EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1963, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1963, № 2

О ПРИМЕНЕНИИ СИМВОЛИЧЕСКОГО МЕТОДА А. И. ЛУРЬЕ В ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ ДИНАМИКИ УПРУГИХ ПЛИТ

У. НИГУЛ,
кандидат технических наук

В данной статье выводятся символические формулы и уравнения трехмерной теории динамики упругих плит для малой деформации, антисимметричной относительно срединной поверхности плиты. При этом предполагается, что дифференцирование искомых функций по времени является равноценным умножению на комплексный параметр s.

При $s=0$ предлагаемые формулы переходят в символические формулы статики, построенные и примененные в работах [1, 2] А. И. Лурье.

Если рассматривать частные решения, при которых действие двумерного оператора Лапласа Δ в координатах срединной поверхности плиты приводит к умножению искомых функций на комплексное число q^2, то из символических уравнений вытекают известные уравнения Лэмба [3, 4] и волн Лява [4].

Для напряженных состояний, изменяющихся медленно как по времени, так и по координатам срединной поверхности, получим из символических выражений в качестве первого приближения формулы теории Кирхгофа, а в качестве уточненных приближений — формулы метода усеченных степенных рядов [5, 6] и теории типа Тимошенко [7, 8].

1. Основные обозначения и исходные положения

Принимаем следующие обозначения: E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона, $2h$ — толщина плиты, ξ, η, ζ — безразмерные (деленные на h) декартовые координаты, из которых ξ и η лежат на срединной поверхности ($\zeta=0$) плиты, c_1, c_2 — скорости распространения волн сжатия и сдвига, t — время, τ — безразмерное время, $\vec{u}$ — безразмерный (деленный на h) вектор перемещений, u_j ($j=1, 2, 3$) — его компоненты, σ_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) — напряжения, σ_{ij}^* — безразмерные напряжения. При этом

$$\tau=\frac{t c_2}{h}, \quad \sigma_{ij}^*=\frac{\sigma_{ij}(1+\mu)}{E}, \quad \frac{c_2^2}{c_1^2}=\frac{1-2\mu}{2-2\mu}=k_0^2. \tag{1.1}$$

Безразмерные моменты, поперечные силы и интегральные перемещения определим по формулам:

$$M_{kr}^* = \int_{-1}^{+1} \sigma_{kr}^* \zeta \, d\zeta, \qquad Q_r^* = \int_{-1}^{+1} \sigma_{r3}^* d\zeta, \tag{1.2}$$

$$U_r = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} u_r \zeta \, d\zeta, \qquad U_3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} u_3 \, d\zeta \qquad (k, \ r = 1, \ 2).$$

Интегральные перемещения U_j ($j = 1, 2, 3$) по существу являются коэффициентами первых членов разложения перемещений u_j как функции ζ по полиномам Лежандра.

Для символов дифференцирования принимаем следующие краткие обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \partial_1, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \partial_2, \quad \frac{\partial \ldots}{\partial \zeta} = (\ldots)', \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \partial_\tau, \quad \partial_1^2 + \partial_2^2 = \Delta. \tag{1.3}$$

Будем исходить из уравнения равновесия в перемещениях:

$$[c_1^2 \mu (1 - \mu)^{-1} + c_2^2] \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + c_2^2 \Delta \vec{u} = c_2^2 \partial_\tau^2 \vec{u}. \tag{1.4}$$

Применим известный прием представления вектора перемещений в форме

$$\vec{u} = \operatorname{grad} \Phi_0 + \operatorname{rot} \vec{H}, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0 \tag{1.5}$$

и предположим, что

$$\partial_\tau^2 \Phi_0 = s^2 \Phi_0, \qquad \partial_\tau^2 \vec{H} = s^2 \vec{H}, \tag{1.6}$$

где s является комплексным параметром *.

Введем еще обозначения:

$$\alpha^2 = \Delta - k_0^2 s^2, \qquad \beta^2 = \Delta - s^2, \ \gamma^2 = \Delta - \frac{1}{2} s^2. \tag{1.7}$$

На основе (1.5)—(1.7) получим из (1.4) уравнения:

$$\Phi_0'' + \alpha^2 \Phi_0 = 0, \ \vec{H}'' + \beta^2 \vec{H} = 0, \ \operatorname{div} \vec{H} = 0. \tag{1.8}$$

Задача заключается в построении решения системы (1.8), которое соответствует деформации, антисимметричной относительно срединной поверхности плиты, и удовлетворяет на торцевых поверхностях ($\zeta = \pm h$) краевым условиям

$$\sigma_{i3}^* (\xi, \eta, \pm 1; \tau) = K_i p_i, \qquad p_i = p_i \ (\xi, \eta; \tau), \tag{1.9}$$
$$(i = 1, 2, 3; \quad K_1 = K_2 = 1, \quad K_3 = \pm 1).$$

---

* В связи с предположением (1.6) излагаемые результаты могут быть рассмотрены либо формулами, относящимися к случаю волн, изменяющихся во времени по экспоненциальному закону, либо формулами, связывающими изображения Лапласа (при нулевых начальных условиях).

Если воспользоваться степенными рядами по координате ζ и применить символическую запись А. И. Лурье [1,2], то указанная задача сводится к построению решения системы (1.8), в которой символ Δ формально рассматривается как алгебраическая величина. Такое символическое решение системы (1.8) может быть написано в форме

$$\Phi_0 = \frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha}(C_0), \quad H_1 = \cos\beta\zeta\,(C_1), \quad H_2 = \cos\beta\zeta\,(C_2), \quad H_3 = \frac{\sin\beta\zeta}{\beta}(-\partial_1 C_1 + \partial_2 C_2), \tag{1.10}$$

где H_j $(j = 1, 2, 3)$ являются компонентами вектора $\vec{H}$, а C_k $(k = 0, 1, 2)$ — функциями от ξ, η, τ.

По идее символического метода [1,2] тригонометрические функции от α и β следует здесь понимать как кратную запись дифференциальных выражений бесконечного порядка, которые получаются из этих функций при их разложении в степенные ряды.

На основе (1.10) получим из (1.5) для компонентов вектора перемещений $\vec{u}$ следующие формулы:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha}\partial_1 C_0 + \frac{\sin\beta\zeta}{\beta}[\partial_1\partial_2 C_1 + (\partial_2^2 - \beta^2)C_2], \\ u_2 &= \frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha}\partial_2 C_0 + \frac{\sin\beta\zeta}{\beta}[\partial_1\partial_2 C_2 + (\partial_1^2 - \beta^2)C_1], \\ u_3 &= \cos\alpha\zeta(C_0) + \cos\beta\zeta(\partial_2 C_1 - \partial_1 C_2). \end{aligned} \tag{1.11}$$

При помощи известных формул трехмерной теории упругости теперь нетрудно построить символические выражения для напряжений и затем выразить C_k $(k = 0, 1, 2)$ через функции $\Phi_j = \Phi_j(\xi, \eta; \tau)$, удовлетворяющие условиям (1.9). Поскольку методика указанных вычислений не отличается от таковой в статике [1,2], то опустим промежуточные выкладки и изложим окончательные результаты.

2. Символические формулы и уравнения

а) Формулы для перемещений:

$$\begin{aligned} u_r = {} & \frac{2}{s^2}\left(-\Delta\frac{\sin\beta}{\beta}\,\frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha} + \gamma^2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{\sin\beta\zeta}{\beta}\right)\beta^2\partial_r\Phi_1 - \\ & - 2(-1)^r\frac{\sin\beta\zeta}{\beta}(\partial_1 + \partial_2 - \partial_r)\Phi_2 + \\ & + \frac{2}{s^2}\left(-\gamma^2\cos\beta\frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha} + \beta^2\cos\alpha\frac{\sin\beta\zeta}{\beta}\right)\partial_r\Phi_3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} u_3 = {} & \frac{2}{s^2}\left(-\beta^2\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\alpha\zeta + \gamma^2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta\zeta\right)\Delta\Phi_1 + \\ & + \frac{2}{s^2}(-\gamma^2\cos\beta\cos\alpha\zeta + \Delta\cos\alpha\cos\beta\zeta)\Phi_3, \\ & (r = 1,\ 2). \end{aligned}$$

б) Формулы для напряжений:

$$\sigma_{rr}^{*}=\frac{2}{s^2}\Big\{-\Delta\frac{\sin\beta}{\beta}\,\frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha}\Big[\partial_r^2+\frac{1}{2}\mu(1-\mu)^{-1}s^2\Big]+$$

$$+\gamma^2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{\sin\beta\zeta}{\beta}\partial_r^2\Big\}\beta^2\Phi_1-2(-1)^r\frac{\sin\beta\zeta}{\beta}\partial_1\partial_2\Phi_2+$$

$$+\frac{2}{s^2}\Big\{-\gamma^2\cos\beta\frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha}\Big[\partial_r^2+\frac{1}{2}\mu(1-\mu)^{-1}s^2\Big]+$$

$$+\beta^2\cos\alpha\frac{\sin\beta\zeta}{\beta}\partial_r^2\Big\}\Phi_3,$$

$$\sigma_{12}^{*}=\sigma_{21}^{*}=\frac{1}{2}(\partial_1u_2+\partial_2u_1),\tag{2.2}$$

$$\sigma_{r3}^{*}=\frac{2}{s^2}\Big(-\Delta\beta^2\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\alpha\zeta+\gamma^4\frac{\sin\alpha}{\alpha}\cos\beta\zeta\Big)\partial_r\Phi_1-$$

$$-(-1)^r\cos\beta\zeta(\partial_1+\partial_2-\partial_r)\Phi_2-\frac{2}{s^2}(\cos\beta\cos\alpha\zeta-\cos\alpha\cos\beta\zeta)\gamma^2\partial_r\Phi_3,$$

$$\sigma_{33}^{*}=\frac{2}{s^2}\Big(\frac{\sin\beta}{\beta}\,\frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{\sin\beta\zeta}{\beta}\Big)\Delta\beta^2\gamma^2\Phi_1+$$

$$+\frac{2}{s^2}\Big(\gamma^4\cos\beta\,\frac{\sin\alpha\zeta}{\alpha}-\Delta\beta^2\cos\alpha\frac{\sin\beta\zeta}{\beta}\Big)\Phi_3.$$

в) Формулы для интегральных величин:

$$M_{rr}^{*}=\frac{4}{s^2}\Big\{-\frac{\Delta}{\alpha^2}\frac{\sin\beta}{\beta}\Big(\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha\Big)\Big[\partial_r^2+\frac{1}{2}\mu(1-\mu)^{-1}s^2\Big]+$$

$$+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\frac{\sin\alpha}{\alpha}\Big(\frac{\sin\beta}{\beta}-\cos\beta\Big)\partial_r^2\Big\}\beta^2\Phi_1-\frac{4(-1)^r}{\beta^2}\Big(\frac{\sin\beta}{\beta}-\cos\beta\Big)\partial_1\partial_2\Phi_2+$$

$$+\frac{4}{s^2}\Big\{-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cos\beta\Big(\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha\Big)\Big[\partial_r^2+\frac{1}{2}\mu(1-\mu)^{-1}s^2\Big]+$$

$$+\cos\alpha\Big(\frac{\sin\beta}{\beta}-\cos\beta\Big)\partial_r^2\Big\}\Phi_3,$$

$$M_{12}^{*}=M_{21}^{*}=\frac{1}{3}(\partial_1U_2+\partial_2U_1),\tag{2.3}$$

$$Q_r^{*}=s^2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{\sin\beta}{\beta}\partial_r\Phi_1-2(-1)^r\frac{\sin\beta}{\beta}(\partial_1+\partial_2-\partial_r)\Phi_2-$$

$$-\frac{4}{s^2}\gamma^2\Big(\cos\beta\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha\frac{\sin\beta}{\beta}\Big)\partial_r\Phi_3,$$

$$U_r=\frac{6}{s^2}\Big\{-\frac{\Delta}{\alpha^2}\,\frac{\sin\beta}{\beta}\Big(\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha\Big)+\frac{\gamma^2}{\beta^2}\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\Big(\frac{\sin\beta}{\beta}-\cos\beta\Big)\Big\}\beta^2\partial_r\Phi_1-$$

$$-6(-1)^r\frac{1}{\beta^2}\Big(\frac{\sin\beta}{\beta}-\cos\beta\Big)(\partial_1+\partial_2-\partial_r)\Phi_2+$$

$$+\frac{6}{s^2}\Big\{-\frac{\gamma^2}{\alpha^2}\cos\beta\Big(\frac{\sin\alpha}{\alpha}-\cos\alpha\Big)+\cos\alpha\Big(\frac{\sin\beta}{\beta}-\cos\beta\Big)\Big\}\partial_r\Phi_3,$$

$$U_3=\Delta\frac{\sin\alpha}{\alpha}\,\frac{\sin\beta}{\beta}\Phi_1+\frac{2}{s^2}\Big(-\gamma^2\cos\beta\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\Delta\cos\alpha\frac{\sin\beta}{\beta}\Big)\Phi_3.$$

В изложенных формулах α и β появились в знаменателях. Однако при раскрытии тригонометрических функций в виде степенных рядов эти знаменатели сокращаются.

г) Уравнения:

Подставляя выражения (2.3) в интегрированные уравнения равновесия

$$\begin{gathered}\partial_1 M^*_{r1} + \partial_2 M^*_{r2} - Q^*_r = \frac{1}{3} s^2 U_r - 2p_r \qquad (r = 1, 2), \\ \partial_1 Q^*_1 + \partial_2 Q^*_2 = s^2 U_3 - 2p_3\end{gathered} \tag{2.4}$$

или же подставляя выражения (2.2) в условия (1.9), получим для Φ_j $(j = 1, 2, 3)$ уравнения

$$-D\,\partial_1\Phi_1 + \cos\beta\,\partial_2\Phi_2 = p_1, \quad -D\,\partial_2\Phi_1 - \cos\beta\,\partial_1\Phi_2 = p_2, \quad -D\,\Phi_3 = p_3, \tag{2.5}$$

где

$$D = \frac{2}{s^2}\,\Delta\beta^2\left(\cos\alpha\,\frac{\sin\beta}{\beta} - \cos\beta\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) - \frac{s^2}{2}\cos\beta\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}. \tag{2.6}$$

д) Замечание о выборе разрешающих функций Φ_1 и Φ_2.

Функции Φ_1 и Φ_2 подобраны в данной статье таким образом, чтобы особое напряженное состояние

$$\begin{gathered}u_3 = U_3 = \overset{*}{\sigma}_{33} = 0, \quad \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0, \quad \overset{*}{\sigma}_{11} + \overset{*}{\sigma}_{22} = 0, \\ \partial_1 \overset{*}{\sigma}_{13} + \partial_2 \overset{*}{\sigma}_{23} = 0, \quad \overset{*}{\sigma}_{12} = \overset{*}{\sigma}_{21} = \frac{1}{2}\,(\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1),\end{gathered} \tag{2.7}$$

определяемое разрешающей функцией Φ_2 (при $\Phi_1 = \Phi_3 = 0$) наглядно выделялось. Это напряженное состояние связано в динамике с волнами Лява, а в статике — с так называемым «Рейсснеровским эффектом» у краев плиты.

Принципиально нетрудно заменить Φ_1 и Φ_2 в формулах (2.1)—(2.3) такими новыми функциями Ψ_1 и Ψ_2, для которых из (2.5) вытекают отдельные уравнения. В частном случае статики $(s = 0)$ эти функции Ψ_1 и Ψ_2 совпадали бы с разрешающими функциями, примененными в работах А. И. Лурье [1, 2].

3. Некоторые частные случаи

Предположим, что $p_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ и рассмотрим уравнения:

$$D\,\Phi_1 = \text{const}, \quad \cos\beta\,\Phi_2 = \text{const}, \quad D\,\Phi_3 = 0. \tag{3.1}$$

Функции Φ_j $(j = 1, 2, 3)$, являющиеся решениями уравнений (3.1), определяют независимые напряженные состояния *, удовлетворяющие краевым условиям (1.9).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1) Частный случай статики.

Осуществляя в выражениях предыдущего пункта переход к пределу $s \to 0$, получим формулы статики [1, 2]. Уравнения (3.1) имеют в данном случае частные решения вида

$$
\begin{aligned}
&\text{а) } \Delta\Delta\Phi_1 = \mathrm{const}, \qquad \Delta\Delta\Phi_3 = 0, \\
&\text{б) } \Delta\Phi_2 = q_2^2\Phi_2, \qquad q_2 = \pm n\frac{\pi}{2} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots, \infty), \\
&\text{в) } \Delta\Phi_1 = q_1^2\Phi_1, \qquad \Delta\Phi_3 = q_3^2\Phi_3,
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

где q_1 и q_3 являются ненулевыми (комплексными) корнями уравнения

$$\sin 2q = 2q. \tag{3.3}$$

Отметим, что в данном случае Q_r^* $(r = 1, 2)$ не зависят от функции Φ_1.

2) Частные решения вида

$$\Delta\Phi_1 = \mathrm{const}, \quad \Delta\Phi_3 = 0, \quad s \neq 0. \tag{3.4}$$

Частные решения вида (3.4) существуют при следующих значениях параметра s:

$$
\begin{aligned}
&\text{а) } s = s_n = \pm in\frac{\pi}{2} \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots, \infty), \\
&\text{б) } s = s_m = \pm i\frac{m}{k_0}\frac{\pi}{2} \qquad (m = 2, 4, 6, \ldots, \infty).
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Замечая, что при $s = s_n$

$$\cos\beta\,\partial_r\Phi_1 = \cos\beta\,\Phi_3 = 0 \qquad (r = 1, 2) \tag{3.6}$$

и при $s = s_m$

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}\partial_r\Phi_1 = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\Phi_3 = 0 \qquad (r = 1, 2), \tag{3.7}$$

---

* Отметим, что при введении новых разрешающих функций по формулам

$$\Phi_1 = \gamma^2\cos\beta\,\Phi_{1a}, \qquad \Phi_3 = \Delta\beta^2\frac{\sin\beta}{\beta}\Phi_{3a} \tag{a}$$

или же по формулам

$$\Phi_1 = \cos\alpha\,\Phi_{1b}, \qquad \Phi_3 = \gamma^2\frac{\sin\alpha}{\alpha}\Phi_{3b}, \tag{b}$$

получим из (2.1) — (2.3) для искомых величин выражения, в которые Φ_{1a}, Φ_{3a} или же Φ_{1b}, Φ_{3b} входят одинаковым образом.

Следовательно, большой класс частных решений может быть построен, применяя лишь одну из функций Φ_1, Φ_3.

нетрудно вывести из (2.1) — (2.3) формулы для искомых величин. При напряженных состояниях, независящих от η, функции $\partial_r\Phi_1$ и Φ_3 являются относительно ξ полиномами второй степени и из (2.1), (2.2) вытекают формулы, построенные Р. Д. Миндлином [9].

3) Частный случай

$$\Delta\Phi_j = q_j^2\Phi_j, \quad s \neq 0, \quad q_j \neq 0 \qquad (j = 1, 2, 3). \tag{3.8}$$

Функции Φ_j типа (3.8) являются частными решениями уравнений (3.1), если q_1 и q_3 удовлетворяют условию

$$\frac{2q^2\beta^2}{s^2}\left(\cos\alpha\,\frac{\sin\beta}{\beta} - \cos\beta\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) - \frac{s^2}{2}\cos\beta\,\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 0, \tag{3.9}$$

где

$$\alpha^2 = q^2 - k_0^2 s^2, \quad \beta^2 = q^2 - s^2, \tag{3.10}$$

а q_2 — условию

$$q_2^2 = s^2 + \left(n\frac{\pi}{2}\right)^2 \qquad (n = 1, 3, 5, \ldots, \infty). \tag{3.11}$$

Условие (3.9) по существу является известным уравнением Лэмба [3].

Если предположить, что

$$\alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0, \quad \sin\alpha \neq 0, \quad \cos\beta \neq 0, \tag{3.12}$$

то можно ему дать классическую форму

$$\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{s^4 + 4s^2\beta^2}{4q^2\alpha\beta}. \tag{3.13}$$

Функция Φ_2 определяет в случае (3.11) волны, которые можно рассматривать как предельный случай волн Лява, соответствующий нулевой жесткости основания плиты [4].

4) Медленно изменяющиеся напряженные состояния. Двумерные теории.

Уравнения (3.1) допускают для Φ_1 и Φ_3 такие частные решения, которые не возрастают при дифференцировании по ξ, η, τ. Поскольку в разложениях выражений (2.1), (2.2), (2.3), (2.6) в степенные ряды коэффициенты убывают (хотя и медленно) при увеличении порядка производных, то существует возможность приближенно построить медленно изменяющиеся напряженные состояния, учитывая лишь небольшое количество производных наинизших порядков.

В первом приближении получим из (2.6) для D выражение

$$D_1 = -\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{3}(1-\mu)^{-1}\Delta\Delta \tag{3.14}$$

и из (2.1) — (2.3) формулы

$$\begin{gathered} u_r = \zeta U_r, \qquad U_r = -\partial_r\Psi, \quad u_3 = U_3 = \Psi, \\ \overset{*}{\sigma}_{rr} = -\zeta[\partial_r^2 + \mu(1-\mu)^{-1}\Delta]\Psi, \qquad \overset{*}{\sigma}_{12} = \overset{*}{\sigma}_{21} = \partial_1 u_2 = \partial_2 u_1, \end{gathered} \tag{3.15}$$

$$\overset{*}{\sigma}_{r3} = -\frac{1-\zeta^2}{2(1-\mu)}\,\partial_r \Delta\Psi, \qquad \overset{*}{\sigma}_{33} = \frac{(1-\zeta^2)\zeta}{12(1-\mu)}\,\Delta\Delta\Psi,$$

$$\overset{*}{M}_{rr} = -\frac{2}{3}\left[\partial_r^2 + \mu(1-\mu)^{-1}\Delta\right]\Psi, \qquad \overset{*}{M}_{12} = \overset{*}{M}_{21} = -\frac{2}{3}\,\partial_1\partial_2\Psi, \tag{3.15}$$

$$\overset{*}{Q}_r = -\frac{2}{3(1-\mu)}\,\partial_r\Delta\Psi, \qquad \Psi = \Delta\Phi_1 + \Phi_3, \qquad D_1\Psi = 0,$$

$$(r = 1, 2),$$

которые представляют собою теорию Кирхгофа.

В случае (3.8) теория Кирхгофа является при $s, q \to 0$ асимптотическим приближением трехмерной теории с асимптотической погрешностью порядка $|q^2|$.

На основе формул п. 2, конечно, нетрудно выписать и более длинные усеченные степенные ряды. Если, например, сохранить в выражении (2.6) все производные до 4-го порядка включительно, то получим для D приближенное выражение.

$$D_2 = -\frac{1}{2}s^2 - \frac{1}{3}(1-\mu)^{-1}\Delta\Delta + \frac{1}{3}(2-\mu)(1-\mu)^{-1}s^2\Delta -$$
$$-\frac{1}{24}(7-8\mu)(1-\mu)^{-1}s^4, \tag{3.16}$$

построенное И. Т. Селезовым [6] на основе алгорифма Н. А. Кильчевского [5].

Из формул п. 2 могут быть получены также приближенные формулы типа теории Тимошенко [7, 8]. Сохраняя формулы (3.15) в части величин $\overset{*}{M}_{kr}$, u_r, U_r $(k, r = 1, 2)$, получим из уравнений (2.4) соотношения:

$$\overset{*}{Q}_r = -\frac{2}{3}(1-\mu)^{-1}\left[\Delta - \frac{1}{2}(1-\mu)s^2\right]\partial_r\Psi,$$
$$-\frac{2}{3}\left[\Delta - \frac{1}{2}(1-\mu)s^2\right]\Delta\Psi = (1-\mu)s^2 U_3. \tag{3.17}$$

Присоединяя к ним выражение трехмерной теории упругости

$$\overset{*}{Q}_r = \partial_r U_3 + u_r(1), \qquad u_r(1) = u_r(\xi, \eta, 1; \tau), \tag{3.18}$$

нетрудно вывести разрешающее уравнение и формулы основного напряженного состояния теории типа Тимошенко [7, 8]. При этом легко ввести поправочный коэффициент сдвига k^2.

Дополнительное уравнение теории типа Тимошенко [8]

$$(\Delta - s^2)\Phi_2 = 3k^2\Phi_2 \tag{3.19}$$

является (при коэффициенте сдвига $k^2 = \frac{\pi^2}{12}$) эквивалентным второму уравнению (3.8) при первом значении q_2^2 по формуле (3.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Лурье, К теории толстых плит, ПММ, **6**, 1942.
2. А. И. Лурье, Пространственные задачи теории упругости, Гос. изд. техн.-теор. лит., М., 1956.
3. H. Lamb, On the Flexure of an Elastic Plate (Appendix), Proc. Lond. Math. Soc., **21**, 1889—1890.
4. R. D. Mindlin, Waves and Vibrations in Isotropic, Elastic Plates, Structural Mechanics, Perg. Press, 1960.
5. Н. А. Кильчевский, Обобщение современной теории оболочек, ПММ, **2**, вып. 4, 1939.
6. И. Т. Селезов, Дослiдження поперечних коливань пластин, Прикладна механiка, **6**, вип. 5, 1960.
7. Я. С. Уфлянд, Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин, ПММ, **12**, вып. 3, 1948.
8. R. D. Mindlin, Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, J. Appl. Mech., **18**, 1, 1951.
9. R. D. Mindlin, Vibrations of an Infinite Elastic Plate at Its Cut-off Frequencies, Proc. of the Third U.S. Nat. Congr. of Appl. Mech., 1958.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18. IX 1962

A. I. LURJE SÜMBOOLSE MEETODI KASUTAMISEST ELASTSETE PLAATIDE DÜNAAMIKA KOLMEMÕÕTMELISES TEOORIAS

U. Nigul,
tehnikateaduste kandidaat

Resümee

Kasutades A. I. Lurje sümboolset meetodit, tuletatakse elastsete plaatide dünaamika kolmemõõtmelise teooria kompaktsed valemid ja võrrandid väikese deformatsiooni jaoks, mis on antisümmeetriline plaadi keskpinna suhtes.

Esimeses osas kirjeldatakse tuletusmeetodit. Põhivõrrandis (1.4) valitakse vektor $\vec{u}$ kujus (1.5). Eeldatakse, et Φ_0 ja $\vec{H}$ rahuldavad tingimusi (1.6), kus suurust s vaadeldakse kompleksse parameetrina. Saadakse võrrandid (1.8), millel on olemas formaalne («sümboolne») lahend (1.10). Valemeist (1.5) ja (1.10) saadakse avaldised (1.11). Dünaamika valemite edasine tuletuskäik avaldistest (1.11) ja ääretingimustest (1.9) plaadi külgpindadel ($\zeta = \pm 1$) on analoogiline vastavale ülesandele staatikas [1,2].

Teises osas esitatakse elastsete plaatide dünaamika valemid (2.1)—(2.3) ja võrrandid (2.5), milles trigonomeetrilisi funktsioone tuleb tõlgendada vastavate astmeridade lühikese ning tingliku esitusviisina.

Kolmandas osas käsitletakse järgmisi võrrandeile (3.1) vastavaid erijuhte:

1) Staatika piirjuht ($s=0$).

2) Parameetri s väärtused s_n ja s_m, millede puhul eksisteerivad erilahendid (3.4).

3) Erilahendid (3.8) ning Lambi võrrandi (3.9) ja Love'i lainete eksisteerimise tingimuse (3.11) tuletamine.

4) Kirchhoffi teooria (asümptootilise lähendi) ja täpsustatud ligikaudsete kahemõõtmeliste teooriate tuletamine deformatsiooniolukorra jaoks, mis muutub küllalt aeglaselt nii piki keskpinna koordinaate kui ka ajas.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
18. IX 1962

ON THE APPLICATION OF A. I. LOURYE'S SYMBOLIC METHOD IN THE THREE-DIMENSIONAL THEORY OF MOTION OF ELASTIC PLATES

U. Nigul

Summary

Compact formulae and equations of the three-dimensional theory of motion of elastic plates for a small deformation antisymmetric about the middle plane are obtained with the aid of Lourye's symbolic method [1,2]. The well-known equations of the motion theory of plates are derived from them as special cases.

In the first part the derivation method is described. In the basic equation (1.4) the vector $\vec{u}$ is taken in the form (1.5). The functions Φ_0 and $\vec{H}$ are assumed to satisfy the conditions (1.6), where s is considered to be a complex parameter. That yields the equations (1.8), which have a formal (symbolic) solution (1.10). From (1.5), (1.10) the formulae (1.11) are obtained. Further steps of the derivation of the motion theory formulae from (1.11) and boundary conditions (1.9) on the surfaces of the butt-ends ($\zeta = \pm h$) of the plate are similar to those in statics [1,2].

In the second part the formulae (2.1)—(2.3) and equations (2.5) of the motion theory of elastic plates are given, in which the trigonometric functions must be considered as a short conventional form representing the corresponding power series.

In the third part the following special cases corresponding to the equations (3.1) are discussed:

1) The limiting case of statics ($s=0$).

2) The values s_n and s_m (3.5) of s, by which the special solutions (3.4) exist.

3) The special solutions (3.8) and the derivation of the Lamb equation (3.9) and the condition (3.11) for existence of Love's waves.

4) Derivation of the Kirchhoff theory (as an asymtotic one) and improved approximate two-dimensional theories for a deformation state sufficiently slowly varying along the coordinates of the middle plane as well as in time.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Cybernetics

Received
Sept. 18th, 1962