EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1965, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1965, № 2

Т. ТОБИАС

О НЕКОТОРЫХ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛАХ, НАИЛУЧШИХ В СМЫСЛЕ МЕРЫ ВИНЕРА

Сообщение II

Настоящая работа является непосредственным продолжением статьи [1], где дана постановка проблемы. Там же приведены все обозначения и определения.

4. Приближение суммами типа Фурье

Рассмотрим приближенную формулу

$$y(t) \approx \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t)\, V_k(y), \tag{4.1}$$

где теперь $V_k(y) = \int\limits_0^1 a_k(t)\, y(t)\, dt$. Систему функций $\{a_k(t)\}$ выберем из условия ортогональности

$$(V_k, V_l) = \int\limits_C \int\limits_0^1 a_k(s)\, Tx(s)\, ds \int\limits_0^1 a_l(t)\, Tx(t)\, dt\, d_W x =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 a_k(s)\, a_l(t)\, R(s, t)\, ds dt = 0, \tag{4.2}$$

если $k \neq l$.

Тогда легко видеть, что

$$\varphi_k(t) = \frac{1}{D_k} \int\limits_C Tx(t) \int\limits_0^1 a_k(s)\, Tx(s)\, ds\, d_W x =$$

$$= \frac{1}{D_k} \int\limits_0^1 a_k(s)\, R(s, t)\, ds, \tag{4.3}$$

где

$$D_k = \int\limits_C \Big[\int\limits_0^1 a_k(t)\, Tx(t)\, dt \Big]^2 d_W x = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 a_k(s)\, a_k(t)\, R(s, t)\, ds dt. \tag{4.4}$$

Каждой системе функций $\{a_k(t)\}$, удовлетворяющих условию (4.2), соответствует свое разложение (4.1). Функции $\{a_k(t)\}$ можно выбирать, например, как полиномы или собственные функции симметрического ядра $R(s, t)$. Рассмотрим несколько примеров.

Пусть $x(t) \in C$. Соответствующее интегральное уравнение

$$a_k(t) = \lambda_k \int_0^1 \min(s, t)\, a_k(s)\, ds$$

эквивалентно краевой задаче

$$a_k''(t) = -\lambda_k a_k(t), \quad a_k(0) = a_k'(1) = 0,$$

решением которой являются

$$a_k(t) = \sqrt{2} \sin \frac{2k-1}{2} \pi t, \qquad \lambda_k = \frac{\pi^2 (2k-1)^2}{4}.$$

Легко видеть, что

$$D_k = \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \quad \text{и} \quad \varphi_k(t) = \sqrt{2} \sin \frac{2k-1}{2} \pi t.$$

Искомое разложение

$$x(t) \approx \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \sqrt{2} \sin \frac{2k-1}{2} \pi t\, x(t)\, dt\, \sqrt{2} \sin \frac{2k-1}{2} \pi t$$

оказалось отрезком ряда Фурье функции $x(t)$ [3].

Найдем теперь соответствующую систему полиномов $\{a_k(t)\}$. Используя теорему Мерсера и интегрируя по частям, получим в силу равенства Парсеваля

$$\int_0^1 \int_0^1 a_k(t)\, a_l(s) \min(s, t)\, ds\, dt =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 a_k(t)\, a_l(s) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{2i-1}{2} \pi s\, \sqrt{2} \sin \frac{2i-1}{2} \pi t}{\frac{(2i-1)^2 \pi^2}{4}}\, ds\, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 \int_t^1 a_k(u)\, du\, \sqrt{2} \cos \frac{2i-1}{2} \pi t\, dt \int_0^1 \int_s^1 a_l(v)\, dv\, \sqrt{2} \cos \frac{2i-1}{2} \pi s\, ds =$$

$$= \int_0^1 \int_t^1 a_k(u)\, du \int_t^1 a_l(v)\, dv\, dt. \tag{4.5}$$

По условию $\int_t^1 a_k(u)\, du$ является полиномом $Q_{k+1}(t)$ степени $k+1$; при этом $Q_{k+1}(1) = 0$:

$$Q_{k+1}(t)=\int_t^1 a_k(u)\,du=(1-t)\,P_k(t). \tag{4.6}$$

Из условий (4.2) и (4.5) видно, что полиномы $P_k(t)$ должны быть ортогональными с весом $(1-t)^2$, т. е. $P_k(t)$ представляют собой полиномы Якоби. Выберем их нормированными:

$$P_k(t)=\frac{(-1)^k\sqrt{2k+3}}{k!\,(1-t)^2}\,\frac{d^k}{dt^k}\,[t^k(1-t)^{k+2}].$$

Полиномы $\{a_k(t)\}$ найдем из соотношения (4.6).

Так как

$$\varphi_k(t)=\int_0^1 a_k(s)\min(s,t)\,ds=\int_0^t(1-s)\,P_k(s)\,ds,$$

то [3]

$$x(t)\approx\sum_{k=0}^n\int_0^1 a_k(s)\,x(s)\,ds\int_0^t(1-s)\,P_k(s)\,ds. \tag{4.7}$$

Пусть теперь $y(t)=x^2(t)-t$, и рассмотрим случай полиномов. После простых преобразований получим

$$\int_0^1\int_0^1 a_k(s)\,a_l(t)\,2\min{}^2(s,t)\,ds\,dt=4\int_0^1 t\int_t^1 a_k(u)\,du\int_t^1 a_l(v)\,dv\,dt,$$

поэтому полиномы $\{a_k(t)\}$ должны удовлетворять условию

$$\int_0^1 t\int_t^1 a_k(u)\,du\int_t^1 a_l(v)\,dv\,dt=\frac{1}{4}\,\delta_{k,\,l}.$$

Обозначая

$$\int_t^1 a_k(u)\,du=(1-t)\,P_k(t),$$

легко найдем

$$P_k(t)=\frac{(-1)^k\sqrt{(2k+4)(k+3)}}{k!\,2\sqrt{k+1}\,t(1-t)^2}\,\frac{d^k}{dt^k}\,[(1-t)^{k+2}t^{k+1}]$$

и

$$\varphi_k(t)=4\int_0^t s(1-s)\,P_k(s)\,ds.$$

Искомое разложение:

$$x^2(t)-t\approx4\sum_{k=0}^n\int_0^1 a_k(t)[x^2(t)-t]dt\int_0^t s(1-s)\,P_k(s)\,ds.$$

Рассмотрим случай $z(t)=y(t)-tX$, где $y(t)\in C_{1,X}$. Интегральное уравнение

$$a_k(t)=\lambda_k\int_0^1[\min(s,t)-st]a_k(s)\,ds$$

эквивалентно краевой задаче

$$a_k''(t)+\lambda_k a_k(t)=0,\quad a_k(0)=a_k(1)=0,$$

решением которой являются $a_k(t)=\sqrt{2}\sin k\pi t$, $\lambda_k=k^2\pi^2$. Очевидно,

$$\varphi_k(t)=\sqrt{2}\sin k\pi t$$

и

$$z(t)\approx\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\sqrt{2}\sin k\pi t\,z(t)\,dt\,\sqrt{2}\sin k\pi t.$$

Разложение по полиномам аналогично разложению (4.7).

Если $y(t)\in C^{(m)}$, то нетрудно видеть, что $\{a_k(t)\}$ можно выбирать собственными функциями краевой задачи

$$a_k^{(2m+2)}(t)+(-1)^m\lambda_k a_k(t)=0,$$

$$a_k(0)=\ldots=a_k^{(m)}=0;\qquad a_k^{(m+1)}(1)=\ldots=a_k^{(2m+1)}(1)=0.$$

В случае $m=1$ ([4], стр. 693)

$$\lambda_k=k^4,\ a_k(t)=(\operatorname{ch}k+\cos k)(\operatorname{sh}kt-\sin kt)-$$
$$-(\operatorname{sh}k+\sin k)(\operatorname{ch}kt-\cos kt),$$

где k является решением уравнения

$$\cos k\operatorname{ch}k+1=0.$$

5. Формулы дифференцирования

Как и ранее, рассмотрим формулы, использующие значения функции лишь в двух-трех точках. Вывод более общих формул для пространства $C^{(1)}$ можно найти в работе [2].

Для сравнения выпишем известные формулы:

$$y'(t_k)\approx\frac{y(t_k)-y(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}\tag{5.1}$$

$$y'(t_k)\approx\frac{y(t_{k+1})-y(t_{k-1})}{t_{k+1}-t_{k-1}}\tag{5.2}$$

$$y'(t_k)\approx\frac{y(t_{k+1})-y(t_k)}{t_{k+1}-t_k}\tag{5.3}$$

$$y''(t_k) \approx \frac{y(t_{k+1}) - 2y(t_k) + y(t_{k-1})}{(t_{k+1} - t_{k-1})^2} \tag{5.4}$$

со среднеквадратичной ошибкой δ'.

Пусть $y(t) \in C^{(1)}$, и рассмотрим приближенную формулу

$$y'(t_k) \approx C_1 y(t_{k-1}) + C_2 y(t_k).$$

Используем ортогональную систему ([1], (2.5)):

$$V_{k-1} = \frac{y(t_{k-1})}{t_{k-1}}; \quad D_{k-1} = \frac{t_{k-1}}{3}; \tag{5.5}$$

$$V_k = \frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} - \frac{y(t_{k-1})}{t_{k-1}} - \frac{1}{2}\frac{y(t_{k-1})}{t_{k-1}}; \qquad D_k = \frac{4t_k - t_{k-1}}{12}. \tag{5.6}$$

Коэффициенты приближенной формулы

$$y'(t_k) \approx \varphi_{k-1} V_{k-1} + \varphi_k V_k \tag{5.7}$$

легко вычислить:

$$\varphi_{k-1} = \frac{1}{D_{k-1}} \int_C x(t_k) \frac{1}{t_{k-1}} \int_0^{t_{k-1}} x(t)\, dt\, d_W x = \frac{3}{t_{k-1}} \frac{t_{k-1}}{2};$$

$$\varphi_k = \frac{12}{4t_k - t_{k-1}} \left(\frac{t_k}{2} - \frac{t_{k-1}}{4} \right).$$

Если $t_k = \frac{k}{n}$, то получим

$$y'\left(\frac{k}{n}\right) \approx \frac{3n}{3k+1} \left[(k+1) y\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{k^2}{k-1} y\left(\frac{k-1}{n}\right) \right]$$

с дисперсией $\delta = \frac{k}{(3k+1)n}$ $\left(\text{для формулы (5.1) } \delta' = \frac{1}{3n} \right)$. Точно таким же способом получим

$$y'\left(\frac{k}{n}\right) \approx \frac{3n}{3k+4} \left[k y\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{k^2 - 2}{k} y\left(\frac{k}{n}\right) \right],$$

$\delta = \frac{k}{(3k+4)n}$ $\left(\text{дисперсия формулы (5.3) } \delta' = \frac{1}{3n} \right)$

и

$$y'\left(\frac{k}{n}\right) \approx \frac{3n}{2(3k+5)} \left[(k+2) y\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{k^2 + k - 1}{k-1} y\left(\frac{k-1}{n}\right) \right]$$

с дисперсией $\delta = \frac{2k+3}{4n(3k+5)}$ $\left(\text{соответствующая } \delta' = \frac{1}{6n} \right)$.

Даем формулы дифференцирования, которые используют значения функции в трех точках. К системе (5.5), (5.6) добавим еще функционал

$$V_{k+1}=\frac{y(t_{k+1})-y(t_k)}{t_{k+1}-t_k}-\frac{y(t_k)-y(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}-$$

$$-2\,\frac{t_k-t_{k-1}}{4t_k-t_{k-1}}\left[\frac{y(t_k)-y(t_{k-1})}{t_k-t_{k-1}}-\frac{3}{2}\,\frac{y(t_{k-1})}{t_{k-1}}\right]$$

с дисперсией

$$D_{k+1}=\frac{t_{k+1}-t_{k-1}}{3}-\frac{1}{3}\,\frac{(t_k-t_{k-1})^2}{4t_k-t_{k-1}}.$$

Вычислим коэффициенты приближенной формулы

$$y'(t_k)\approx\varphi_{k-1}V_{k-1}+\varphi_kV_k+\varphi_{k+1}V_{k+1};$$

$$\varphi_{k-1}=\frac{1}{D_{k-1}}\int\limits_C x(t_k)\,V_{k-1}d_Wx=\frac{3}{t_{k-1}}\,\frac{t_{k-1}}{2};\qquad \varphi_k=3\,\frac{2t_k-t_{k-1}}{4t_k-t_{k-1}};$$

$$\varphi_{k+1}=\frac{1}{D_{k+1}}\left[\frac{t_k-t_{k-1}}{2}-\frac{t_k-t_{k-1}}{4t_k-t_{k-1}}\,t_k+\frac{t_k-t_{k-1}}{4t_k-t_{k-1}}\,\frac{t_{k-1}}{2}\right].$$

В случае $t_k=\frac{k}{n}$ легко получить:

$$y'\left(\frac{k}{n}\right)\approx\frac{3n}{6k+1}\left[-\frac{k^2}{k-1}\,y\left(\frac{k-1}{n}\right)+y\left(\frac{k}{n}\right)+ky\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]$$

и $\delta=\frac{k}{n(6k+1)}$.

Аналогично:

$$y'\left(\frac{k-1}{n}\right)\approx\frac{n}{2(6k+1)}\left[\frac{-15k^2+30k+6}{k-1}\,y\left(\frac{k-1}{n}\right)+\right.$$

$$\left.+18(k-1)y\left(\frac{k}{n}\right)-3(k-1)y\left(\frac{k+1}{n}\right)\right],\qquad \delta=\frac{7(k-1)}{4n(6k+1)}$$

и

$$y'\left(\frac{k+1}{n}\right)\approx\frac{n}{6k+1}\left[\frac{3k^2}{2(k-1)}y\left(\frac{k-1}{n}\right)-3(3k+1)y\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{3(5k+1)}{2}\,y\left(\frac{k+1}{n}\right)\right],$$

$$\delta=\frac{7k+1}{4n(6k+1)}.$$

Пусть $y(t)\in C^{(2)}$. Рассмотрим приближенную формулу вида (5.7), где примем сразу $t_k=\frac{k}{n}$.

$$V_{k-1}=y\left(\frac{k-1}{n}\right);\qquad D_{k-1}=\frac{(k-1)^5}{20n^5};\qquad \varphi_{k-1}=\frac{1}{D_{k-1}}\,\frac{(k-1)^3(3k+1)}{24n^4};$$

$$V_k=y\left(\frac{k}{n}\right)-y\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{6k^2+3k+1}{6(k-1)^2};\qquad D_k=\frac{15k^3+15k^2+5k+1}{720n^5};$$

$$\varphi_k=\frac{1}{D_k}\,\frac{3k^3+9k^2+5k+1}{144n^4}.$$

Теперь легко найти и окончательную формулу:

$$y'\left(\frac{k}{n}\right)\approx\frac{5n}{15k^3+15k^2+5k+1}\left[(3k^3+9k^2+5k+1)\,y\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{3k^4(k+1)}{(k-1)^2}\,y\left(\frac{k-1}{n}\right)\right],$$

где $\delta=\dfrac{k^3(5k+4)}{12n^3(15k^3+15k^2+5k+1)}$ $\left(\text{дисперсия формулы (5.1) } \delta'=\dfrac{15k-7}{60n^3}\right)$.

Аналогично:

$$y'\left(\frac{k}{n}\right)\approx\frac{5n}{15k^3+60k^2+80k+36}\left[3k^2(k+2)\,y\left(\frac{k+1}{n}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{3k^4+6k^3-10k^2-30k-18}{k}\,y\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

с дисперсией $\delta=\dfrac{k^3(5k+9)}{12n^3(15k^3+60k^2+80k+36)}$ $\qquad\left(\delta'=\dfrac{15k+3}{60n^3}\right)$

и

$$y'\left(\frac{k}{n}\right)\approx\frac{5n}{2(15k^3+75k^2+125k+73)}\left[(3k^3+15k^2+25k+8)\,y\left(\frac{k+1}{n}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{3k^5+9k^4-2k^3-27k^2-24k-3}{(k-1)^2}\,y\left(\frac{k-1}{n}\right)\right],$$

$$\delta=\frac{6k^3+30k^2+50k+5}{16n^3(15k^3+75k^2+125k+73)}\qquad\left(\delta'=\frac{13}{120n^3}\right).$$

Пусть $z(t)=y(t)-\dfrac{t^2}{2}X$, где $y(t)\in C^{(1)}_{1,X}$. Даем сперва соответствующие величины в формуле (5.7) при произвольных узлах.

$$V_{k-1}=z(t_{k-1});\qquad D_{k-1}=\frac{t_{k-1}^3}{12}(4-3t_{k-1});\qquad \varphi_{k-1}=\frac{1}{D_{k-1}}\,\frac{t_{k-1}^2}{2}(1-t_k);$$

$$V_k=z(t_k)-z(t_{k-1})\,\frac{6t_k-2t_{k-1}-3t_k^2}{t_{k-1}(4-3t_{k-1})};$$

$$D_k=\frac{t_k^3}{12}(4-3t_k)-\frac{t_{k-1}}{12(4-3t_{k-1})}(6t_k-2t_{k-1}-3t_k^2)^2;$$

$$\varphi_k=\frac{1}{D_k}\left[\frac{t_k^2}{2}-\frac{t_k^3}{3}-\frac{t_{k-1}(1-t_k)}{2(4-3t_{k-1})}(6t_k-2t_{k-1}-3t_k^2)\right].$$

В случае $t_k=\dfrac{k}{n}$ получим:

$$z'\left(\frac{k}{n}\right)\approx\frac{3n(n-k)}{(3kn+n-3k^2)(k-1)}\left[(k^2-1)\,z\left(\frac{k}{n}\right)-k^2z\left(\frac{k-1}{n}\right)\right],$$

$$z'\left(\frac{k}{n}\right)\approx\frac{1}{(3kn+4n-3k^2-6k-3)}\left[\frac{3kn(2n-2k-1)}{2}\,z\left(\frac{k+1}{n}\right)+\right.$$

$$+(48n^3-36n^2-84kn^2+36k^2n+12k^2n^2+42k^3n^2-24k^2n^3+$$

$$\left.+27kn-18k^4n-9k^3n)\times\frac{1}{2k(4n-3k)}\,z\left(\frac{k}{n}\right)\right]$$

и

$$z'\left(\frac{k}{n}\right) \approx \frac{3n}{8(5n-6k+3kn-3k^2-3)}\left[(8n-9k+4kn-4k^2-3)\,z\left(\frac{k+1}{n}\right)+\right.$$

$$+(16n^2-32kn-16kn^2+20k^2n+21k^2-3k^3+3k-16k^2n^2+28k^3n-$$

$$\left.-12k^4-9)\times\frac{1}{(k-1)(4n-3k+3)}\,z\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]$$

с соответствующими дисперсиями:

$$\delta=\frac{k(n-k)}{n(3kn+n-3k^2)}\qquad\left(\delta'=\frac{4n-3}{12n^2}\right),$$

$$\delta=\frac{k(12k^2-28kn-12n+9k+16n^2)}{4n(4n-3k)(3kn+4n-3k^2-6k-3)}\qquad\left(\delta'=\frac{4n-3}{12n^2}\right)$$

и

$$\delta=\frac{48n^2-56k^2n+32kn^2-72kn+24k^3+21k^2-18k-27}{16n(4n-3k+3)(5n-6k+3kn-3k^2-3)}\qquad\left(\delta'=\frac{1}{6n}\right).$$

Рассмотрим, наконец, вычисление второй производной в пространстве $C^{(2)}$. Отметим, что использование лишь двух ординат не дает сходящихся формул.

Пример. Наилучшей формулой вида $y''(t_k)\approx C_1y(t_{k-1})+C_2y(t_k)$ является $\left(t_k=\frac{k}{n}\right)$:

$$y''\left(\frac{k}{n}\right)\approx\frac{20n^2}{15k^3+15k^2+5k+1}\left[(3k^2+2k+1)\,y\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{k^3(k+1)}{(k-1)^2}\,y\left(\frac{k-1}{n}\right)\right]$$

с дисперсией $\delta=\dfrac{k(5k^3+25k^2+15k+3)}{3n(15k^3+15k^2+5k+1)}$. Если $k=n$, то $\delta\backsim\frac{1}{9}$.

Используя ортогональную систему

$$V_{k-1}=y\left(\frac{k-1}{n}\right);\qquad D_{k-1}=\frac{1}{20}\,\frac{(k-1)^5}{n^5};$$

$$V_k=y\left(\frac{k}{n}\right)-y\left(\frac{k-1}{n}\right)\frac{6k^2+3k+1}{6(k-1)^2};\qquad D_k=\frac{15k^3+15k^2+5k+1}{720n^5};$$

$$V_{k+1}=y\left(\frac{k+1}{n}\right)-\frac{3k^2+9k+8}{3(k-1)^2}\,y\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{2(15k^3+45k^2+25k+8)}{15k^3+15k^2+5k+1}\,V_k;$$

$$D_{k+1}=\frac{100k^4+290k^3+150k^2+30k+3}{60n^5(15k^3+15k^2+5k+1)},$$

получим:

$$y''\left(\frac{k}{n}\right)\approx\frac{5n^2}{3(100k^4+290k^3+150k^2+30k+3)}\times$$

$$\times\left[\frac{k^3(900k^6+2250k^5+30k^4-1650k^3-990k^2-288k-36)}{(k-1)^3(15k^3+15k^2+5k+1)}\,y\left(\frac{k-1}{n}\right)-\right.$$

$$-\frac{2(900k^7+4050k^6+6150k^5+4080k^4+1110k^3-72k-18)}{15k^3+15k^2+5k+1}\,y\left(\frac{k}{n}\right)+$$

$$\left.+(60k^4+210k^3+108k^2+18k)\,y\left(\frac{k+1}{n}\right)\right].$$

Дисперсия полученной формулы:

$$\delta = \frac{16200k^7 + 56700k^6 + 70200k^5 + 43740k^4 + 15660k^3 + 3240k^2 + 324k}{108n(15k^3 + 15k^2 + 5k + 1)(100k^4 + 290k^3 + 150k^2 + 30k + 3)},$$

в то же время формула (5.4) имеет дисперсию $\delta' = \frac{1}{10n}$.

6. Формула Тэйлора

Рассмотрим приближенную формулу

$$y(t) \approx C_0 y(t_0) + C_1 y'(t_0) + \ldots + C_m y^{(m)}(t_0), \tag{6.1}$$

где $y(t) \in C^{(m)}$ и $t_0 < t$.

Наилучшие коэффициенты C_k, минимизирующие выражение

$$\int_C [y(t) - \sum_{k=0}^{m} C_k y^{(k)}(t_0)]^2 d_W x,$$

можно определить из системы

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(m-k)!\,(m-i)!} \int_0^{t_0} (t_0 - u)^{m-k} (t_0 - u)^{m-i} du \; C_k =$$
$$= \frac{1}{m!\,(m-i)!} \int_0^{t_0} (t-u)^m (t_0 - u)^{m-i} du \qquad (i = 0, \ldots, m). \tag{6.2}$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(m-k)!} (t_0 - u)^{m-k} \frac{(t-t_0)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{m!} C_m^k (t_0 - u)^{m-k} (t - t_0)^k =$$
$$= \frac{1}{m!} (t-u)^m,$$

то решением системы (6.2) являются $C_k = \frac{(t-t_0)^k}{k!}$, т. е. наилучшей формулой вида (6.1) в пространстве $C^{(m)}$ является формула Тэйлора.

Для пространства $C^{(1)}$ формула $y(t_0 + \varepsilon) \approx y(t_0) + y'(t_0)\varepsilon$ имеет дисперсию $\delta = \frac{\varepsilon^3}{3}$, в пространстве $C^{(2)}$ дисперсией формулы $y(t_0 + \varepsilon) \approx$ $\approx y(t_0) + y'(t_0)\varepsilon + \frac{y''(t_0)}{2}\varepsilon^2$ является $\delta = \frac{1}{20}\varepsilon^5$.

Пусть $p < m$ и $y(t) \in C^{(m)}$. В формуле

$$y(t) \approx C_0 y(t_0) + \ldots + C_p y^{(p)}(t_0)$$

наилучшие коэффициенты C_k уже не являются коэффициентами Тэйлора.

Рассмотрим формулу

$$y(t) \approx C_0 y(t_0) + C_1 y'(t_0)$$

в пространстве $y(t) \in C^{(2)}$. Нетрудно получить для определения C_0 и C_1 систему

$$\begin{cases} \frac{t_0^2}{5} C_0 + \frac{t_0}{2} C_1 = \frac{1}{3} t^2 - \frac{1}{6} t_0 t + \frac{1}{30} t_0^2 \\ \frac{t_0^2}{4} C_0 + \frac{2}{3} t_0 C_1 = \frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{3} t_0 t + \frac{1}{12} t_0^2, \end{cases}$$

откуда $C_0 = \frac{20 t_0 t - 10 t^2 - 7 t_0^2}{3 t_0^2}$, $\quad C_1 = \frac{(2t - t_0)(t - t_0)}{t_0}$.

При $t = t_0 + \varepsilon$ дисперсией формулы

$$y(t_0 + \varepsilon) \approx \frac{3 t_0^2 - 10 \varepsilon^2}{3 t_0^2} y(t_0) + \frac{t_0 + 2\varepsilon}{t_0} y'(t_0) \varepsilon$$

является $\delta = \frac{t_0}{36} \varepsilon^4 + \frac{1}{20} \varepsilon^5$. Обычная формула $y(t_0 + \varepsilon) \approx y(t_0) + y'(t_0) \varepsilon$ имеет дисперсию $\delta' = \frac{t_0}{4} \varepsilon^4 + \frac{1}{20} \varepsilon^5$.

Если $t < t_0$, то формула Тэйлора не обладает вышеуказанным экстремальным свойством ($E y^{(p)}(s) \cdot y^{(q)}(t)$ — несимметричная функция переменных s и t). Наилучшие коэффициенты формулы (6.1) можно определить из системы

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{1}{(m-k)!\,(m-i)!} \int_0^{t_0} (t_0 - u)^{m-k} (t_0 - u)^{m-i} du \, C_k =$$

$$= \frac{1}{m!\,(m-i)!} \int_0^{t} (t - u)^m (t_0 - u)^{m-i} du \qquad (i = 0, \ldots, m).$$

Если $y(t) \in C^{(1)}$, то

$$\begin{cases} \frac{1}{3} t_0^3 C_0 + \frac{t_0^2}{2} C_1 = \frac{1}{2} t_0 t^2 - \frac{1}{6} t^3 \\ \frac{1}{2} t_0^2 C_0 + t_0 C_1 = \frac{t^2}{2}, \end{cases}$$

откуда $C_0 = \frac{6t^2}{t_0^3} \left(\frac{t_0}{2} - \frac{t}{3} \right)$, $\quad C_1 = \frac{t^2}{t_0^2} (t - t_0)$.

Дисперсии формул

$y(t_0 - \varepsilon) \approx \frac{(t_0 - \varepsilon)^2 (t_0 + 2\varepsilon)}{t_0^3} y(t_0) - \frac{(t_0 - \varepsilon)^2}{t_0^2} y'(t_0) \varepsilon$ и

$y(t_0 - \varepsilon) \approx y(t_0) - y'(t_0) \varepsilon$ соответственно $\delta = \frac{\varepsilon^3}{3} \frac{(t_0 - \varepsilon)^3}{t_0^3}$ и $\delta' = \frac{\varepsilon^3}{3}$.

При $y(t) \in C^{(2)}$ можно аналогично вычислить наилучшие коэффициенты формулы $y(t) \approx C_0 y(t_0) + C_1 y'(t_0) + C_2 y''(t_0)$.

После несложных вычислений получим:

$$C_0 = \frac{t^3(10t_0^2 - 15t_0 t + 6t^2)}{t_0^5}, \qquad C_1 = \frac{t^3(3t - 4t_0)(t_0 - t)}{t_0^4}, \qquad C_2 = \frac{t^3(t_0 - t)^2}{2t_0^3}.$$

Дисперсия полученной формулы

$$y(t_0 - \varepsilon) \approx \frac{(t_0 - \varepsilon)^3(t_0^2 + 3t_0\varepsilon + 6\varepsilon^2)}{t_0^5} y(t_0) - \frac{(t_0 - \varepsilon)^3(t_0 + 3\varepsilon)\varepsilon}{t_0^4} y'(t_0) +$$

$$+ \frac{(t_0 - \varepsilon)^3\varepsilon^2}{2t_0^3} y''(t_0): \qquad \delta = \frac{\varepsilon^5}{20} \frac{(t_0 - \varepsilon)^5}{t_0^5} \left(\text{соответствующая } \delta' = \frac{\varepsilon^5}{20}\right).$$

Аналогично:

$$y(t) \approx \frac{t^3(20t_0^2 - 25t_0 t + 8t^2)}{3t_0^5} y(t_0) + \frac{t^3(2t_0 - t)(t - t_0)}{t_0^4} y'(t_0),$$

или

$$y(t_0 - \varepsilon) \approx \frac{(t_0 - \varepsilon)^3(3t_0^2 + 9t_0\varepsilon + 8\varepsilon^2)}{3t_0^5} y(t_0) - \frac{(t_0 - \varepsilon)^3(t_0 + \varepsilon)\varepsilon}{t_0^4} y'(t_0)$$

с дисперсией $\delta = \frac{(t_0 - \varepsilon)^5}{t_0^5} \frac{(5t_0\varepsilon^4 + 4\varepsilon^5)}{180} \left(\delta' = \frac{t_0\varepsilon^4}{4} - \frac{7\varepsilon^5}{60}\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тобиас Т., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, № 1, 64—78 (1965).
2. Сульдин А. В., Сб. Вероятностные методы и кибернетика, II, Изд. Казанск. ун-та, 1963, стр. 3—35.
3. Сульдин А. В., Изв. вузов, матем., № 5 (18), 165—179 (1960).
4. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1950.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
26/VI 1964

T. TOBIAS

MÕNINGATEST WIENERI MÕÕDU MÕTTES PARIMATEST LIGIKAUDSETEST VALEMITEST. II

Artiklis vaadeldakse lähendamist Fourier' osasummadega, diferentseerimisvalemeid ning Taylori valemit Wieneri ruumis ning teistes mõõduga ruumides. Valemi optimaalsuse kriteeriumiks võetakse dispersiooni minimaalsus.

T. TOBIAS

SOME APPROXIMATION FORMULAE WHICH ARE BEST IN THE MEAN OF WIENER'S MEASURE. II

In this paper we consider the approximation with Fourier's sums, differentation formulae and Taylor's formula on Wiener's and other similar spaces. As a measure for the goodness we use the mean square deviation.