EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIII KÕIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1964, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1964, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1964.2.05

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ АМПЛИТУДНЫМ, ЭФФЕКТИВНЫМ И СРЕДНИМ ЗНАЧЕНИЯМИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Л. И. ВОЛГИН

Интенсивность переменных напряжений можно характеризовать несколькими параметрами, определяющими величину электрического сигнала с точки зрения количественного воздействия в том или ином физическом явлении или процессе. Основными параметрами, характеризующими интенсивность переменных напряжений, являются их мгновенные — u, амплитудные (пиковые) — $U_{\text{м}}$, эффективные — $U_{\text{эфф}}$ и средние — $U_{\text{ср}}$ значения. Из перечисленных величин наиболее часто используется эффективное (действующее, среднеквадратичное) значение, определяющее среднюю мощность электрического сигнала, в частности, его тепловой эффект.

Амплитудное, эффективное и среднее значения связаны между собой через коэффициенты амплитуды (пикфактор), формы (формфактор) и усреднения

$$K_{\text{а}} = \frac{U_{\text{м}}}{U_{\text{эфф}}}, \tag{1}$$

$$K_{\text{ф}} = \frac{U_{\text{эфф}}}{U_{\text{ср}}}, \tag{2}$$

$$K_{\text{у}} = \frac{U_{\text{м}}}{U_{\text{ср}}}. \tag{3}$$

Все три указанных коэффициента связаны соотношением

$$K_{\text{у}} = K_{\text{а}} K_{\text{ф}}. \tag{4}$$

В силу известных причин в измерительной технике большое распространение получили вольтметры с неквадратичным законом детектирования, проградуированные в эффективных значениях синусоидального напряжения $\left(K_{\text{а}0} = \sqrt{2},\ K_{\text{ф}0} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)$. При использовании этих приборов для измерения эффективного значения напряжений (ЭЗН) произвольной формы возникает дополнительная погрешность, обусловленная влиянием формы кривой измеряемого напряжения. Для вольтметров с линейным и пиковым детекторами эта погрешность определяется соответственно выражениями

$$\delta_{\text{ср}} = \frac{K_{\text{ф}0}}{K_{\text{ф}}} - 1, \tag{5}$$

$$\delta_{\text{пик}} = \frac{K_{\text{а}}}{K_{\text{а}0}} - 1. \tag{6}$$

Исследованию зависимости погрешности измерения ЭЗН от влияния формы кривой при заданном неквадратичном законе детектирования посвящено довольно много работ. Использование полученных в этих работах результатов затрудняется тем, что при эксплуатации измерительных приборов необходимо предварительно знать величину $K_ф$ или $K_а$, а зачастую амплитудный и фазовый спектры измеряемого сигнала, что во многих случаях является затруднительным [1, 2].

Представляет интерес рассмотреть возможность определения величины эффективного значения напряжений через произведение амплитудного и среднего значений. Введем обозначение

$$K = \sqrt{\frac{K_а}{K_ф}} = \frac{\sqrt{U_м U_{ср}}}{U_{эфф}}. \tag{7}$$

Из последнего соотношения получим

$$U^2_{эфф} = U_{ср} \frac{U_м}{K^2}. \tag{8}$$

Рассмотрим, в каких пределах может изменяться величина K. Очевидно, что для электрического сигнала справедливо условие

$$u^2(t) \leqslant |u(t)| U_м \leqslant U^2_м. \tag{9}$$

Воспользовавшись правилом интегрирования неравенств, можем записать

$$\frac{1}{T}\int\limits_0^T u^2(t)\,dt \leqslant \frac{U_м}{T}\int\limits_0^T |u(t)|\,dt \leqslant U^2_м. \tag{10}$$

После преобразований получим

$$1 \leqslant K^2 \leqslant K^2_а. \tag{11}$$

Так как значения

$$K > 0 \text{ и } K_а > 0,$$

то

$$1 \leqslant K \leqslant K_а. \tag{12}$$

С другой стороны, воспользовавшись теоремой о среднем [3], для непрерывной функции можем записать

$$K^2 = \frac{\dfrac{U_м}{T}\displaystyle\int\limits_0^T |u(t)|\,dt}{\dfrac{|u(t_k)|}{T}\displaystyle\int\limits_0^T |u(t)|\,dt}, \tag{13}$$

здесь t_k есть некоторое значение, принадлежащее промежутку $(0, T)$. Из условия (13) найдем

$$\frac{U_м}{K^2} = |u(t_k)|. \tag{14}$$

При этом

$$U_{эфф} \leqslant |u(t_k)| \leqslant U_м. \tag{15}$$

Назовем величину $|u(t_k)|$ квазипиковым значением сигнала. Таким образом, согласно (8), квадрат эффективного значения равен произведению среднего и квазипикового значений сигнала. При $K=1$ квадрат эффективного значения непосредственно равен произведению среднего и амплитудного значений сигнала, т. е. квазипиковое и амплитудное значения равны.

Из проведенного анализа следует, что при $K \simeq 1$

$$U_{\text{эфф}} \simeq \sqrt{U_{\text{ср}} U_{\text{м}}}. \qquad (16)$$

При этом относительная погрешность определения эффективного значения через соотношение (16)

$$\delta = \frac{\sqrt{U_{\text{ср}} U_{\text{м}}} - U_{\text{эфф}}}{U_{\text{эфф}}} = K - 1. \qquad (17)$$

Отметим, что для определения величины $U^2_{\text{эфф}}$ через произведение среднего и амплитудного значений необходимо иметь вольтметр с линейным детектором, проградуированный в средних значениях (напр., Ф517) и вольтметр с пиковым детектором, проградуированный в амплитудных значениях (напр., В4-1А).

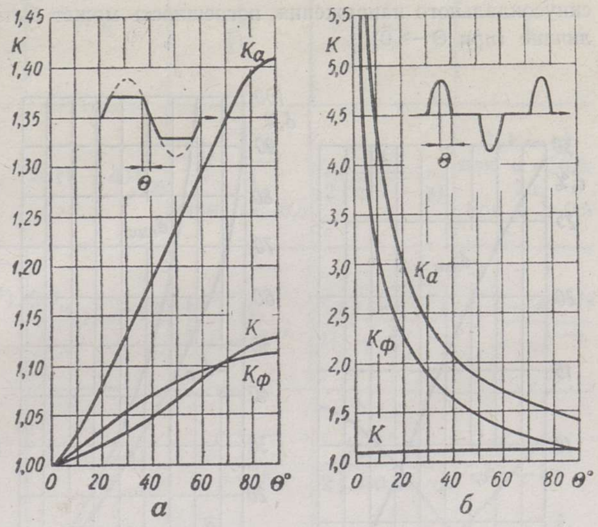


Рис. 1.

Введение новых определений и понятий будет оправдано в том случае, если предложенный метод «вольтметров средних и амплитудных значений» имеет меньшую погрешность по сравнению с погрешностями, определяемыми выражениями (5) и (6).

Рассмотрим напряжения типа «синус с ограничением сверху» и «синус с ограничением снизу» (рис. 1*а* и 1*б*). Заметим, что при $\Theta = \frac{\pi}{2}$ имеем напряжение синусоидальной формы.

Среднее значение напряжений

$$U_{\text{ср}} = \frac{2U_{\text{м}}}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \Theta + \frac{1}{\sin\Theta}(1-\cos\Theta)\right], \qquad (18а)$$

$$U_{\text{ср}} = \frac{2U_{\text{м}}}{\pi}\,\frac{\sin\Theta - \Theta\cos\Theta}{1-\cos\Theta} \qquad (18б)$$

(для рассматриваемых напряжений индекс «а» в нумерации формул относится к рис. 1*а*, индекс «б» — к рис. 1*б*).

Эффективное значение напряжений

$$U_{\text{эфф}} = U_{\text{м}}\sqrt{\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \Theta + \frac{1}{2\sin^2\Theta}\left(\Theta - \frac{1}{2}\sin 2\Theta\right)\right]}, \qquad (19а)$$

$$U_{\text{эфф}} = \frac{U_{\text{м}}}{1-\cos\Theta}\sqrt{\frac{2}{\pi}\left(\Theta + \frac{\Theta}{2}\cos 2\Theta - \frac{3}{4}\sin 2\Theta\right)}. \qquad (19б)$$

Построив графики функций $K_ф(\Theta)$, $K_а(\Theta)$ и $K(\Theta)$, видим (рис. 1), что для напряжения типа «синус с ограничением снизу» функция $K(\Theta)$ относительно мало зависит от величины угла отсечки Θ (при изменении Θ от 0 до 90° $K(\Theta)$ изменяется от 1,118 до 1,128), в то время как функции K (Θ) и $K_а(\Theta)$, при Θ стремящемся к нулю, стремятся к бесконечности. Для напряжения типа «синус с ограничением сверху» функции

$K_ф(\Theta)$, $K_а(\Theta)$ и $K(\Theta)$ изменяются в конечных пределах. На рис. 2 приведены графики погрешностей $\delta_{ср}$, $\delta_{пик}$ и δ. Из рис. 2*б* видим, что при измерении эффективного значения напряжения типа «синус с ограничением снизу» вольтметром с линейным детектором, проградуированным в эффективных вольтах синусоидального напряжения, с уменьшением угла Θ погрешность $\delta_{ср}$ стремится к величине — 100%. При использовании вольтметра с пиковым детектором, проградуированным в эффективных значениях синусоидального напряжения, погрешность может быть равной бесконечно большой величине (при $\Theta \to 0$).

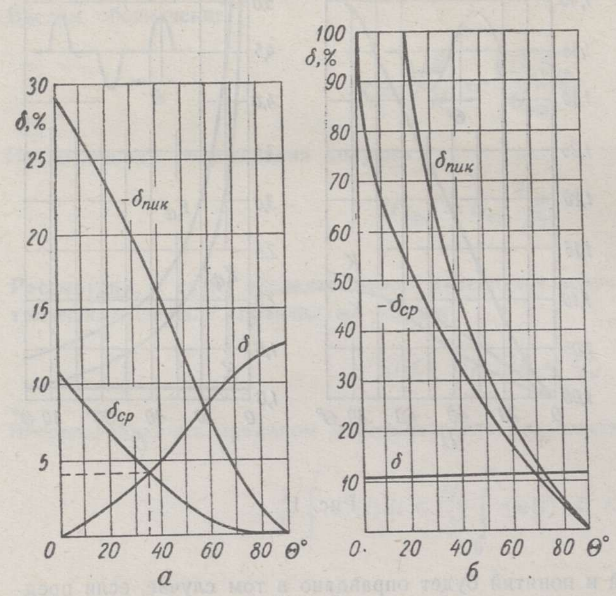


Рис. 2.

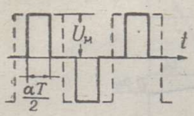
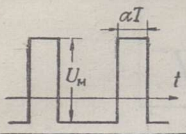
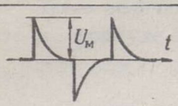
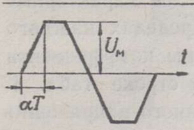
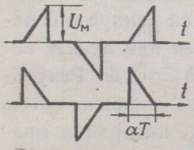
При использовании метода вольтметров средних и амплитудных значений, погрешность δ не превышает величины 12,8%. Таким образом, в данном случае метод вольтметров средних и амплитудных значений обеспечивает удовлетворительную для многих технических измерений точность во всем диапазоне возможных изменений угла отсечки Θ.

Дальнейшее повышение точности измерения эффективного значения напряжений возможно за счет комбинированного использования метода вольтметров средних и амплитудных значений и вольтметра с линейным детектором, проградуированного в эффективных вольтах синусоидального напряжения. Сказанное поясним на примере напряжения типа «синус с ограничением сверху». Из рис. 2*а* видим, что при $\Theta = 35 \div 90°$ целесообразно использовать вольтметр с линейным детектором, проградуированный в эффективных значениях синусоидального напряжения, так как при этом $\delta_{ср} < \delta$ (практически шкала вольтметра средних значений должна иметь дополнительную градуировку в эффективных вольтах синусоидального напряжения). При $\Theta = 0 \div 35°$ бо́льшую точность измерения обеспечивает метод вольтметров средних и амплитудных значений. Считаем, что величина параметра Θ не известна. Снимаем отсчет $U'_{эфф}$ по шкале вольтметра средних значений, проградуированного в эффективных вольтах синусоидального напряжения (если дополнительная градуировка отсутствует, можно, например, использовать вольтметр В3-7). Затем определяем величину $U''_{эфф}$ методом вольтметров средних и амплитудных значений. Если при этом окажется, что $U''_{эфф} < U'_{эфф}$ (в рассматриваемом случае $\delta_{ср} > 0$), то бо́льшую точность обеспечивает метод вольтметров средних и амплитудных значений (мерой величины эффективного значения следует считать $U''_{эфф}$). Если $U'_{эфф} < U''_{эфф}$, то мерой величины эффективного значения следует считать $U'_{эфф}$. В рассматриваемом случае комбинированный способ позволяет повысить точность измерения примерно в три раза (максимально возможная погрешность 4,3% вместо 12,8%, при использовании метода вольтметров средних и амплитудных значений).

При использовании комбинированного способа необходимо иметь предварительную информацию о знаке погрешности $\delta_{ср}$, что в конечном итоге сводится к определению соотношения $K_ф < K_{ф0}$ или $K_ф > K_{ф0}$.

Для проведения некоторых обобщений необходимо рассмотреть более широкий класс временных функций. В частности, согласно (12), для некоторых типов напря-

Таблица 1

Форма сигнала	$U_{\text{эфф}}$	$U_{\text{ср}}$	K_a	$K_{\text{ф}}$	$K_{\text{и}}^2$
	$\sqrt{\alpha}\,U_{\text{м}}$	$\alpha U_{\text{м}}$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$	1
	$\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\,U_{\text{м}}$	$2\alpha(1-\alpha)\,U_{\text{м}}$	$\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$ при $\alpha \leqslant 0{,}5$	$\frac{1}{2\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$	$2(1-\alpha)$ при $\alpha \leqslant 0{,}5$; 2α при $\alpha \geqslant 0{,}5$
 $u=U_{\text{м}}e^{-t/\tau}$	$\sqrt{\frac{U_{\text{м}}^2}{\alpha}(1-e^{-\alpha})}$, $\alpha=\frac{T}{\tau}$	$\frac{2U_{\text{м}}}{\alpha}(1-e^{-\alpha/2})$	$\sqrt{\frac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}}$	$\frac{\sqrt{\alpha(1-e^{-\alpha})}}{2(1-e^{-\alpha/2})}$	$2\,\frac{1-e^{-\alpha/2}}{1-e^{-\alpha}}$
	$U_{\text{м}}\sqrt{\frac{3-8\alpha}{3}}$	$2(0{,}5-\alpha)\,U_{\text{м}}$	$\sqrt{\frac{3}{3-8\alpha}}$	$\frac{\sqrt{3-8\alpha}}{2\sqrt{3(0{,}5-\alpha)}}$	$\frac{3-6\alpha}{3-8\alpha}$
	$U_{\text{м}}\sqrt{\frac{2\alpha}{3}}$	$\alpha U_{\text{м}}$	$\sqrt{\frac{3}{2\alpha}}$	$\sqrt{\frac{2}{3\alpha}}$	$\frac{3}{2}$

жения величина K может быть равна единице, что соответствует строгому выполнению условия (16).

В табл. 1 приведены значения $U_{\text{эфф}}$, $U_{\text{ср}}$, $K_{\text{ф}}$, $K_{\text{а}}$ и K^2 для некоторых типов периодических сигналов. Для семейств кривых, изображенных в первой строке таблицы, величина $K=1$, т. е. $\delta=0$ во всем диапазоне изменений параметра α (см. рис. 3*а*). Для остальных сигналов, изображенных в таблице, $K < \sqrt{2}$. Соответствующие графики погрешностей изображены на рис. 3, 4, 5.

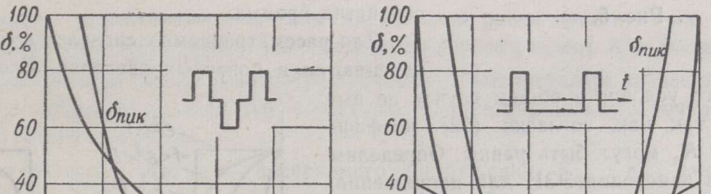


Рис. 3.

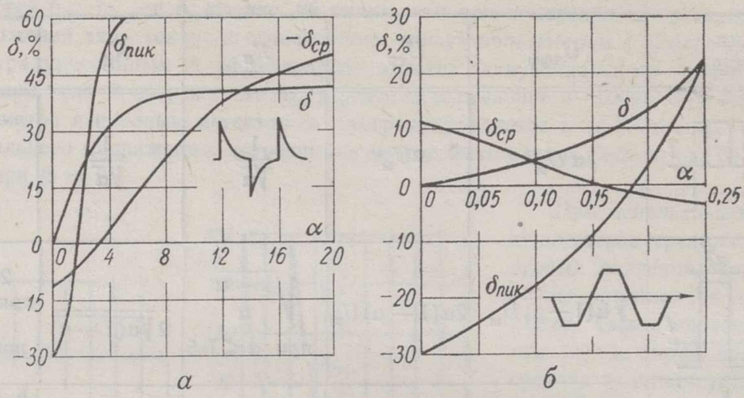


Рис. 4.

По характеру зависимости погрешности δ от величины параметра α (от величины коэффициента формы) периодические сигналы можно разделить на две характерные группы. Для первой группы сигналов значение погрешности δ в пределах каждого семейства кривых есть величина постоянная и не зависит от величины коэффициента формы. В частности, для семейства кривых, изображенных в первой строке табл. 1, $\delta = 0\%$ (рис. 3*а*); для пилообразного напряжения $\delta = 22{,}2\%$ (рис. 5). К этой же группе сигналов можно отнести и напряжение типа «синус с ограничением снизу» (рис. 2*б*), так как при любых величинах коэффициента формы $\delta \approx 12\%$. Результат измерения $U_{\text{эфф}}$ может быть уточнен путем введения поправки $\Delta = -\delta U_{\text{эфф}}$, которая в пределах каждого семейства кривых есть величина постоянная, независящая от величины коэффициента формы. Таким образом, для введения поправки отпадает необходимость иметь предварительную информацию о величине коэффициента формы, как это имеет место при измерении ЭЗН вольтметром с линейным детектором. Для второй группы сигналов величина погрешности δ зависит от коэффициента формы и в пределах каждого семейства кривых.

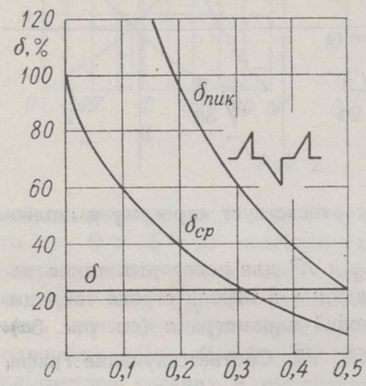


Рис. 5.

Для рассматриваемых сигналов функции $\delta(\alpha)$ изменяются в конечных пределах. Следует ожидать, что это условие в общем случае не выполняется, так как, согласно (12), коэффициенты K и $K_{\text{а}}$ могут быть равны. Определим погрешность измерения ЭЗН для напряжения, изменяющегося во времени по следующему закону [4]:

$$u(t) = \frac{U_{\text{м}} \cos \omega t}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \omega t}}. \qquad (20)$$

При $\varepsilon = -1$ имеем напряжение вида «квадратная волна», $\varepsilon^2 = 0$ — синусоидальное напряжение, при дальнейшем увеличении ε^2 кривая все больше заостряется (рис. 6). Для

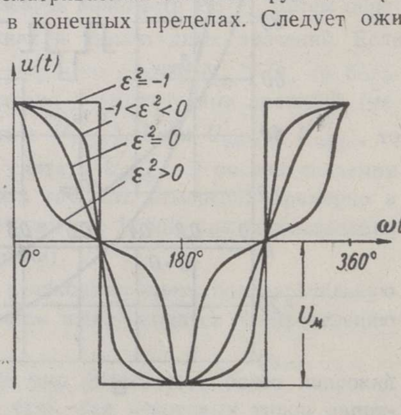


Рис. 6.

рассматриваемой функции

$$U_{эфф} = U_м \sqrt{\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2}-1}{\varepsilon^2}} \quad \text{при } \varepsilon^2 \neq 0\,. \tag{21}$$

Согласно [5], для среднего значения получим

$$U_{ср} = \begin{cases} \dfrac{U_м}{\pi\varepsilon} \ln \dfrac{\sqrt{1+\varepsilon^2}+\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}-\varepsilon} & \text{при } \varepsilon^2 > 0, \\ \dfrac{2U_м}{\pi\varepsilon} \arcsin \varepsilon & \text{при } \varepsilon^2 < 0. \end{cases} \tag{22}$$

Здесь величины ε и ε^2 всегда положительны, а условия $\varepsilon^2 < 0$ и $\varepsilon^2 > 0$ означают, что в формуле (20) перед параметром ε^2 стоит знак минус или плюс.

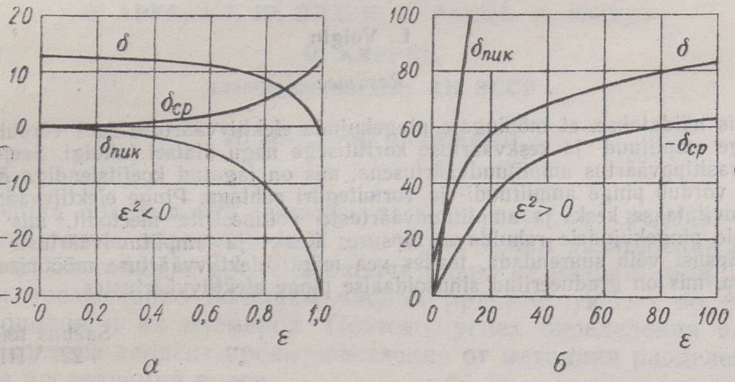


Рис. 7.

На рис. 7 приведены графики погрешностей $\delta_{ср}$, $\delta_{пик}$ и δ. В данном случае для $\varepsilon^2 > 0$ величина погрешности δ больше погрешности $\delta_{ср}$ во всем диапазоне параметра ε.

Проведенный анализ позволяет сделать следующие выводы:

1. Квадрат эффективного значения напряжений равен произведению среднего и квазипикового (амплитудное значение, деленное на коэффициент K^2) значений.

2. Предложенный метод вольтметров средних и амплитудных значений для некоторых типов напряжений позволяет обеспечить удовлетворительную точность измерения эффективного значения.

3. Если известно, что для измеряемого напряжения $K_ф > K_{ф0}$ или $K_ф < K_{ф0}$ ($\delta_{ср} < 0$ или $\delta_{ср} > 0$), то может быть использован комбинированный способ измерения ЭЗН, обеспечивающий бо́льшую точность по сравнению с методом вольтметров средних и амплитудных значений.

4. Для сигналов первой группы погрешность метода вольтметров средних и амплитудных значений не зависит от коэффициента формы измеряемого напряжения, и в пределах каждого семейства кривых есть величина постоянная, что позволяет получить значение поправки без предварительной информации о величине коэффициента формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davidson J. J., Average vs RMS Meters for Measuring Noise, IRE Transactions on Audio, **AU-9**, No. 4, 108—111 (1961).

2. Macdougall, J. S., Curves Find Value of Chopped Waveforms, Electronics, 32, No. 52, 46, 48 (1959).

3. Смирнов В. И., Курс высшей математики, ГИТТЛ, **1**, 1953.

4. Iordan H., Zur Darstellung periodischer Funktionen insbesondere durch Bahnkurven, Elektrische Nachrichten-Technik, **15**, Nr. 10 (1938).

5. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию
22. VIII 1963

ELEKTRILISE SIGNAALI AMPLITUUD-, EFEKTIIV- JA KESKVÄÄRTUSE VAHELISEST SEOSEST

L. Volgin

Resümee

Artiklis näidatakse, et mõningate pingekujude efektiivväärtuse ruut võrdub ligikaudu sama pinge amplituud- ja keskväärtuse korrutisega nagu üldisel juhulgi. Seejuures määratakse kvasitippväärtus amplituudväärtusena, mis on jagatud koefitsiendiga K^2. Viimane omakorda võrdub pinge amplituudi- ja vormiteguri suhtega. Pinge efektiivväärtuse mõõtmiseks soovitatakse kesk- ja amplituudväärtuste voltmeetrite meetodit, mis kindlustab mõningatele pingekujudele rahuldava täpsuse. Kesk- ja amplituudväärtuste voltmeetri meetodi täpsust võib suurendada, teades vea märki efektiivväärtuse mõõtmisel lineaarse detektoriga, mis on gradueeritud sinusoidaalse pinge efektiivväärtustes.

Saabus toimetusse
22. VIII 1963

ON THE INTERRELATION OF THE PEAK, EFFECTIVE AND AVERAGE VALUES OF THE ELECTRIC SIGNAL

L. Volgin

Summary

It has been stated that for certain types of voltage the square of effective value is approximately equal to the product of the peak and average values. In a general case, the square of the effective value is equal to the product of the average and quasi-peak values of the signal, the latter being determined as the peak value divided by the coefficient K^2, which equals the ratio of the amplitude and wave shape.

A method is proposed for measuring effective values of voltage with a voltmeter intended for measurements of average and peak values, providing satisfactory accuracy for certain types of voltage. The accuracy may be increased if information on the measurement error polarity is available, during measurements of effective values with a voltmeter having a linear detector calibrated in effective values of sinusoidal voltage.

Received
Aug. 22nd, 1963