (-\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{u}_k) \vec{u}_i + \gamma_k^{(0)} \lambda_i^{(0)} (\vec{a}_{n+1} \cdot \vec{u}_i) \vec{u}_k) \right]. \quad (8) \end{aligned}$$

Из соотношения (8) легко видно, что $\vec{u}_0 \in (U_n^+ \cup U_n^0 \cup U_n^-)^\circ$, следовательно, $(C_{n+1})^\circ \subset (U_n^+ \cup U_n^0 \cup U_n^-)^\circ$. Теорема доказана.

Хотя вычисление векторов множества U_n очень простое, но правило построения множества C_{n+1} на основе теоремы 5 практически не всегда применимо из-за громоздкой численности множества U_n ; тем более, что множество U_{n+1} строится исходя из множества C_{n+1} . Этот недостаток вызван тем, что множество $U_n^0 \cup U_n^- \cup U_n^+$ содержит неэкстремальные образующие (определение см. в [3]) конуса $(C_{n+1})^\circ$, которые совершенно лишние.

Если матрица A системы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) квадратичная, то может быть применима следующая

Теорема 6. Пусть n ранг системы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и соответствующая обратная матрица A^{-1} , тогда $C_n = \{\vec{a}'_1; \dots; \vec{a}'_n\}$, где \vec{a}'_i i -тый столбец матрицы A^{-1} .

Доказательство. Пусть \vec{u}_0 такое, что $A \vec{u}_0 = \vec{y}_0 \geq \vec{0}$, тогда $\vec{u}_0 = A^{-1} \vec{y}_0$. Если же $\vec{y}^* \geq \vec{0}$, то $\vec{u}^* = A^{-1} \vec{y}^*$ является решением системы $A \vec{u} \geq \vec{0}$. Так как $A^{-1} \vec{y}_0 = \sum_{i=1}^n y_i^{(0)} \vec{a}'_i$, то из произвольности $\vec{y}_0 \geq \vec{0}$ следует справедливость теоремы. Теорема доказана.

Практически вычисления покажут, что теорему 6 целесообразно в первую очередь применять для квадратичной подсистемы $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$, а затем применить теорему 5.

Если число переменных больше числа неравенств в системе $\vec{a}_i \cdot \vec{u} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то построение множества C_n придется начинать с образующих конуса $(C_1)^<$. Для построения конуса $(C_1)^<$ можем поступить следующим образом: $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{m-1}$ являются базисом подпространства $\vec{a}_1 \cdot \vec{u} = 0$, $\vec{u}_m = -\sum_{i=1}^{m-1} \vec{u}_i$, $\vec{u}_{m+1} = \vec{a}_1$ и принимаем $C_1 = \{\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_{m+1}\}$. Легко

видеть, что $(C_1)^< = \{\vec{u} : \vec{a}_1 \cdot \vec{u} \geq 0\}$. Для построения конусов $(C_2)^<$, $(C_3)^<$, ... можно уже пользоваться теоремой 5. Если множество образующих C_n получено, то вычисление векторов \vec{c}_i , $i = 1, 2, 3, 4$, не представляет особого труда, это видно из доказательства теоремы 1.

В заключение отметим, что в связи с вычислительным процессом интерес представляет следующий вопрос: как удалить при помощи приемлемого объема вычислений векторы множества $U_k^0 \cup U_k$, которые удовлетворяют условию $\vec{u}_{i_0} = \sum \vec{a}_i \vec{u}_i$, $\vec{a}_i \geq 0$? От успешного решения именно этого

$$\vec{u}_i \in U_k^0 \cup U_k \\ i \neq i_0$$

вопроса зависит успех применения алгоритма, основанного на теореме 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ягель А. Ю., Тр. Ин-та физ. и астрон. АН ЭССР, № 24, 46 (1964).
2. Фань Цзи, О системах линейных неравенств (сб. переводов), М., 1959, 215—262.
3. Голдман А. Дж., Таккер А. У., Многогранные выпуклые конусы (сб. переводов), М., 1959, 142—161.
4. Ягель А. Ю., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, № 4, 382—402 (1964).
5. Карабегов В.-К. И., Ж. вычислит. мат. и матем. физики, 3, № 3, 547—558 (1963).

Институт физики и астрономии
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/VII 1964

A. JÄGEL

LUBATAVATE PARAMEETRITE PIIRKONNA KARAKTERISTIKA ÜHE KLASSI PARAMEETRILISTE LINEAARSETE PROGRAMMEERIMISÜLESANNETE PUHUL

Käesolevas artiklis uuritakse parameetreite t hulgas struktuuri, millest sõltub

$$\Phi(t) = \max_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} \left[(c_1 + tc)x_1 + \sum_{j=2}^n c_j x_j \right],$$

kus

$$\Omega_t = \{ \vec{x}(t) : (\vec{a}_1 + t\vec{d})x_1 + \sum_{j=2}^n \vec{a}_j x_j = \vec{b} + t\vec{b}_1, \vec{x} \geq 0 \}.$$

Tõestatakse, et hulk $L_t = \{t : \Omega_t \neq \emptyset\}$ ei tarvitse olla sidus ega kinnine. Hulk L_t määratakse üheselt teatud vektorite $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4 \in R_s$ abil, mille saamiseks tuleb arvutada parameetrilise ülesandega seotud koonuse moodustajad. Vaadeldakse selle koonuse moodustajate faktilist leidmist.

A. JÄGEL

CHARACTERISTICS OF THE REGION OF THE PARAMETER OF ADMISSIBILITY IN A PROBLEM OF PARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING

In the present paper the essential structure of the set of real parameter t is described in case of which there exists an admissible solution: it is necessary to find $\Phi(t) = \max_{\vec{x}(t) \in \Omega_t} \left[(c_1 + tc)x_1 + \sum_{j=2}^n c_j x_j \right]$ where $\Omega_t = \{x(t) : (a_1 + td)x_1 + \sum_{j=2}^n a_j x_j = \vec{b} + tb_1, x \geq 0\}$.

It is established that the set $L_t = \{t : \Omega_t \neq \emptyset\}$ is not always connected and closed. The set L_t is solely determined by means of certain vectors $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$. The calculation of these vectors is described.