

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОЛИНОМОВ ЭЙЛЕРА-БЕРНШТЕЙНА

В. Б. ОЖЕГОВ

Последовательность полиномов $\{P_n(x)\}_0^\infty$ будем называть последовательностью обобщенных полиномов Аппеля второго порядка (в дальнейшем последовательностью класса $A^{(2)}$), если

$$P_n^*(x) = P_{n-2}(x) \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \quad (1)$$

Определение (1) равносильно* следующему: последовательность $\{P_n(x)\}_0^\infty$ принадлежит классу $A^{(2)}$, если существуют (формально) два степенных ряда

$$A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \quad (2)$$

такие, что (также формально)

$$A(t)e^{tx} + B(t)e^{-tx} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n. \quad (3)$$

Из определения (1) следует, что если классу $A^{(2)}$ принадлежит последовательность полиномов $\{P_n(x)\}_0^\infty$, то классу $A^{(2)}$ принадлежит и последовательность их производных $\{Q_n(x)\}_0^\infty \equiv \{P'_{n+1}(x)\}_0^\infty$. В дальнейшем будем предполагать, что при всех n

$$P_n^{(n)}(x) = 1,$$

а ряды (2) будем называть производящими функциями последовательности $\{P_n(x)\}_0^\infty$ (у последовательности $\{Q_n(x)\}_0^\infty$ производящие функции $(A(t)$ и $-B(t)$, что следует из (3)).

1°. Запишем полиномы некоторой последовательности $\{P_n(x)\}_0^\infty \in A^{(2)}$ и последовательности их производных $\{Q_n(x)\}_0^\infty$ в виде

* Доказательство этого утверждения публикуется в трудах II-ой всесоюзной конференции по конструктивной теории функций, на которой автор выступил с докладом в октябре 1962 г.

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n!} + p_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + p_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \dots + p_0^{(n)},$$

$$Q_n(x) = \frac{x^n}{n!} + q_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + q_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \dots + q_0^{(n)}.$$

Тогда справедлива следующая

Лемма. Для того, чтобы задать эти последовательности, достаточно знать две последовательности $\{p_0^{(n)}\}_0^\infty$ и $\{q_0^{(n)}\}_0^\infty$ свободных членов.

Действительно, положив в (3) $x=0$, получим

$$A(t) + B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_0^{(n)} t^n. \quad (4)$$

Аналогично, положив $x=0$ в равенстве

$$A(t)e^{tx} - B(t)e^{-tx} = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) t^n,$$

получим

$$A(t) - B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_0^{(n)} t^n. \quad (5)$$

Используя равенства (4) и (5), последовательно из (3) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n &= A(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} + B(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-tx)^n}{n!} = [A(t) + B(t)] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^{2k}}{(2k)!} + \\ &+ [A(t) - B(t)] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tx)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{p_0^{(2k)}}{(2n-2k)!} x^{2n-2k} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{q_0^{(2k-1)}}{(2n-2k+1)!} x^{2n-2k+1} \right\} t^{2n} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \left[\frac{p_0^{(2k+1)}}{(2n-2k)!} x^{2n-2k} + \frac{q_0^{(2k)}}{(2n-2k+1)!} x^{2n-2k+1} \right] \right\} t^{2n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$P_{2n}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{p_0^{(2k)}}{(2n-2k)!} x^{2n-2k} + \frac{q_0^{(2k-1)}}{(2n-2k+1)!} x^{2n-2k+1} \right], \quad (6)$$

$$P_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{k=0}^n \frac{p_0^{(2k+1)}}{(2n-2k)!} x^{2n-2k} + \sum_{k=1}^n \frac{q_0^{(2k)}}{(2n-2k+1)!} x^{2n-2k+1}. \quad (7)$$

Аналогично получим

$$Q_{2n}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{p_0^{(2k+1)}}{(2n-2k+1)!} x^{2n-2k-1} + \frac{q_0^{(2k)}}{(2n-2k)!} x^{2n-2k} \right] \quad (8)$$

$$Q_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{p_0^{(2k)}}{(2n-2k+1)!} x^{2n-2k+1} + \sum_{k=1}^n \frac{q_0^{(2k-1)}}{(2n-2k+2)!} x^{2n-2k+2}, \quad (9)$$

что и доказывает утверждение леммы.

2°. Пусть все полиномы последовательности $\{P_n(x)\}_0^\infty$ из $A^{(2)}$ и $\{Q_n(x)\}_0^\infty \equiv \{P'_{n+1}(x)\}_0^\infty$ знакопостоянны на некотором отрезке $[a, b]$ (в дальнейшем $[a, b] \equiv [0, 1]$), и пусть, например,

$$P_k(x) \cdot P_{k+2}(x) < 0, \quad Q_k(x) \cdot Q_{k+2}(x) < 0, \quad (10)$$

$(k=0, 1, 2, \dots; 0 \leq x \leq 1)$

а для определенности

$$P_0(x) \equiv Q_0(x) \equiv 1, \quad P_1(x) > 0, \quad Q_1(x) < 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

Тогда, очевидно, это равносильно тому, что при всех n и $i \leq n-2$, и при $x \in [0, 1]$

$$P_n^{(i)}(x) \cdot P_n^{(i+2)}(x) < 0,$$

$$Q_n^{(i)}(x) \cdot Q_n^{(i+2)}(x) < 0,$$

т. е. каждый полином рассматриваемых последовательностей принадлежит классу Π — циклически монотонных полиномов на $[0, 1]$. Для многочленов этого класса вида

$$P_m(x) = \pm \frac{x^m}{m!} + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m, \quad (11)$$

имеет место следующая

Теорема С. Н. Бернштейна: ([1], стр. 504).

Среди всех многочленов класса Π наименее уклоняются от нуля на $[0, 1]$ многочлены $\pm S_m(x)$ и $\pm C_m(x)$,

где

$$S_m(x) = \int_0^x dx_1 \int_1^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \dots \int_{\alpha_{m-1}}^{x_{m-1}} dx_m, \quad (12)$$

$$C_m(x) = \int_0^x dx_1 \int_1^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \dots \int_{\alpha_{m-1}}^{x_{m-1}} dx_m,$$

где

$$\alpha_{m-1} = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 2k + 1, \\ 1 & \text{при } m = 2k, \end{cases}$$

$$\alpha_{m-1} + \alpha_{m-1} = 1,$$

причем это наименьшее уклонение L_m будет

$$L_m = |S_m(1)| = |C_m(0)|.$$

Из формул (12) следует, что последовательность $\{S_n(x)\}_0^\infty$ экстремальных полиномов класса Π , также как и последовательность их производных $\{C_n(x)\}_0^\infty$ есть последовательности обобщенных полиномов Аппеля второго порядка. Следовательно, каждый полином этих последовательностей удовлетворяет условиям (10) и может быть записан в виде (6), (7), (8) или (9), где

$$P_n(x) \equiv S_n(x), \quad Q_n(x) \equiv C_n(x).$$

Вследствие леммы С. Н. Бернштейна ([1], стр. 503), экстремальные полиномы удовлетворяют условиям

$$S_m(0) = C_m(1) = 0. \quad (13)$$

Из этих условий и из представлений (6), (7), (8), (9) заключаем, что свободные члены экстремальных полиномов можно последовательно определить из уравнений

$$\begin{aligned} p_0^{(2k)} &= 0, & \frac{1}{(2n)!} + \sum_{k=1}^n \frac{q_0^{(2k)}}{(2n-2k)!} &= 0, \\ p_0^{(2k+1)} &= 0, & \frac{1}{(2n-1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{q_0^{(2k+1)}}{(2n-2k)!} &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения равносильны, естественно, условиям С. Н. Бернштейна ([1], стр. 497) для чисел E_n и E_n^* — коэффициентов Эйлера-Бернштейна, так как

$$\begin{aligned} E_{2n} &= (2n)! q_0^{(2n)}, & E_{2n+1} &= (2n+1)! p_0^{(2n+1)} \\ E_{2n}^* &= (2n)! p_0^{(2n)}, & E_{2n+1}^* &= (2n+1)! q_0^{(2n+1)}. \end{aligned}$$

Исходя из той же леммы С. Н. Бернштейна, можно получить и формулы для производящих функций последовательностей $\{S_n(x)\}_0^\infty$ и $\{C_n(x)\}_0^\infty$ полиномов Эйлера-Бернштейна. Действительно, если

$$A(t)e^{tx} + B(t)e^{-tx} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)t^n,$$

то, используя (13), получим

$$A(t) = \frac{1 + e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad B(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + e^{-t}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(x) t^n = \frac{1 + e^{-t}}{e^t + e^{-t}} e^{tx} + \frac{e^t - 1}{e^t + e^{-t}} e^{-tx},$$

откуда

$$\frac{\operatorname{sh} tx + \operatorname{ch} t(1-x)}{\operatorname{ch} t} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x) t^n.$$

Аналогично имеет место

$$\frac{\operatorname{ch} tx - \operatorname{sh} t(1-x)}{\operatorname{ch} t} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x) t^n.$$

Из полученных формул и из свойств гиперболических функций получаем следующие разложения:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ch} t(1-x)}{\operatorname{ch} t} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}(x) t^{2n}, & \frac{\operatorname{sh} tx}{\operatorname{ch} t} &= \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}(x) t^{2n+1}, \\ \frac{\operatorname{ch} tx}{\operatorname{ch} t} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}(x) t^{2n}, & \frac{\operatorname{sh} t(x-1)}{\operatorname{ch} t} &= \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}(x) t^{2n+1}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14), например, следует

$$\sum_{n=0}^{\infty} [C_{2n}(x+1) + C_{2n}(x-1)] t^{2n} = \frac{\operatorname{ch} t(x+1) + \operatorname{ch} t(x-1)}{\operatorname{ch} t},$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty} [C_{2n}(x+1) + C_{2n}(x-1)] t^{2n} = 2 \operatorname{ch} tx.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} [C_{2n}(x+1) + C_{2n}(x-1)] = \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

т. е. получено соотношение С. Н. Бернштейна ([1], стр. 499). Аналогично можно получить

$$\frac{1}{2} [S_{2k-1}(x+1) + S_{2k-1}(x-1)] = \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$$\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2} [S_{2k}(-x) + S_{2k}(2-x)] = \frac{1}{2} [S_{2k}(x) + S_{2k}(2+x)],$$

$$\frac{1}{2} [C_{2k-1}(x) + C_{2k-1}(x+2)] = \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Из разложений (14) также следует

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}(0) t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}(1) t^{2n}.$$

Следовательно, если функцию $(\operatorname{ch} t)^{-1}$ разложить в ряд по степеням t , то коэффициент при t^{2n} совпадает по абсолютной величине с величиной L_{2n} наименьшего уклонения многочлена вида (11) класса Ц на $[0,1]$.

Из (14) также получим

$$\operatorname{th} t = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}(1) t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} [-C_{2n+1}(0)] t^{2n+1}.$$

Следовательно, коэффициенты разложения $\operatorname{th} t$ в ряд, при соответствующих степенях t по абсолютной величине совпадают с L_{2n+1} — величинами наименьшего уклонения многочленов класса Ц на $[0,1]$.

ЛИТЕРАТУРА

Бернштейн С. Н. О некоторых свойствах циклически монотонных функций, Собр. соч., АН СССР, М., 2, № 100 (1954).

Ленинградский механический институт

Поступила в редакцию
23. IX 1963

EULERI-BERNSTEINI POLÜNOOMIDE JADU TEKITAVATEST FUNKTSIOONIDEST

V. Ožegov

Resümee

Artiklis esitatakse Euleri-Bernsteini polünoomide jadu tekitavate funktsioonide jaoks valemid ja näidatakse mõned nende rakendused.

Leningradi Mehaanika Instituut

Saabus toimetusse
23. IX 1963

THE PRODUCING FUNCTIONS OF EULER-BERNSTEIN'S POLYNOMS

V. Ozhegov

Summary

In this paper formulae of the producing functions for sequences of Euler-Bernstein's polynoms have been deduced and certain applications of these formulae have been presented.

*Institute of Mechanics,
Leningrad*

Received
Sept. 23rd, 1963