EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÕIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1965.2.04

Т. ТОБИАС

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛА ВИНЕРА

Пусть C — пространство всех непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, удовлетворяющих условию $x(0)=0$, и пусть на пространстве C определена мера Винера [1]. Рассмотрим еще пространства

$$C^{(m)}=\{y(t)\in C^{(m)};\quad y(t)=\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^t (t-u)^{m-1}x(u)\,du\}$$

и

$$C_{1,X}=\{x(t)\in C_{1,X};\quad x(t)\in C,\quad x(1)=X\}.$$

Винеровские интегралы от функционалов, определенных на этих пространствах, обозначим соответственно через

$$\int\limits_C F(x)\,d_W x,\ \int\limits_{C^{(m)}} F(y)\,d_W y \quad\text{и}\quad \int\limits_{C_{1,X}} F(x)\,d^*_{W(1,X)}x.$$

В данной заметке рассматривается вычисление моментов от линейных и квадратичных функционалов на этих пространствах. Эти результаты можно применить к приближенному вычислению интегралов от функционалов специального вида (например от функционалов $F(\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt)$) путем интегрирования отрезка ряда Тэйлора функции $F(u)$. Хотя для вычисления этих интегралов имеются и точные формулы (см., напр., [3]), использование этих формул связано с принципиальными и техническими трудностями.

§ 1

Предварительно докажем одну лемму.

Лемма. *Пусть $F(x,\lambda)$ функционал, определенный для всех $x\in C$ и $\lambda\in(a,b)$, и пусть $F(x)$ суммируем для любого $\lambda\in(a,b)$. Если $\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial\lambda}$ существует и $\sup\limits_{a<\lambda<b}\left|\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|$ суммируема, то при $\lambda\in(a,b)$*

$$\frac{d}{d\lambda}\int\limits_C F(x,\lambda)\,d_W x=\int\limits_C\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial\lambda}\,d_W x.$$

Лемма вытекает из соотношения

$$\frac{F(x,\lambda')-F(x,\lambda'')}{\lambda'-\lambda''}\leqslant\sup_{a<\lambda<b}\left|\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для интеграла по другим рассматриваемым мерам. В дальнейшем будем дифференцировать по параметру под знаком интеграла без указания на эти очевидные свойства.

Выведем одну общую формулу, которая часто облегчает вычисление винеровских интегралов в пространстве $y(t) \in C^{(m)}$.

Приведем один известный результат [5].

Пусть линейное преобразование L переводит один гауссовский процесс $y(t)$ в другой гауссовский процесс $z(t)$:

$$L : y(t) = z(t) + a(t)$$

и пусть

$$a(t) = \int_0^1 R(t,u)\,dg(u), \tag{1.1}$$

где $R(t,u) = My(t)\cdot y(u)$ $(My(t) = 0)$, а $g(u)$ — функция с ограниченной вариацией на отрезке [0,1]. *Тогда*

$$\int_Y F(y)\,d\mu(y) = \int_Z F(z+a)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^1 a(u)\,dg(u) - \int_0^1 x(u)\,dg(u)\right]d\mu(z). \tag{1.2}$$

В рассматриваемом случае

$$R(t,u) = \int_{C^{(m)}} y(t)y(u)\,d_W y = \frac{1}{2(m!)^2}\int_0^{\min(t,u)} (t-\tau)^m (u-\tau)^m\,d\tau.$$

Найдем по формуле (1.1) функцию $g(u)$ (предположим, что $g(u)$ — непрерывная слева функция с ограниченной вариацией). Имеем:

$$a(t) = \frac{1}{2(m!)^2}\int_0^t\int_0^u (t-\tau)^m (u-\tau)^m\,d\tau\,dg(u) +$$

$$+\frac{1}{2(m!)^2}\int_t^1\int_0^t (t-\tau)^m (u-\tau)^m\,d\tau\,dg(u) =$$

$$=\frac{1}{2(m!)^2}g(1)\int_0^t (t-\tau)^m(1-\tau)^m\,d\tau -$$

$$-\frac{m}{2(m!)^2}\int_0^t g(u)\int_0^u (t-\tau)^m(u-\tau)^{m-1}\,d\tau\,du -$$

$$-\frac{m}{2(m!)^2}\int_t^1 g(u)\int_0^t (t-\tau)^m(u-\tau)^{m-1}\,d\tau\,du.$$

Продифференцировав это равенство $2m+1$ раз, получим

$$a^{(2m+1)}(t) = \frac{(-1)^{m+1}}{2}g(t) + \frac{(-1)^m}{2}g(1).$$

Отсюда видно, что $a^{(2m+1)}(1) = 0$, поэтому можно взять

$$g(u) = 2(-1)^{m+1}\,a^{(2m+1)}(u),$$

при этом

$$a(0)=a'(0)=\ldots=a^{(m)}(0)=a^{(m+1)}(1)=\ldots=a^{(2m+1)}(1)=0 \tag{1.3}$$

и $a^{(2m+1)}(t)$ является непрерывной слева функцией с ограниченной вариацией. Если $a(t)$ удовлетворяет вышеуказанным свойствам, то можно воспользоваться равенством (1.2). Ввиду условий (1.3) $LC^{(m)}=C^{(m)}$ и

$$\int_0^1 a(u)\,dg(u)=2(-1)^{m+1}\int_0^1 a(u)\,da^{(2m+1)}(u)=2\int_0^1 [a^{(m+1)}(s)]^2\,ds,$$

поэтому

$$\int_{C^{(m)}} F(y)\,d_W y=\exp\left\{-\int_0^1 [a^{(m+1)}(s)]^2 ds\right\}\times$$

$$\times\int_{C^{(m)}} F(z+a)\exp\left[2(-1)^{m+1}\int_0^1 a^{(2m+1)}(t)\,dz(t)\right]d_W z. \tag{1.4}$$

Конкретным выбором функционала $F(x)$ и функции $a(t)$ получим различные формулы интегрирования.

Если $F(y)\equiv 1$, то

$$\int_{C^{(m)}} \exp\left[2(-1)^{m+1}\int_0^1 a^{(2m+1)}(s)\,dy(s)\right]d_W y=\exp\left\{\int_0^1 [a^{(m+1)}(s)]^2 ds\right\}.$$

Обозначим $(-1)^{m+1}a^{(2m+1)}(s)=b(s)$, тогда в силу условий (1.3)

$$a^{(m+1)}(s)=-\int_s^1\int_{t_{m-1}}^1\ldots\int_{t_1}^1 b(u)\,du=c(s)$$

и

$$\int_{C^{(m)}} \exp\left[2\int_0^1 b(s)\,dy(s)\right]d_W y=\exp\left[\int_0^1 c^2(s)\,ds\right].$$

Примем $b(s)=\dfrac{\lambda(1-s)}{2}$. Тогда

$$2\int_0^1 b(s)\,dy(s)=\lambda\int_0^1 y(s)\,ds,$$

$$c(s)=-\frac{\lambda(1-s)^{m+1}}{2(m+1)!}$$

и

$$\int_{C^{(m)}} \exp\left[\lambda\int_0^1 y(s)\,ds\right]d_W y=\exp\left\{\frac{\lambda^2}{4(2m+3)[(m+1)!]^2}\right\}. \tag{1.5}$$

Обозначим $\alpha_n^m = \int\limits_{C^{(m)}} \left[\int\limits_0^1 y(s)\,ds \right]^n d_W y.$

Продифференцировав обе части равенства (1.5) n раз по λ и приравняв $\lambda = 0$, получим:

$$\alpha_n^m = \begin{cases} 0 & , \text{ если } n = 2k-1, \\ \dfrac{(2k-1)!!}{2^k(2m+3)^k[(m+1)!]^{2k}}, & \text{ если } n = 2k. \end{cases}$$

Даем рекуррентные соотношения для вычисления величин

$$\beta_n = \int\limits_{C_{1,X}} \left[\int\limits_0^1 x(t)\,dt \right]^n d^*_{W(1,X)} x.$$

Отметим формулу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^n e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = \begin{cases} 0 & , \text{ если } n = 2k-1, \\ \sigma^{2k}(2k-1)!!, & \text{ если } n = 2k, \end{cases} \tag{1.6}$$

которая дает значения моментов гауссовской случайной величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2.

Если $x(t) \in C_{1,X}$, то функционал $x(t_1)$ является гауссовской случайной величиной. Так как

$$\int\limits_{C_{1,X}} x(t_1)\,d^*_{W(1,X)} x = \int\limits_C [x(t_1) - t_1 x(1) + t_1 X]\,d_W x = t_1 X,$$

то рассмотрим центрированную случайную величину $x(t_1) - t_1 X$ с корреляционной функцией

$$\int\limits_{C_{1,X}} [x(t_1) - t_1 X][x(t_2) - t_2 X]\,d^*_{W(1,X)} x =$$
$$= \int\limits_C [x(t_1) - t_1 x(1)][x(t_2) - t_2 x(1)]\,d_W x =$$
$$= \frac{1}{2}[\min(t_1, t_2) - t_1 t_2].$$

По теореме Фубини имеем:

$$\sigma^2 = \int\limits_{C_{1,X}} \left[\int\limits_0^1 (x(t) - tX)\,dt \right]^2 d^*_{W(1,X)} x =$$
$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_{C_{1,X}} [x(t_1) - t_1 X][x(t_2) - t_2 X]\,d^*_{W(1,X)} x\,dt_1\,dt_2 = \frac{1}{24},$$

поэтому по формуле (1.6)

$$\beta_n' = \int\limits_{C_{1,X}} \left[\int\limits_0^1 (x(t) - tX)\,dt\right]^n d^*_{W(1,X)}\, x = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k-1, \\ \dfrac{(2k-1)!!}{24^k}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Используя соотношение между начальными и центральными моментами произвольных случайных величин ([4], стр. 176)

$$\beta_n' = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \beta_k \beta_1^{n-k} + (-1)^{n-1}(n-1)(\beta_1)^n,$$

можно последовательно вычислить все моменты β_n $\left(\text{непосредственно ясно, что } \beta_1 = \frac{X}{2}\right)$. Даем значения некоторых первых моментов:

$$\beta_1 = \frac{X}{2}, \qquad \beta_3 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}X + X^3\right),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} + X^2\right), \qquad \beta_4 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{12} + X^2 + X^4\right).$$

§ 2

Вычислим моменты $\nu_n = \int\limits_C \left[\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right]^n d_W x.$

Известно, что [1]:

$$\left[\int\limits_C \exp\left(\lambda \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right) d_W x\right]^2 = \sec\sqrt{\lambda} = 1 + \frac{1}{2}\lambda + \ldots + \frac{E_n}{(2n)!}\lambda^n + \ldots$$

$$\lambda < \frac{\pi^2}{4},$$

(здесь и в дальнейшем: E_n — числа Эйлера, B_n — числа Бернулли). Продифференцируем обе части равенства n раз по λ:

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m \left[\int\limits_C \exp\left(\lambda \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right) d_W x\right]^{(m)} \left[\int\limits_C \exp\left(\lambda \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right) d_W x\right]^{(n-m)} =$$

$$= \frac{n!\,E_n}{(2n)!} + \frac{(n+1)!\,E_{n+1}}{(2n+2)!}\lambda + \ldots \tag{2.1}$$

Но

$$\left[\int\limits_C \exp\left(\lambda \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right) d_W x\right]^{(m)} = \int\limits_C \left[\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right]^m \exp\left(\lambda \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right) d_W x.$$

Полагая в (2.1) $\lambda = 0$, получим окончательно ($\nu_0 = 1$):

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m \nu_m \nu_{n-m} = \frac{n!\,E_n}{(2n)!}.$$

Первые пять моментов:

$$\nu_1 = \frac{1}{4}, \qquad \nu_2 = \frac{7}{48}, \qquad \nu_3 = \frac{139}{960}, \qquad \nu_4 = \frac{5473}{26880}, \qquad \nu_5 = \frac{51103}{92160}.$$

Вычислим еще моменты $\mu_n = \int\limits_{C_{1,X}} \Big[\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt \Big]^n d\overset{*}{}_{W(1,X)} x$.

Воспользуемся опять известной формулой [1]:

$$e^{-2X^2} \Big[\int\limits_{C_{1,X}} \exp\,[\lambda^2 \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt]\,d\overset{*}{}_{W(1,X)} x \Big]^2 = \lambda \operatorname{cosec} \lambda \cdot e^{-2X^2 \lambda \operatorname{ctg} \lambda}, \tag{2.2}$$

$$\lambda^2 < \pi.$$

Установим некоторые вспомогательные результаты. Так как

$$\lambda \operatorname{cosec} \lambda = 1 + \frac{1}{6}\lambda^2 + \ldots + \frac{2(2^{2k-1}-1)}{(2k)!} B_k \lambda^{2k} + \ldots,$$

то

$$(\lambda \operatorname{cosec} \lambda)^{(n)}_{\lambda=0} = \begin{cases} 1 & \text{, если } n = 0, \\ 0 & \text{, если } n = 2k-1, \\ 2(2^{2k-1}-1) B_k & \text{, если } n = 2k. \end{cases} \tag{2.3}$$

Аналогично, исходя из разложения

$$\lambda \operatorname{ctg} \lambda = 1 - \Big[\frac{\lambda^2}{3} + \ldots + \frac{2^{2k} B_k}{(2k)!} \lambda^{2k} + \ldots\Big],$$

найдем:

$$(\lambda \operatorname{ctg} \lambda)^{(n)}_{\lambda=0} = \begin{cases} 1 & \text{, если } n = 0, \\ 0 & \text{, если } n = 2k-1, \\ -2^{2k} B_k, & \text{если } n = 2k. \end{cases} \tag{2.4}$$

Используя обобщенную формулу Лейбница и (2.4), найдем еще:

$$[(\lambda \operatorname{ctg} \lambda)^m]^{(n)}_{\lambda=0} = [(\lambda \operatorname{ctg} \lambda) \ldots (\lambda \operatorname{ctg} \lambda)]^{(n)}_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_m \geqslant 0 \\ n_1 + \ldots + n_m = n}} \frac{n!}{n_1! \ldots n_m!} (\lambda \operatorname{ctg} \lambda)^{(n_1)} \ldots (\lambda \operatorname{ctg} \lambda)^{(n_m)} \Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_m \geqslant 0 \\ 2n_1 + \ldots + 2n_m = n}} \frac{n!}{(2n_1)! \ldots (2n_m)!} (\lambda \operatorname{ctg} \lambda)^{(2n_1)} \ldots (\lambda \operatorname{ctg} \lambda)^{(2n_m)} \Big|_{\lambda=0} =$$

$$= 2^n n! \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_m \geqslant 0 \\ 2n_1 + \ldots + 2n_m = n}} \frac{(-B_{n_1}) \ldots (-B_{n_m})}{(2n_1)! \ldots (2n_m)!}. \tag{2.5}$$

И, наконец, так как

$$e^{-\lambda \operatorname{ctg} \lambda \cdot (\sqrt{2} X)^2} = 1 - \frac{\lambda \operatorname{ctg} \lambda \cdot (\sqrt{2}\,X)^2}{1!} + \ldots + (-1)^m \frac{(\lambda \operatorname{ctg} \lambda)^m (\sqrt{2}\,X)^{2m}}{m!} + \ldots,$$

то, ввиду (2.5),

$$\Big[e^{-\lambda \operatorname{ctg} \lambda \cdot (\sqrt{2} X)^2}\Big]^{(n)}_{\lambda=0} =$$

$$= 2^n n! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2}\,X)^{2m}}{m!} \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_m \geqslant 0 \\ 2n_1 + \ldots + 2n_m = n}} \frac{(-B_{n_1}) \ldots (-B_{n_m})}{(2n_1)! \ldots (2n_m)!}. \tag{2.6}$$

Продифференцируем $2n$ раз обе части (2.2) по λ и положим $\lambda = 0$:

$$e^{-2X^2} \left(\left[\int\limits_{C_{1,X}} \exp [\lambda^2 \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt] d^*_{W(1,X)} x \right]^2 \right)^{(2n)}_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} C^k_{2n} \, (\lambda \operatorname{cosec} \lambda)^{(2n-k)}_{\lambda=0} \left(e^{-\lambda \operatorname{ctg} \lambda \cdot (\sqrt{2}X)^2}\right)^{(k)}_{\lambda=0}. \tag{2.7}$$

Легко видеть, что

$$\left(\int\limits_{C_{1,X}} \exp [\lambda^2 \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt] \, d^*_{W(1,X)} x \right)^{(2k)}_{\lambda=0} = \frac{(2k)!}{k!} \mu_k.$$

Поэтому, по правилу Лейбница:

$$\left(\left[\int\limits_{C_{1,X}} \exp [\lambda^2 \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt] \, d^*_{W(1,X)} x \right]^2 \right)^{(2n)}_{\lambda=0} = \sum_{k=0}^{n} C^{2k}_{2n} \frac{(2k)!\,(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!} \mu_k \mu_{n-k} =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!} \sum_{k=0}^{n} C^k_n \mu_k \mu_{n-k}. \tag{2.8}$$

Используя (2.7), (2.8), (2.3) и (2.6), найдем соотношение, из которого можно последовательно вычислить все неизвестные μ_k:

$$e^{-2X^2} \frac{(2n)!}{n!} \sum_{k=0}^{n} C^k_n \mu_k \mu_{n-k} = 2(2^{2n-1} - 1) B_n e^{-2X^2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} C^{2k}_{2n} \, 2(2^{2(n-k)-1} - 1) B_{n-k} 2^{2k} (2k)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2}\,X)^{2m}}{m!} \times$$

$$\times \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_m \geqslant 0 \\ 2n_1 + \ldots + 2n_m = 2k}} \frac{(-B_{n_1}) \ldots (-B_{n_m})}{(2n_1)! \ldots (2n_m)!} +$$

$$+ 2^{2n} (2n)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2}\,X)^{2m}}{m!} \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_m \geqslant 0 \\ 2n_1 + \ldots + 2n_m = 2n}} \frac{(-B_{n_1}) \ldots (-B_{n_m})}{(2n_1)! \ldots (2n_m)!}.$$

$$\mu_1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} X^2, \quad \mu_2 = \frac{1}{80} + \frac{1}{10} X^2 + \frac{1}{9} X^4$$

и т. д.

Дадим еще способ для вычисления величин

$$\gamma_n = \int\limits_{C^{(1)}} \left[\int\limits_0^1 y^2(t)\,dt \right]^n d_W y.$$

Так как [2]

$$\left\{ \int\limits_{C^{(1)}} \exp\,[\lambda^4 \int\limits_0^1 y^2(t)\,dt]\,d_W y \right\}^2 = \frac{2}{1+\cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda}, \tag{2.9}$$

то опять надо определить коэффициенты разложения

$$\frac{2}{1+\cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k.$$

Так как

$$(\cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda)^{(2k)}_{\lambda=0} = \sum_{m=0}^{k} C_{2k}^{2m}(-1)^m = \begin{cases} 0 & , \text{ если } k=2l-1, \\ (-1)^l 2^{2l}, & \text{если } k=2l, \end{cases}$$

то

$$1+\cos\lambda\,\mathrm{ch}\,\lambda = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^{2l}}{(4l)!}\lambda^{4l} + 1.$$

Неизвестные коэффициенты b_k можно последовательно найти из очевидного соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k \Big[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^{2l}}{(4l)!}\lambda^{4l} + 1 \Big] = 2.$$

$$b_0 = 1, \quad b_4 = \frac{2}{4!}, \quad b_8 = \frac{34}{7!} \quad \text{и т. д.}$$

Так как

$$\left\{ \int\limits_{C^{(1)}} \exp\,[\lambda^4 \int\limits_0^1 y^2(t)\,dt]\,d_W y \right\}^{(4n)}_{\lambda=0} = \frac{(4n)!}{n!}\gamma_n,$$

то из (2.9) получим искомое соотношение:

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k \gamma_{n-k} = b_{4n}. \quad \gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = \frac{1}{24}, \quad \gamma_2 = \frac{101}{4\cdot 7!}.$$

Пример. Рассмотрим вычисление интеграла

$$I = \int\limits_C \exp\Big[-\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\Big]\,d_W x = \sqrt{\sec\sqrt{-1}} \approx 0{,}80502.$$

Используя ряд Тэйлора, имеем

$$I = \int\limits_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \Big[\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\Big]^n d_W x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \nu_n. \tag{2.10}$$

Можно доказать оценку

$$\nu_n = \int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 dt_1 \ldots dt_n \int\limits_C x^2(t_1)\ldots x^2(t_n)\,d_W x \leqslant \frac{(2n-1)!!}{4^n}.$$

По этой оценке ряд (2.10) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,2^n}$, что оправдывает почленное интегрирование.

Имеем:

$$I = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!} \nu_n + R_{k+1},$$

где

$$|R_{k+1}| \leqslant \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}(2k+2)!!}.$$

Если $k=5$, то $I \approx 0{,}8027$ и $R_6 \leqslant 0{,}0035$ (действительная ошибка $\approx 0{,}0023$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Яглом А. М., Усп. матем. н., **11**, вып. 1 (67), 77—114 (1956).
2. Сульдин А. В., Итоговая науч. конф. Казанск. гос. ун-та за 1962 г., Казань, 1963, стр. 80—82.
3. Cameron R. H., Martin W. T., Journ. Math. and Phys., **23**, No. 4, 195—209 (1944).
4. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, М., Гостехиздат, 1954.
5. Шаташвiлi А. Д., Доп. АН УРСР, № 4, 437—440 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
26/VI 1964

T. TOBIAS

WIENERI INTEGRAALI LIGIKAUDSEST ARVUTAMISEST

Artiklis vaadeldakse Wieneri integraali numbrilist arvutamist funktsionaalidest $F\left(\int_0^1 x(t)dt\right)$ ja $F\left(\int_0^1 x^2(t)dt\right)$ Taylori valemi abil.

T. TOBIAS

THE NUMERICAL EVALUATION OF WIENER'S INTEGRALS

In this paper we consider the numerical approximation of Wiener's integrals for the functionals $F\left(\int_0^1 x(t)dt\right)$ and $F\left(\int_0^1 x^2(t)dt\right)$ by use of their Taylor's expansion.