EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1963, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1963, № 2

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

М. ЛЕВИН

Пусть множество $F(M)$ состоит из всех функций $f(x,y)$, удовлетворяющих на [0, 1; 0, 1] условиям: $f(x,0)\equiv f(0,y)\equiv 0; f'_x,\ f'_y$ и f''_{xy} ограничены, интегрируемы и

$$\left\{\int_0^1\int_0^1 [f''_{xy}(x,y)]^2\,dx\,dy\right\}^{1/2}\leqslant M.$$

Аналогично тому, как это обычно делается [1, 2], построим для этого множества функций наилучшую кубатурную формулу вида

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy=\sum_{i,\,j=0}^{m-1,\,n-1} A_{ij}f(x_i,y_j)+R(f). \tag{1}$$

Для этого надо выбрать числа A_{ij}, x_i, y_j $(i=0,1,\ldots,m-1;$ $j=0,\ 1,\ldots,\ n-1)$ так, чтобы величина

$$R=\sup_{f\in F(M)}|R(f)|$$

была наименьшей.

Функцию $f(x,y)\in F(M)$ можно записать в виде

$$f(x,y)=\int_0^1\int_0^1 f''_{xy}(t,u)\,E(x-t)\,E(y-u)\,dt\,du, \tag{2}$$

где

$$E(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

По (1), используя (2) и неравенство Буняковского, имеем оценку ошибки формулы (1) в виде

$$|R(f)|\leqslant M\left\{\int_0^1\int_0^1[K(t,u)]^2dt\,du\right\}^{1/2}, \tag{3}$$

где

$$K(t,u)=(1-t)(1-u)-\sum_{i,\,j=0}^{m-1,\,n-1}A_{ij}E(x_i-t)E(y_j-u).$$

Так как для функции

$$f(x,y)=\frac{M\int\limits_0^x\int\limits_0^y K(t,u)\,dt\,du}{\left[\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |K(t,u)|^2\,dt\,du\right]^{1/2}}$$

неравенство (3) превращается в равенство, то

$$\sup_{f\in F(M)}|R(f)|=M\left\{\int\limits_0^1\int\limits_0^1[K(t,u)]^2dt\,du\right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Таким образом, задача свелась к минимизации правой части равенства (4), или, что то же, к минимизации величины

$$U=\int\limits_0^1\int\limits_0^1[K(t,u)]^2dt\,du=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\left[xy-\sum_{i,j=0}^{m-1,n-1}\lambda_{ij}E(x-u_i)E(y-v_j)\right]^2dx\,dy,$$

где $u_i=1-x_{m-i-1}$, $v_j=1-y_{n-j-1}$, $\lambda_{ij}=A_{m-i-1,\,n-j-1}$ $(i=0,1,\ldots,m-1;\ j=0,1,\ldots,n-1)$.

Запишем величину U в виде

$$U=\int\limits_0^{u_0}\int\limits_0^1 x^2y^2dx\,dy+\int\limits_{u_0}^1\int\limits_0^{v_0}x^2y^2dx\,dy+$$

$$+\int\limits_{u_0}^1\int\limits_{v_0}^1\left[xy-\sum_{i,j=0}^{m-1,n-1}\lambda_{ij}E(x-u_i)\ E(y-v_j)\right]^2dx\,dy=\frac{1}{9}\,(u_0^3+v_0^3-u_0^3v_0^3)+$$

$$+\sum_{i,j=0}^{m-1,n-1}\int\limits_{u_i}^{u_{i+1}}\int\limits_{v_j}^{v_{j+1}}(xy-c_{ij})^2dx\,dy,$$

где

$$c_{ij}=\sum_{s=0}^{i}\sum_{q=0}^{j}\lambda_{sq}\qquad\begin{pmatrix}i=0,1,\ldots,m-1\\ j=0,1,\ldots,n-1\end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$u_m=v_n=1.$$

Найдем

$$\min_\alpha\int\limits_a^b\int\limits_c^d(xy-\alpha)^2dx\,dy.$$

$$I=\int\limits_a^b\int\limits_c^d(xy-\alpha)^2dx\,dy=\frac{1}{9}\,(b^3-a^3)\,(d^3-c^3)-\frac{\alpha}{2}\,(b^2-a^2)\,(d^2-c^2)+$$

$$+\alpha^2(b-a)\,(d-c).$$

Приравнивая I'_α к нулю, находим

$$\alpha=\frac{(a+b)\,(c+d)}{4},$$

что дает

$$\min_{\alpha} \int_a^b \int_c^d (xy-\alpha)^2 dx\, dy = \int_a^b \int_c^d \left[xy - \frac{1}{4}(a+b)(c+d)\right]^2 dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{9}(b^3-a^3)(d^3-c^3) - \frac{1}{16}(a+b)(b^2-a^2)(c+d)(d^2-c^2).$$

Учитывая это, получим

$$U \geqslant \frac{1}{9}(u_0^3+v_0^3-u_0^3v_0^3) + \sum_{i,\, j=0}^{m-1,\, n-1} \int_{u_i}^{u_{i+1}} \int_{v_j}^{v_{j+1}} \left[xy - \frac{(u_i+u_{i+1})(v_j+v_{j+1})}{4}\right]^2 dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{9}(u_0^3+v_0^3-u_0^3v_0^3) + \sum_{i,\, j=0}^{m-1,\, n-1} \Big[\frac{1}{9}(u_{i+1}^3-u_i^3)(v_{j+1}^3-v_j^3) -$$

$$- \frac{1}{16}(u_i+u_{i+1})(u_{i+1}^2-u_i^2)(v_j+v_{j+1})(v_{j+1}^2-v_j^2)\Big] =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{1}{16}\sum_{i=0}^{m-1}(u_i+u_{i+1})(u_{i+1}^2-u_i^2)\sum_{j=0}^{n-1}(v_j+v_{j+1})(v_{j+1}^2-v_j^2).$$

Найдем теперь u_i, v_j $(i=0, 1, \ldots, m-1;\ j=0, 1, \ldots, n-1)$, минимизирующие правую часть последнего неравенства. Для этого имеем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} u_1^2 - 3u_0^2 - 2u_0u_1 = 0 \\ u_2^2 - 2u_1u_2 + 2u_1u_0 - u_0^2 = 0 \\ u_3^2 - 2u_2u_3 + 2u_2u_1 - u_1^2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_m^2 - 2u_{m-1}u_m + 2u_{m-1}u_{m-2} - u_{m-2}^2 = 0 \\ u_m = 1 \end{array}\right\} \qquad (6)$$

и аналогичную систему для нахождения v_j $(j=0, 1, \ldots, n)$. Решение этих систем (с учетом условий $u_i, v_j \geqslant 0$, $u_{i+1} > u_i$, $v_{j+1} > v_j$) дает

$$u_i = \frac{2i+1}{2m+1}, \quad v_j = \frac{2j+1}{2n+1} \qquad \begin{pmatrix} i=0, 1, \ldots, m; \\ j=0, 1, \ldots, n \end{pmatrix}^{*}. \qquad (7)$$

Таким образом, величина U достигает своего наименьшего значения при узлах (7). Осталось найти значения λ_{ij} $(i=0, 1, \ldots, m-1;$ $j=0, 1, \ldots, n-1)$.

Используя (5), имеем

$$\sum_{s=0}^{i}\sum_{q=0}^{j} \lambda_{sq} = c_{ij} = \frac{(u_i+u_{i+1})(v_j+v_{j+1})}{4} \qquad \begin{pmatrix} i=0, 1, \ldots, m-1; \\ j=0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}.$$

* То, что именно эти значения минимизируют правую часть неравенства, проверяется обычными методами.

Подставляя сюда значения (7), имеем

$$\sum_{s=0}^{i}\sum_{q=0}^{j}\lambda_{sq}=\frac{4(i+1)(j+1)}{(2m+1)(2n+1)}\qquad\begin{pmatrix}i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\end{pmatrix},$$

откуда

$$\lambda_{ij}=\frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\qquad\begin{pmatrix}i=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1;\\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1\end{pmatrix}.$$

Используя связь между x_i и u_i, y_j и v_j, A_{ij} и λ_{ij}, находим наилучшую для множества $F(M)$ кубатурную формулу

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy\approx\frac{4}{(2m+1)(2n+1)}\sum_{i,j=0}^{m-1,\,n-1} f\left(\frac{2i+2}{2m+1},\ \frac{2j+2}{2n+1}\right). \tag{8}$$

Найдем величину максимально возможной ошибки при вычислениях по (8) для функций множества $F(M)$ — значение R_0:

$$R_0=\min_{A_{ij},\,x_i,\,y_j}\ \sup_{f\in F(M)}|R(f)|=M\sqrt{\min_{A_{ij},\,x_i,\,y_j} U}=$$

$$=M\left[\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\sum_{i=0}^{m-1}\frac{4(i+1)}{(2m+1)}\cdot\frac{8(i+1)}{(2m+1)^2}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{4(j+1)8(j+1)}{(2n+1)^3}\right]^{1/2}=$$

$$=\frac{M}{3(2m+1)(2n+1)}\sqrt{4(m^2+n^2+m+n)+1}. \tag{9}$$

Все изложенное в этой заметке легко обобщается на случай интегралов произвольной кратности.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский, Квадратурные формулы. М., 1958.
2. Ю. Я. Доронин, К вопросу о формулах механических квадратур. Сб. трудов Днепропетровского инж.-стр. ин-та, 1955, 1—2.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
29. IX 1962

EKSTREMAALÜLESANNE ÜHE FUNKTSIOONIDE KLASSI JAOKS

M. Levin

Resümee

Artiklis lahendatakse kubatuurvalemi (1) jäägi minimiseerimise ülesanne funktsioonide klassi $F(M)$ jaoks, mis koosneb kõigist ruudus [0,1; 0,1] tõkestatud, integreeruvaist ning tingimusi $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$ ja $\left\{ \int_0^1 \int_0^1 [f''_{xy}]^2 dx\, dy \right\}^{1/2} \leqslant M$ rahuldavaist funktsioonidest. Selle ekstremaalülesande lahendiks saadakse kubatuurvalem (8) veahinnanguga (9).

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
29. IX 1962

A PROBLEM OF MINIMUM FOR ONE CLASS OF FUNCTIONS

M. Levin

Summary

In this article the problem of finding the minimum of the remainder of formula (1) is solved for the class $F(M)$, which consists of functions $f(x, y)$ $f(x, 0) \equiv f(0, y) \equiv 0$ bounded and integrable on [0, 1; 0, 1]

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^1 [f''_{xy}]^2 dx\, dy \right\}^{1/2} \leqslant M.$$

The solution of the problem is given in (8) with the estimation of error in (9).

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Cybernetics

Received
Sept. 29th, 1962