EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1964, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1964, № 2

ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ПОЛИНОМОВ ЭЙЛЕРА-БЕРНШТЕЙНА

В. Б. ОЖЕГОВ

Последовательность полиномов $\{P_n(x)\}_0^\infty$ будем называть последовательностью обобщенных полиномов Аппеля второго порядка (в дальнейшем последовательностью класса $A^{(2)}$), если

$$P''_n(x) = P_{n-2}(x) \qquad (n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots). \tag{1}$$

Определение (1) равносильно* следующему: последовательность $\{P_n(x)\}_0^\infty$ принадлежит классу $A^{(2)}$, если существуют (формально) два степенных ряда

$$A(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad B(t)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \tag{2}$$

такие, что (также формально)

$$A(t)e^{tx}+B(t)e^{-tx}=\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n. \tag{3}$$

Из определения (1) следует, что если классу $A^{(2)}$ принадлежит последовательность полиномов $\{P_n(x)\}_0^\infty$, то классу $A^{(2)}$ принадлежит и последовательность их производных $\{Q_n(x)\}_0^\infty \equiv \{P'_{n+1}(x)\}_0^\infty$. В дальнейшем будем предполагать, что при всех n

$$P_n^{(n)}(x)=1,$$

а ряды (2) будем называть производящими функциями последовательности $\{P_n(x)\}_0^\infty$ (у последовательности $\{Q_n(x)\}_0^\infty$ производящие функции $(A(t)$ и $-B(t)$, что следует из (3)).

1°. Запишем полиномы некоторой последовательности $\{P_n(x)\}_0^\infty \in A^{(2)}$ и последовательности их производных $\{Q_n(x)\}_0^\infty$ в виде

* Доказательство этого утверждения публикуется в трудах II-ой всесоюзной конференции по конструктивной теории функций, на которой автор выступил с докладом в октябре 1962 г.

$$P_n(x)=\frac{x^n}{n!}+p_{n-1}^{(n)}x^{n-1}+p_{n-2}^{(n)}x^{n-2}+\ldots+p_0^{(n)},$$

$$Q_n(x)=\frac{x^n}{n!}+q_{n-1}^{(n)}x^{n-1}+q_{n-2}^{(n)}x^{n-2}+\ldots+q_0^{(n)}.$$

Тогда справедлива следующая

Лемма. Для того, чтобы задать эти последовательности, достаточно знать две последовательности $\{p_0^{(n)}\}_0^\infty$ и $\{q_0^{(n)}\}_0^\infty$ свободных членов.

Действительно, положив в (3) $x=0$, получим

$$A(t)+B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_0^{(n)}t^n. \tag{4}$$

Аналогично, положив $x=0$ в равенстве

$$A(t)e^{tx}-B(t)e^{-tx}=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)t^n,$$

получим

$$A(t)-B(t)=\sum_{n=0}^{\infty}q_0^{(n)}t^n. \tag{5}$$

Используя равенства (4) и (5), последовательно из (3) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n=A(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tx)^n}{n!}+B(t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-tx)^n}{n!}=[A(t)+B(t)]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tx)^{2k}}{(2k)!}+$$

$$+[A(t)-B(t)]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(tx)^{2k+1}}{(2k+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{p_0^{(2k)}}{(2n-2k)!}x^{2n-2k}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n}\frac{q_0^{(2k-1)}}{(2n-2k+1)!}x^{2n-2k+1}\right\}t^{2n}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{p_0^{(2k+1)}}{(2n-2k)!}x^{2n-2k}+\frac{q_0^{(2k)}}{(2n-2k+1)!}x^{2n-2k+1}\right]\right\}t^{2n+1}.$$

Отсюда следует, что

$$P_{2n}(x)=\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{p_0^{(2k)}}{(2n-2k)!}x^{2n-2k}+\frac{q_0^{(2k-1)}}{(2n-2k+1)!}x^{2n-2k+1}\right], \tag{6}$$

$$P_{2n+1}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{p_0^{(2k+1)}}{(2n-2k)!}x^{2n-2k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{q_0^{(2k)}}{(2n-2k+1)!}x^{2n-2k+1}. \tag{7}$$

Аналогично получим

$$Q_{2n}(x) = \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{p_0^{(2k+1)}}{(2n-2k+1)!} x^{2n-2k-1} + \frac{q_0^{(2k)}}{(2n-2k)!} x^{2n-2k} \right] \tag{8}$$

$$Q_{2n+1}(x) = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{p_0^{(2k)}}{(2n-2k+1)!} x^{2n-2k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{q_0^{(2k-1)}}{(2n-2k+2)!} x^{2n-2k+2}, \tag{9}$$

что и доказывает утверждение леммы.

2°. Пусть все полиномы последовательности $\{P_n(x)\}_0^\infty$ из $A^{(2)}$ и $\{Q_n(x)\}_0^\infty \equiv \{P'_{n+1}(x)\}_0^\infty$ знакопостоянны на некотором отрезке $[a, b]$ (в дальнейшем $[a, b] \equiv [0, 1]$), и пусть, например,

$$P_k(x) \cdot P_{k+2}(x) < 0, \qquad Q_k(x) \cdot Q_{k+2}(x) < 0, \tag{10}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots; \ 0 \leqslant x \leqslant 1)$$

а для определенности

$$P_0(x) \equiv Q_0(x) \equiv 1, \qquad P_1(x) > 0, \qquad Q_1(x) < 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1).$$

Тогда, очевидно, это равносильно тому, что при всех n и $i \leqslant n-2$, и при $x \in [0, 1]$

$$P_n^{(i)}(x) \cdot P_n^{(i+2)}(x) < 0,$$
$$Q_n^{(i)}(x) \cdot Q_n^{(i+2)}(x) < 0,$$

т. е. каждый полином рассматриваемых последовательностей принадлежит классу Ц — циклически монотонных полиномов на [0, 1]. Для многочленов этого класса вида

$$P_m(x) = \pm \frac{x^m}{m!} + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m, \tag{11}$$

имеет место следующая

Теорема С. Н. Бернштейна: ([1], стр. 504).

Среди всех многочленов класса Ц наименее уклоняются от нуля на [0,1] многочлены $\pm S_m(x)$ и $\pm C_m(x)$,

где

$$S_m(x) = \int_0^x dx_1 \int_1^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \ldots \int_{\alpha_{m-1}}^{x_{m-1}} dx_m,$$
$$C_m(x) = \int_0^x dx_1 \int_1^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3 \ldots \int_{\alpha_{m-1}}^{x_{m-1}} dx_m, \tag{12}$$

где

$$\alpha_{m-1} = \begin{cases} 0 & \text{при } m = 2k+1, \\ 1 & \text{при } m = 2k, \end{cases}$$

$$\alpha_{m-1} + \bar{\alpha}_{m-1} = 1,$$

причем это наименьшее уклонение L_m будет

$$L_m = |S_m(1)| = |C_m(0)|.$$

Из формул (12) следует, что последовательность $\{S_n(x)\}_0^\infty$ экстремальных полиномов класса Ц, также как и последовательность их производных $\{C_n(x)\}_0^\infty$ есть последовательности обобщенных полиномов Аппеля второго порядка. Следовательно, каждый полином этих последовательностей удовлетворяет условиям (10) и может быть записан в виде (6), (7), (8) или (9), где

$$P_n(x) \equiv S_n(x), \quad Q_n(x) \equiv C_n(x).$$

Вследствие леммы С. Н. Бернштейна ([1], стр. 503), экстремальные полиномы удовлетворяют условиям

$$S_m(0) = C_m(1) = 0. \tag{13}$$

Из этих условий и из представлений (6), (7), (8), (9) заключаем, что свободные члены экстремальных полиномов можно последовательно определить из уравнений

$$p_0^{(2k)} = 0, \qquad \frac{1}{(2n)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{q_0^{(2k)}}{(2n-2k)!} = 0,$$

$$p_0^{(2k+1)} = 0, \qquad \frac{1}{(2n-1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{q_0^{(2k+1)}}{(2n-2k)!} = 0.$$

Эти уравнения равносильны, естественно, условиям С. Н. Бернштейна ([1], стр. 497) для чисел E_n и E_n^* — коэффициентов Эйлера-Бернштейна, так как

$$E_{2n} = (2n)!\, q_0^{(2n)}, \quad E_{2n+1} = (2n+1)!\, p_0^{(2n+1)}$$

$$E_{2n}^* = (2n)!\, p_0^{(2n)}, \quad E_{2n+1}^* = (2n+1)!\, q_0^{(2n+1)}.$$

Исходя из той же леммы С. Н. Бернштейна, можно получить и формулы для производящих функций последовательностей $\{S_n(x)\}_0^\infty$ и $\{C_n(x)\}_0^\infty$ полиномов Эйлера-Бернштейна. Действительно, если

$$A(t)\, e^{tx} + B(t)\, e^{-tx} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)\, t^n,$$

то, используя (13), получим

$$A(t)=\frac{1+e^{-t}}{e^t+e^{-t}}, \qquad B(t)=\frac{e^t-1}{e^t+e^{-t}}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)\,t^n=\frac{1+e^{-t}}{e^t+e^{-t}}\,e^{tx}+\frac{e^t-1}{e^t+e^{-t}}\,e^{-tx},$$

откуда

$$\frac{\operatorname{sh} tx+\operatorname{ch} t(1-x)}{\operatorname{ch} t}=\sum_{n=0}^{\infty} S_n(x)\,t^n.$$

Аналогично имеет место

$$\frac{\operatorname{ch} tx-\operatorname{sh} t(1-x)}{\operatorname{ch} t}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x)\,t^n.$$

Из полученных формул и из свойств гиперболических функций получаем следующие разложения:

$$\frac{\operatorname{ch} t(1-x)}{\operatorname{ch} t}=\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}(x)\,t^{2n}, \quad \frac{\operatorname{sh} tx}{\operatorname{ch} t}=\sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}(x)\,t^{2n+1},$$

$$\frac{\operatorname{ch} tx}{\operatorname{ch} t}=\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}(x)\,t^{2n}, \qquad \frac{\operatorname{sh} t(x-1)}{\operatorname{ch} t}=\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1}(x)\,t^{2n+1}. \tag{14}$$

Из (14), например, следует

$$\sum_{n=0}^{\infty}[C_{2n}(x+1)+C_{2n}(x-1)]t^{2n}=\frac{\operatorname{ch} t(x+1)+\operatorname{ch} t(x-1)}{\operatorname{ch} t},$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}[C_{2n}(x+1)+C_{2n}(x-1)]t^{2n}=2\operatorname{ch} tx.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2}[C_{2n}(x+1)+C_{2n}(x-1)]=\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

т. е. получено соотношение С. Н. Бернштейна ([1], стр. 499). Аналогично можно получить

$$\frac{1}{2}[S_{2k-1}(x+1)+S_{2k-1}(x-1)]=\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},$$

$$\frac{x^{2k}}{(2k)!}=\frac{1}{2}[S_{2k}(-x)+S_{2k}(2-x)]=\frac{1}{2}[S_{2k}(x)+S_{2k}(2+x)],$$

$$\frac{1}{2}[C_{2k-1}(x)+C_{2k-1}(x+2)]=\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

Из разложений (14) также следует

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t} = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}(0)\, t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n}(1)\, t^{2n}.$$

Следовательно, если функцию $(\operatorname{ch} t)^{-1}$ разложить в ряд по степеням t, то коэффициент при t^{2n} совпадает по абсолютной величине с величиной L_{2n} наименьшего уклонения многочлена вида (11) класса Ц на [0,1].

Из (14) также получим

$$\operatorname{th} t = \sum_{n=0}^{\infty} S_{2n+1}(1)\, t^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} [-C_{2n+1}(0)]\, t^{2n+1}.$$

Следовательно, коэффициенты разложения $\operatorname{th} t$ в ряд, при соответствующих степенях t по абсолютной величине совпадают с L_{2n+1} — величинами наименьшего уклонения многочленов класса Ц на [0,1].

ЛИТЕРАТУРА

Бернштейн С. Н. О некоторых свойствах циклически монотонных функций, Собр. соч., АН СССР, М., 2, № 100 (1954).

Ленинградский механический институт

Поступила в редакцию
23. IX 1963

EULERI-BERNSTEINI POLÜNOOMIDE JADU TEKITAVATEST FUNKTSIOONIDEST

V. Ožegov

Resümee

Artiklis esitatakse Euleri-Bernsteini polünoomide jadu tekitavate funktsioonide jaoks valemid ja näidatakse mõned nende rakendused.

Leningradi Mehaanika Instituut

Saabus toimetusse
23. IX 1963

THE PRODUCING FUNCTIONS OF EULER-BERNSTEIN'S POLYNOMS

V. Ozhegov

Summary

In this paper formulae of the producing functions for sequences of Euler-Bernstein's polynoms have been deduced and certain applications of these formulae have been presented.

Institute of Mechanics,
Leningrad

Received
Sept. 23rd, 1963