EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 2

Т. ТОБИАС

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛА ВИНЕРА

Пусть C — пространство всех непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, удовлетворяющих условию $x(0)=0$, и пусть на пространстве C определена мера Винера [1]. Рассмотрим еще пространства

$$C^{(m)}=\{y(t) \in C^{(m)};\ \ y(t)=\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^t (t-u)^{m-1}x(u)du\}$$

и

$$C_{1,X}=\{x(t) \in C_{1,X};\ \ x(t) \in C,\ \ x(1)=X\}.$$

Винеровские интегралы от функционалов, определенных на этих пространствах, обозначим соответственно через

$$\int\limits_C F(x)d_W x,\ \int\limits_{C^{(m)}} F(y)d_W y\ \text{ и } \int\limits_{C_{1,X}} F(x)d^*_{W(1,X)}x.$$

В данной заметке рассматривается вычисление моментов от линейных и квадратичных функционалов на этих пространствах. Эти результаты можно применить к приближенному вычислению интегралов от функционалов специального вида (например от функционалов $F(\int\limits_0^1 x^2(t)dt)$) путем интегрирования отрезка ряда Тэйлора функции $F(u)$. Хотя для вычисления этих интегралов имеются и точные формулы (см., напр., [3]), использование этих формул связано с принципиальными и техническими трудностями.

§ 1

Предварительно докажем одну лемму.

Лемма. *Пусть $F(x,\lambda)$ функционал, определенный для всех $x \in C$ и $\lambda \in (a,b)$, и пусть $F(x)$ суммируем для любого $\lambda \in (a,b)$. Если $\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial\lambda}$ существует и $\sup\limits_{a<\lambda<b}\left|\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|$ суммируема, то при $\lambda \in (a,b)$*

$$\frac{d}{d\lambda}\int\limits_C F(x,\lambda)d_W x=\int\limits_C \frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial\lambda}\,d_W x.$$

Лемма вытекает из соотношения

$$\frac{F(x,\lambda')-F(x,\lambda'')}{\lambda'-\lambda''}\leqslant \sup\limits_{a<\lambda<b}\left|\frac{\partial F(x,\lambda)}{\partial\lambda}\right|.$$

Аналогичное утверждение имеет место и для интеграла по другим рассматриваемым мерам. В дальнейшем будем дифференцировать по параметру под знаком интеграла без указания на эти очевидные свойства.

Выведем одну общую формулу, которая часто облегчает вычисление винеровских интегралов в пространстве $y(t) \in C^{(m)}$.

Приведем один известный результат [5].

Пусть линейное преобразование L переводит один гауссовский процесс $y(t)$ в другой гауссовский процесс $z(t)$:

$$L: y(t) = z(t) + a(t)$$

и пусть

$$a(t) = \int_0^1 R(t,u)\, dg(u), \tag{1.1}$$

где $R(t,u) = My(t) \cdot y(u)$ $(My(t) = 0)$, а $g(u)$ — функция с ограниченной вариацией на отрезке [0,1]. *Тогда*

$$\int_Y F(y)\, d\mu(y) = \int_Z F(z+a) \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^1 a(u)\, dg(u) - \int_0^1 x(u)\, dg(u)\right] d\mu(z). \tag{1.2}$$

В рассматриваемом случае

$$R(t,u) = \int_{C^{(m)}} y(t)y(u)\, d_W y = \frac{1}{2(m!)^2} \int_0^{\min(t,u)} (t-\tau)^m (u-\tau)^m\, d\tau.$$

Найдем по формуле (1.1) функцию $g(u)$ (предположим, что $g(u)$ — непрерывная слева функция с ограниченной вариацией). Имеем:

$$a(t) = \frac{1}{2(m!)^2} \int_0^t \int_0^u (t-\tau)^m (u-\tau)^m\, d\tau\, dg(u) +$$

$$+ \frac{1}{2(m!)^2} \int_t^1 \int_0^t (t-\tau)^m (u-\tau)^m\, d\tau\, dg(u) =$$

$$= \frac{1}{2(m!)^2} g(1) \int_0^t (t-\tau)^m (1-\tau)^m\, d\tau -$$

$$- \frac{m}{2(m!)^2} \int_0^t g(u) \int_0^u (t-\tau)^m (u-\tau)^{m-1}\, d\tau\, du -$$

$$- \frac{m}{2(m!)^2} \int_t^1 g(u) \int_0^t (t-\tau)^m (u-\tau)^{m-1}\, d\tau\, du.$$

Продифференцировав это равенство $2m+1$ раз, получим

$$a^{(2m+1)}(t) = \frac{(-1)^{m+1}}{2} g(t) + \frac{(-1)^m}{2} g(1).$$

Отсюда видно, что $a^{(2m+1)}(1) = 0$, поэтому можно взять

$$g(u) = 2(-1)^{m+1} a^{(2m+1)}(u),$$

при этом

$$a(0) = a'(0) = \ldots = a^{(m)}(0) = a^{(m+1)}(1) = \ldots = a^{(2m+1)}(1) = 0 \tag{1.3}$$

и $a^{(2m+1)}(t)$ является непрерывной слева функцией с ограниченной вариацией. Если $a(t)$ удовлетворяет вышеуказанным свойствам, то можно воспользоваться равенством (1.2). Ввиду условий (1.3) $LC^{(m)} = C^{(m)}$ и

$$\int_0^1 a(u)\, dg(u) = 2(-1)^{m+1} \int_0^1 a(u)\, da^{(2m+1)}(u) = 2\int_0^1 [a^{(m+1)}(s)]^2\, ds,$$

поэтому

$$\int_{C^{(m)}} F(y)\, d_W y = \exp\Big\{-\int_0^1 [a^{(m+1)}(s)]^2 ds\Big\}\times$$

$$\times \int_{C^{(m)}} F(z+a) \exp\Big[2(-1)^{m+1} \int_0^1 a^{(2m+1)}(t)\, dz(t)\Big] d_W z. \tag{1.4}$$

Конкретным выбором функционала $F(x)$ и функции $a(t)$ получим различные формулы интегрирования.

Если $F(y) \equiv 1$, то

$$\int_{C^{(m)}} \exp\Big[2(-1)^{m+1} \int_0^1 a^{(2m+1)}(s)\, dy(s)\Big] d_W y = \exp\Big\{\int_0^1 [a^{(m+1)}(s)]^2 ds\Big\}.$$

Обозначим $(-1)^{m+1} a^{(2m+1)}(s) = b(s)$, тогда в силу условий (1.3)

$$a^{(m+1)}(s) = -\int_s^1 \int_{t_{m-1}}^1 \ldots \int_{t_1}^1 b(u)\, du = c(s)$$

и

$$\int_{C^{(m)}} \exp\Big[2\int_0^1 b(s)\, dy(s)\Big] d_W y = \exp\Big[\int_0^1 c^2(s)\, ds\Big].$$

Примем $b(s) = \dfrac{\lambda(1-s)}{2}$. Тогда

$$2\int_0^1 b(s)\, dy(s) = \lambda \int_0^1 y(s)\, ds,$$

$$c(s) = -\frac{\lambda(1-s)^{m+1}}{2(m+1)!}$$

и

$$\int_{C^{(m)}} \exp\Big[\lambda \int_0^1 y(s)\, ds\Big] d_W y = \exp\Big\{\frac{\lambda^2}{4(2m+3)[(m+1)!]^2}\Big\}. \tag{1.5}$$

Обозначим $\alpha_n^m = \int\limits_{C^{(m)}} \left[\int\limits_0^1 y(s)\,ds \right]^n d_W y.$

Продифференцировав обе части равенства (1.5) n раз по λ и приравняв $\lambda = 0$, получим:

$$\alpha_n^m = \begin{cases} 0 & \text{, если } n = 2k-1, \\ \dfrac{(2k-1)!!}{2^k (2m+3)^k [(m+1)!]^{2k}}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Даем рекуррентные соотношения для вычисления величин

$$\beta_n = \int\limits_{C_{1,X}} \left[\int\limits_0^1 x(t)\,dt \right]^n d^*_{W(1,X)} x.$$

Отметим формулу

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^n e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = \begin{cases} 0 & \text{, если } n = 2k-1, \\ \sigma^{2k}(2k-1)!!\,, & \text{если } n = 2k, \end{cases} \tag{1.6}$$

которая дает значения моментов гауссовской случайной величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2.

Если $x(t) \in C_{1,X}$, то функционал $x(t_1)$ является гауссовской случайной величиной. Так как

$$\int\limits_{C_{1,X}} x(t_1)\, d^*_{W(1,X)} x = \int\limits_C [x(t_1) - t_1 x(1) + t_1 X]\, d_W x = t_1 X,$$

то рассмотрим центрированную случайную величину $x(t_1) - t_1 X$ с корреляционной функцией

$$\int\limits_{C_{1,X}} [x(t_1) - t_1 X][x(t_2) - t_2 X]\, d^*_{W(1,X)} x =$$

$$= \int\limits_C [x(t_1) - t_1 x(1)][x(t_2) - t_2 x(1)]\, d_W x =$$

$$= \frac{1}{2} [\min(t_1, t_2) - t_1 t_2].$$

По теореме Фубини имеем:

$$\sigma^2 = \int\limits_{C_{1,X}} \left[\int\limits_0^1 (x(t) - tX)\,dt \right]^2 d^*_{W(1,X)} x =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_{C_{1,X}} [x(t_1) - t_1 X][x(t_2) - t_2 X]\, d^*_{W(1,X)} x\, dt_1 dt_2 = \frac{1}{24},$$

поэтому по формуле (1.6)

$$\beta'_n = \int\limits_{C_{1,X}} \left[\int\limits_0^1 (x(t) - tX)\,dt \right]^n d^*_{W(1,X)}\, x = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 2k-1, \\ \dfrac{(2k-1)!!}{24^k}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

Используя соотношение между начальными и центральными моментами произвольных случайных величин ([4], стр. 176)

$$\beta'_n = \sum_{k=2}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \beta_k \beta_1^{n-k} + (-1)^{n-1}(n-1)(\beta_1)^n,$$

можно последовательно вычислить все моменты β_n $\left(\text{непосредственно ясно, что } \beta_1 = \frac{X}{2}\right)$. Даем значения некоторых первых моментов:

$$\beta_1 = \frac{X}{2}, \qquad \beta_3 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}X + X^3\right),$$

$$\beta_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{6} + X^2\right), \qquad \beta_4 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{12} + X^2 + X^4\right).$$

§ 2

Вычислим моменты $\nu_n = \int\limits_C \left[\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt \right]^n d_W x.$

Известно, что [1]:

$$\left[\int\limits_C \exp\left(\lambda \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right) d_W x \right]^2 = \sec\sqrt{\lambda} = 1 + \frac{1}{2}\lambda + \ldots + \frac{E_n}{(2n)!}\lambda^n + \ldots$$

$$\lambda < \frac{\pi^2}{4},$$

(здесь и в дальнейшем: E_n — числа Эйлера, B_n — числа Бернулли). Продифференцируем обе части равенства n раз по λ:

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m \left[\int\limits_C \exp\left(\lambda \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right) d_W x \right]^{(m)} \left[\int\limits_C \exp\left(\lambda \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right) d_W x \right]^{(n-m)} =$$

$$= \frac{n!\,E_n}{(2n)!} + \frac{(n+1)!\,E_{n+1}}{(2n+2)!}\lambda + \ldots \tag{2.1}$$

Но

$$\left[\int\limits_C \exp\left(\lambda \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right) d_W x \right]^{(m)} = \int\limits_C \left[\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt \right]^m \exp\left(\lambda \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right) d_W x.$$

Полагая в (2.1) $\lambda = 0$, получим окончательно ($\nu_0 = 1$):

$$\sum_{m=0}^{n} C_n^m \nu_m \nu_{n-m} = \frac{n!\,E_n}{(2n)!}.$$

Первые пять моментов:

$$\nu_1 = \frac{1}{4}, \qquad \nu_2 = \frac{7}{48}, \qquad \nu_3 = \frac{139}{960}, \qquad \nu_4 = \frac{5473}{26880}, \qquad \nu_5 = \frac{51103}{92160}.$$

Вычислим еще моменты $\mu_n = \int\limits_{C_{1,X}} \left[\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right]^n d^*_{W(1,X)}x$.

Воспользуемся опять известной формулой [1]:

$$e^{-2X^2}\left[\int\limits_{C_{1,X}} \exp\left[\lambda^2\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right]d^*_{W(1,X)}x\right]^2 = \lambda \operatorname{cosec}\lambda \cdot e^{-2X^2\lambda\operatorname{ctg}\lambda}, \tag{2.2}$$

$$\lambda^2 < \pi.$$

Установим некоторые вспомогательные результаты. Так как

$$\lambda \operatorname{cosec}\lambda = 1 + \frac{1}{6}\lambda^2 + \ldots + \frac{2(2^{2k-1}-1)}{(2k)!}B_k\lambda^{2k} + \ldots,$$

то

$$(\lambda\operatorname{cosec}\lambda)^{(n)}_{\lambda=0} = \begin{cases} 1 & , \text{ если } n=0, \\ 0 & , \text{ если } n=2k-1, \\ 2(2^{2k-1}-1)B_k & , \text{ если } n=2k. \end{cases} \tag{2.3}$$

Аналогично, исходя из разложения

$$\lambda\operatorname{ctg}\lambda = 1 - \left[\frac{\lambda^2}{3} + \ldots + \frac{2^{2k}B_k}{(2k)!}\lambda^{2k} + \ldots\right],$$

найдем:

$$(\lambda\operatorname{ctg}\lambda)^{(n)}_{\lambda=0} = \begin{cases} 1 & , \text{ если } n=0, \\ 0 & , \text{ если } n=2k-1, \\ -2^{2k}B_k, & \text{ если } n=2k. \end{cases} \tag{2.4}$$

Используя обобщенную формулу Лейбница и (2.4), найдем еще:

$$[(\lambda\operatorname{ctg}\lambda)^m]^{(n)}_{\lambda=0} = [(\lambda\operatorname{ctg}\lambda)\ldots(\lambda\operatorname{ctg}\lambda)]^{(n)}_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_m\geqslant 0 \\ n_1+\ldots+n_m=n}} \frac{n!}{n_1!\ldots n_m!}(\lambda\operatorname{ctg}\lambda)^{(n_1)}\ldots(\lambda\operatorname{ctg}\lambda)^{(n_m)}\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_m\geqslant 0 \\ 2n_1+\ldots+2n_m=n}} \frac{n!}{(2n_1)!\ldots(2n_m)!}(\lambda\operatorname{ctg}\lambda)^{(2n_1)}\ldots(\lambda\operatorname{ctg}\lambda)^{(2n_m)}\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= 2^n n! \sum_{\substack{n_1,\ldots,n_m\geqslant 0 \\ 2n_1+\ldots+2n_m=n}} \frac{(-B_{n_1})\ldots(-B_{n_m})}{(2n_1)!\ldots(2n_m)!}. \tag{2.5}$$

И, наконец, так как

$$e^{-\lambda\operatorname{ctg}\lambda\cdot(\sqrt{2}X)^2} = 1 - \frac{\lambda\operatorname{ctg}\lambda\cdot(\sqrt{2}X)^2}{1!} + \ldots + (-1)^m\frac{(\lambda\operatorname{ctg}\lambda)^m(\sqrt{2}X)^{2m}}{m!} + \ldots,$$

то, ввиду (2.5),

$$\left[e^{-\lambda\operatorname{ctg}\lambda\cdot(\sqrt{2}X)^2}\right]^{(n)}_{\lambda=0} =$$

$$= 2^n n! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2}\,X)^{2m}}{m!} \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_m \geqslant 0 \\ 2n_1 + \ldots + 2n_m = n}} \frac{(-B_{n_1}) \ldots (-B_{n_m})}{(2n_1)! \ldots (2n_m)!}. \tag{2.6}$$

Продифференцируем $2n$ раз обе части (2.2) по λ и положим $\lambda = 0$:

$$e^{-2X^2} \Big(\Big[\int\limits_{C_{1,X}} \exp [\lambda^2 \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt] d^*_{W(1,X)} x \Big]^2 \Big)^{(2n)}_{\lambda=0} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2n} C^k_{2n} \, (\lambda \operatorname{cosec} \lambda)^{(2n-k)}_{\lambda=0} \big(e^{-\lambda \operatorname{ctg} \lambda \cdot (\sqrt{2} X)^2} \big)^{(k)}_{\lambda=0}. \tag{2.7}$$

Легко видеть, что

$$\Big(\int\limits_{C_{1,X}} \exp [\lambda^2 \int\limits_0^1 x^2(t)\,dt] \; d^*_{W(1,X)} x \Big)^{(2k)}_{\lambda=0} = \frac{(2k)!}{k!} \mu_k.$$

Поэтому, по правилу Лейбница:

$$\Big(\Big[\int\limits_{C_{1,X}} \exp [\lambda^2 \int\limits_0^1 x^2(t) dt] \, d^*_{W(1,X)} x \Big]^2 \Big)^{(2n)}_{\lambda=0} = \sum_{k=0}^{n} C^{2k}_{2n} \frac{(2k)!\,(2n-2k)!}{k!\,(n-k)!} \mu_k \mu_{n-k} =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!} \sum_{k=0}^{n} C^k_n \mu_k \mu_{n-k}. \tag{2.8}$$

Используя (2.7), (2.8), (2.3) и (2.6), найдем соотношение, из которого можно последовательно вычислить все неизвестные μ_k:

$$e^{-2X^2} \frac{(2n)!}{n!} \sum_{k=0}^{n} C^k_n \mu_k \mu_{n-k} = 2 (2^{2n-1} - 1) B_n e^{-2X^2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} C^{2k}_{2n} 2 (2^{2(n-k)-1} - 1) B_{n-k} 2^{2k} (2k)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2}\,X)^{2m}}{m!} \times$$

$$\times \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_m \geqslant 0 \\ 2n_1 + \ldots + 2n_m = 2k}} \frac{(-B_{n_1}) \ldots (-B_{n_m})}{(2n_1)! \ldots (2n_m)!} +$$

$$+ 2^{2n} (2n)! \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2}\,X)^{2m}}{m!} \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_m \geqslant 0 \\ 2n_1 + \ldots + 2n_m = 2n}} \frac{(-B_{n_1}) \ldots (-B_{n_m})}{(2n_1)! \ldots (2n_m)!}.$$

$$\mu_1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} X^2, \quad \mu_2 = \frac{1}{80} + \frac{1}{10} X^2 + \frac{1}{9} X^4$$

и т. д.

Дадим еще способ для вычисления величин

$$\gamma_n = \int\limits_{C^{(1)}} \Big[\int\limits_0^1 y^2(t)\,dt \Big]^n d_W y.$$

Так как [2]

$$\left\{ \int\limits_{C^{(1)}} \exp\left[\lambda^4 \int\limits_0^1 y^2(t)\,dt\right] d_W y \right\}^2 = \frac{2}{1 + \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda}, \tag{2.9}$$

то опять надо определить коэффициенты разложения

$$\frac{2}{1 + \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k.$$

Так как

$$(\cos\lambda \operatorname{ch}\lambda)^{(2k)}_{\lambda=0} = \sum_{m=0}^{k} C_{2k}^{2m} (-1)^m = \begin{cases} 0 & , \text{ если } k = 2l - 1, \\ (-1)^l 2^{2l}, & \text{если } k = 2l, \end{cases}$$

то

$$1 + \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^{2l}}{(4l)!} \lambda^{4l} + 1.$$

Неизвестные коэффициенты b_k можно последовательно найти из очевидного соотношения

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k \lambda^k \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l 2^{2l}}{(4l)!} \lambda^{4l} + 1 \right] = 2.$$

$$b_0 = 1, \quad b_4 = \frac{2}{4!}, \quad b_8 = \frac{34}{7!} \quad \text{и т. д.}$$

Так как

$$\left\{ \int\limits_{C^{(1)}} \exp\left[\lambda^4 \int\limits_0^1 y^2(t)\,dt\right] d_W y \right\}^{(4n)}_{\lambda=0} = \frac{(4n)!}{n!} \gamma_n,$$

то из (2.9) получим искомое соотношение:

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \gamma_k \gamma_{n-k} = b_{4n}. \quad \gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = \frac{1}{24}, \quad \gamma_2 = \frac{101}{4 \cdot 7!}.$$

Пример. Рассмотрим вычисление интеграла

$$I = \int\limits_C \exp\left[-\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right] d_W x = \sqrt{\sec\sqrt{-1}} \approx 0{,}80502.$$

Используя ряд Тэйлора, имеем

$$I = \int\limits_C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt \right]^n d_W x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \nu_n. \tag{2.10}$$

Можно доказать оценку

$$\nu_n = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 dt_1 \ldots dt_n \int\limits_C x^2(t_1) \ldots x^2(t_n)\, d_W x \leqslant \frac{(2n-1)!!}{4^n}.$$

По этой оценке ряд (2.10) мажорируется сходящимся числовым рядом $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,2^n}$, что оправдывает почленное интегрирование.

Имеем:

$$I = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!} \nu_n + R_{k+1},$$

где

$$|R_{k+1}| \leqslant \frac{(2k+1)!!}{2^{k+1}(2k+2)!!}.$$

Если $k=5$, то $I \approx 0{,}8027$ и $R_6 \leqslant 0{,}0035$ (действительная ошибка $\approx 0{,}0023$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Яглом А. М., Усп. матем. н., **11**, вып. 1 (67), 77—114 (1956).
2. Сульдин А. В., Итоговая науч. конф. Казанск. гос. ун-та за 1962 г., Казань, 1963, стр. 80—82.
3. Cameron R. H., Martin W. T., Journ. Math. and Phys., **23**, No. 4, 195—209 (1944).
4. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, М., Гостехиздат, 1954.
5. Шаташвілі А. Д., Доп. АН УРСР, № 4, 437—440 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
26/VI 1964

T. TOBIAS

WIENERI INTEGRAALI LIGIKAUDSEST ARVUTAMISEST

Artiklis vaadeldakse Wieneri integraali numbrilist arvutamist funktsionaalidest $F\left(\int_0^1 x(t)dt\right)$ ja $F\left(\int_0^1 x^2(t)dt\right)$ Taylori valemi abil.

T. TOBIAS

THE NUMERICAL EVALUATION OF WIENER'S INTEGRALS

In this paper we consider the numerical approximation of Wiener's integrals for the functionals $F\left(\int_0^1 x(t)dt\right)$ and $F\left(\int_0^1 x^2(t)dt\right)$ by use of their Taylor's expansion.