EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XI KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1962, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XI
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1962, № 2

ОБ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРЕМЕ МЕРСЕРА

Т. СЫРМУС

В статье будет установлена связь обобщенной теоремы Мерсера, доказанной Питтом и Петерхаусом [3], с одной из рассмотренных нами ранее теорем (2.1 из [6]) путем доказательства теоремы, которая при определенных условиях заменяет теорему Питта и Петерхауса. Далее докажем аналоги обобщенных теорем Мерсера для двойных последовательностей, ограничиваясь при этом факторизирующимися методами Хаусдорфа.

В статье мы пользуемся символикой из предыдущей статьи [7].

1. Сначала приведем нужные нам теоремы и одну лемму.

Теорема 1.1. (Питт и Петерхаус [3], теорема 7.)

Пусть $X(t)$ *— функция с ограниченным изменением без сингулярной составляющей и* $X(+0)=X(0)=0$, $X(1)=1$. *Для того чтобы из*[1] $\left(H, \int\limits_0^1 t^k dX(t)\right)$ *-суммируемости последовательности* $\{s_k\}$ *вытекала сходимость этой последовательности, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\inf_{R\omega \geqslant 0} \left| \int\limits_0^1 t^\omega \, dX(t) \right| > 0.$$

Теорема 1.2. (Виланский, [4].)

Сохраняющий сходимость обратимый метод A суммирует расходящуюся последовательность всегда только при условии

$$\sup_n \sum_k |a'_{nk}| = \infty.$$

Теорема 1.3. (Адамс [1], теорема 7.)

Если A' *и* A'' *обратимые методы простых последовательностей, то метод* $A = A' \odot A''$ *имеет обратный метод вида* $A^{-1} = (A')^{-1} \odot (A'')^{-1}$.

---

[1] Определение метода $(H, \mu_k) = \left(H, \int\limits_0^1 t^k dX(t)\right)$ дано в [8].

Теорема 1.4. (Адамс [1], теорема 14.)

Если A' и A'' регулярные методы простых последовательностей, то метод $A = A' \odot A''$ регулярен в том классе двойных последовательностей, A-преобразование которых ограничено.

Теорема 1.5. (Адамс [2], теорема 3.)

Если метод $(H,\mu_k\nu_l)=(H,\mu_k)\odot(H,\nu_l)$ сохраняет сходимость, но не регулярен для нулевых последовательностей, то (H,μ_k) и (H,ν_l) также сохраняют сходимость, но не регулярны для нулевых последовательностей.

Теорема 1.6. (Адамс [2], теорема 4.)

Если метод $(H,\mu_k\nu_l)=(H,\mu_k)\odot(H,\nu_l)$ сохраняет сходимость и регулярен для нулевых последовательностей (при условии, что не все элементы равны нулю), то (H,μ_k) и (H,ν_l) сохраняют сходимость и хоть один из них регулярен для нулевых последовательностей.

Теорема 1.7. (Сырмус [5], теорема 2.2.)

Треугольный регулярный метод $A = (a_{mnkl})$ ограниченно суммирует расходящуюся последовательность всегда только при условии

$$\sup_{m,n} \sum_{k,l=0}^{m,n} |a'_{mnkl}| = \infty.$$

Лемма 1.1 *Если $X(t)$ — функция с ограниченным изменением без сингулярной составляющей и $X(+0)=X(0)=0$, $X(1)=1$, $\inf_{R\omega \geqslant 0} \left|\int_0^1 t^{\omega}\, dX(t)\right| > 0$, то последовательность Хаусдорфа $\left\{\frac{1}{\mu_k}\right\}$, где $\mu_k = \int_0^1 t^k dX(t)$, регулярна.*

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы в предыдущей статье (лемма 1.2 из [7]).

2. В [6] доказана следующая теорема.

Теорема 2.1 *Если $\lambda > 0$, $h \neq \infty$, а последовательность Хаусдорфа $\{\mu_k\}$ абсолютно монотонна и регулярна, то из равенства*

$$\lim_n \left(\lambda s_n + (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^{n-1-k}\mu_k s_k\right) = h$$

вытекает

$$\lim_n s_n = h.$$

Для установления связи приведенной теоремы с теоремой 1.1 докажем следующую теорему.

Теорема 2.2. *Пусть $\lambda > 0$, $h \neq \infty$ и $\{\mu_k\}$ — абсолютно монотонная последовательность Хаусдорфа, удовлетворяющая условию $\lim_n \Delta^n\mu_0 = 0$. Для того чтобы из равенства*

$$\lim_n \left(\lambda s_n + (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^{n-1-k}\mu_k s_k\right) = h$$

вытекало равенство

$$\lim_n s_n = h,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mu_0 = 1$.

Доказательство. Достаточность условия следует из теоремы 2.1. Докажем его необходимость.

Пусть

$$t_n = \lambda s_n + (1-\lambda) H_{n-1}, \tag{2.1}$$

где

$$H_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^{n-1-k} \mu_k s_k. \tag{2.2}$$

Так же, как и в доказательстве одной нашей теоремы (2.1 в [6]), получаем

$$H_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_{nk}}{\lambda \gamma_{nn} h'_{nn}} t_k, \tag{2.3}$$

причем величины γ_{nk} определены известной системой (2.3 из [6]). По условию теоремы из равенства $\lim_n t_n = h$ следует $\lim_n s_n = h$, а ввиду равенства (2.1) еще и $\lim_n H_n = h$. Но тогда метод, определенный матрицей $\left(\frac{\gamma_{nk}}{\lambda \gamma_{nn} h'_{nn}}\right)$, регулярен, т. е. удовлетворяет условию

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_{nk}}{\lambda \gamma_{nn} h'_{nn}} = 1. \tag{2.4}$$

Для определения величины $\sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_{nk}}{\lambda \gamma_{nn} h'_{nn}}$ предполагаем в (2.2) $s_k \equiv 1$; тогда $H_n \equiv \mu_0$, а на основании (2.1) имеем $t_n = \lambda + (1-\lambda)\mu_0$. Учитывая это, получаем из (2.3) и (2.4), что

$$\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_{nk}}{\lambda \gamma_{nn} h'_{nn}} = \frac{\mu_0}{\lambda + (1-\lambda)\mu_0} = 1,$$

т. е. $\mu_0 = 1$, что и требовалось доказать.

Нам необходима еще следующая

Теорема 2.3. *Если* $\lambda > 0$ *и* $\{\mu_k\}$ — *абсолютно монотонная последовательность Хаусдорфа, то из сходимости последовательности* $t_n = \lambda s_n + (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mu_k s_k$ *вытекает сходимость последовательности* $\{s_n\}$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1.

Теперь докажем теорему, которая является аналогом теоремы 1.1.

Теорема 2.4. *Пусть* $\{\nu_k\}$ — *абсолютно монотонная последовательность Хаусдорфа. Для того чтобы из* (H,ν_k)*-суммируемости последовательности* $\{s_k\}$ *следовала сходимость той же последовательности, необходимо и достаточно, чтобы* $\inf_k \nu_k > 0$.

Доказательство. Докажем достаточность условия. Пусть

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \nu_k s_k. \tag{2.5}$$

Представим общий элемент метода (2.5) в форме

$$\binom{n}{k} \Delta^{n-k} \nu_k = \lambda\, \delta_{nk} + (1-\lambda) \binom{n-1}{k} \Delta^{n-1-k} \mu_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{2.6}$$

где пусть при $0 < \lambda < 1$

$$\delta_{nk} = \begin{cases} \dfrac{\nu_n}{\lambda}, & \text{при } k = n \\ 0, \text{ при } k \neq n. \end{cases} \tag{2.7}$$

Последовательность Хаусдорфа $\{\mu_k\}$ определима системой (2.6). Приведем далее равенство (2.5) к виду

$$t_n = \lambda r_n + (1-\lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^{n-1-k} \tau_k r_k, \tag{2.8}$$

где $r_k = \dfrac{\nu_k}{\lambda} s_k$, $\qquad \Delta^{n-1-k}\tau_k = \dfrac{\lambda}{\nu_k} \Delta^{n-1-k}\mu_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$.

Для доказательства абсолютной монотонности последовательности $\{\tau_k\}$ достаточно показать, что последовательность $\{\mu_k\}$ абсолютно монотонна. Последнее очевидно ввиду (2.6), (2.7), абсолютной монотонности последовательности $\{\nu_k\}$ и того, что $0 < \lambda < 1$.

Из условия $\lim\limits_n t_n = s$ и абсолютной монотонности последовательности $\{\tau_k\}$ по теореме 2.3 вытекает, что $\lim\limits_n r_n = s_0$, откуда следует равенство $\lim\limits_n s_n = s_1$, если учесть определение последовательности $\{r_k\}$ и условие, что $\{\nu_k\}$ — абсолютно монотонна и $\inf\limits_k \nu_k > 0$. Этим достаточность условия доказана.

Докажем теперь его необходимость. Пусть при абсолютно монотонной последовательности Хаусдорфа $\{\nu_k\}$ из сходимости последовательности $t_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \nu_k s_k$ вытекает сходимость последовательности $\{s_k\}$. Это означает, что метод $\left(H, \dfrac{1}{\nu_k}\right)$ сохраняет сходимость, т. е. должен удовлетворять условию

$$\lim_n \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \frac{1}{\nu_k} = \alpha_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{2.9}$$

при сходящемся $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|$. Последнее означает в частности, что последовательность $\{\alpha_k\}$ ограничена.

Из (2.9), абсолютной монотонности $\{\nu_k\}$ и ограниченности $\{a_k\}$ вытекает

$$0 \leqslant \frac{1}{\nu_k} \leqslant M,$$

т. е.

$$\inf_k \nu_k > 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Если последовательность Хаусдорфа $\{\nu_k\}$ абсолютно монотонна и $\inf\limits_k \nu_k > 0$, то*

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| \Delta^{n-k} \frac{1}{\nu_k} \right| \neq \infty.$$

Доказательство. Из абсолютной монотонности последовательности Хаусдорфа $\{\nu_k\}$ и известных теорем (207 и 208 из [8]) вытекает, что метод (H,ν_k) сохраняет сходимость. Обозначая множество всех (H,ν_k)-суммируемых последовательностей символом $(H,\nu_k)^*$, можем на основании вышесказанного выписать соотношение $c \subset (H,\nu_k)^*$. Так как по условию $\inf\limits_k \nu_k > 0$, то $(H,\nu_k)^* \subsetneqq c$, что вытекает из теоремы 2.4. Эти результаты и показывают, что метод (H,ν_k) суммирует только сходящиеся последовательности, а по теореме 1.2 это означает, что именно

$$\sup_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left| \Delta^{n-k} \frac{1}{\nu_k} \right| \neq \infty.$$

Сравнивая нашу теорему 2.4 с теоремой 1.1 Питта и Петерхауса, мы видим, что

1) в теореме 1.1 рассматриваются регулярные методы Хаусдорфа, в нашей же теореме — такие методы Хаусдорфа, которые сохраняют сходимость, но у которых последовательности Хаусдорфа абсолютно монотонны;

2) необходимое и достаточное условие теоремы 2.4 проще соответствующего условия в теореме 1.1.

Это показывает, что рассматриваемые теоремы не тождественны, но аналогичны. На основании приведенных доказательств и сравнения результатов Питта и Петерхауса с нашими мы приходим к выводу, что для преобразований Мерсера-Хаусдорфа, т. е. преобразований вида (2.1) естественно считать аналогом теоремы 1.1 теорему 2.2. В этом и заключается тесная связь теорем 2.1, 2.2 и 1.1.

3. Перейдем к доказательству обобщенных теорем Мерсера для двойных последовательностей, т. е. теорем, аналогичных теоремам 2.2, 2.4 и 1.1. При этом будем рассматривать только факторизирующиеся методы Хаусдорфа.

Теорема 3.1. *Пусть $\lambda > 0$, $h \neq \infty$, $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_l\}$ — абсолютно монотонные последовательности Хаусдорфа, удовлетворяющие условиям $\lim\limits_m \Delta^m \mu_0 = \lim\limits_n \Delta^n \nu_0 = 0$. Для того чтобы из равенства*

$$b\text{-}\lim_{m,n} \left(\lambda s_{mn} + (1-\lambda) \sum_{k,l=0}^{m-1,n-1} \binom{m-1}{k} \binom{n-1}{l} \Delta^{m-1-k,\, n-1-l} \mu_k \nu_l s_{kl} \right) = h$$

вытекало равенство

$$b\text{-}\lim_{m,n} s_{mn} = h,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\mu_0 \nu_0 = 1$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.2 (причем вместо 2.1 из [6] применим 2.1 из [7] и некоторые результаты из доказательства леммы 1.1 в [5]).

Теорема 3.2. *Пусть $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_l\}$ — абсолютно монотонные регулярные последовательности Хаусдорфа. Для того чтобы из ограниченной $(H,\mu_k\nu_l)$-суммируемости последовательности $\{s_{kl}\}$ следовала ограниченная сходимость последовательности $\{s_{kl}\}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\inf_k \mu_k > 0 \quad \text{и} \quad \inf_l \nu_l > 0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Во-первых, докажем необходимость условий (3.1). Пусть из $b\text{-}\lim\limits_{m,n} \sum\limits_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{l} \Delta^{m-k,\,n-l} \mu_k \nu_l s_{kl} = h$ вытекает $b\text{-}\lim\limits_{m,n} s_{mn} = h_1$. По теореме 1.3 обратный метод для $(H,\mu_k\nu_l)=(H,\mu_k) \odot (H,\nu_l)$ имеет вид $\left(H, \frac{1}{\mu_k}\right) \odot \left(H, \frac{1}{\nu_l}\right) = \left(H, \frac{1}{\mu_k \nu_l}\right)$. Сделанное выше предположение означает, что $\left(H, \frac{1}{\mu_k \nu_l}\right)$ сохраняет сходимость. По теоремам 1.5 и 1.6 теперь следует, что методы $\left(H, \frac{1}{\mu_k}\right)$ и $\left(H, \frac{1}{\nu_l}\right)$ сохраняют сходимость. Дальнейшее доказательство необходимости условий (3.1) совпадает с доказательством необходимости условия в теореме 2.4.

Докажем достаточность условий (3.1).

Пусть $\{\mu_k\}$ и $\{\nu_l\}$ — абсолютно монотонные регулярные последовательности Хаусдорфа, удовлетворяющие условиям (3.1); пусть также

$$b\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{l} \Delta^{m-k,\,n-l} \mu_k \nu_l s_{kl} = h. \tag{3.2}$$

Тогда из следствия теоремы 2.4 вытекает неравенство

$$\sup_{m,n} \sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{l} \left| \Delta^{m-k,\,n-l} \frac{1}{\mu_k \nu_l} \right| \neq \infty.$$

Поэтому $\{s_{kl}\}$ может быть только ограниченная и сходящаяся последовательность (см. лемму 1.1 из [7] и теорему 1.7).

Этим теорема доказана.

Теорема 3.3. *Пусть $X(t)$ и $\Psi(t)$ — функции с ограниченным изменением без сингулярной составляющей и удовлетворяющие условиям*

$$X(+0)=X(0)=0, \quad X(1)=1 \quad \text{и} \quad \Psi(+0)=\Psi(0)=0, \quad \Psi(1)=1.$$

Для того чтобы из ограниченной сходимости последовательности

$$t_{mn} = \sum_{k,l=0}^{m,n} \binom{m}{k}\binom{n}{l} \Delta^{m-k,\,n-l} \mu_k \nu_l s_{kl},$$

где $\mu_k = \int\limits_0^1 t^k \, dX(t)$ *и* $\nu_l = \int\limits_0^1 t^l \, d\Psi(t)$, *вытекала ограниченная сходимость* $\{s_{kl}\}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\left.\begin{aligned} &\inf_{R\omega>0}\left|\int_0^1 t^{\omega}\,d\mathrm{X}(t)\right|>0 \\ &\inf_{R\zeta>0}\left|\int_0^1 t^{\zeta}\,d\Psi(t)\right|>0. \end{aligned}\right\} \qquad (3.3)$$

Доказательство. Докажем необходимость условий (3.3). По этим условиям методы $(H,\mu_k)=\left(H,\int_0^1 t^k d\mathrm{X}(t)\right)$ и $(H,\nu_l)=\left(H,\int_0^1 t^l d\Psi(t)\right)$ регулярны. Также, по условию, $\left(H,\frac{1}{\mu_k\nu_l}\right)$ сохраняет сходимость. Но тогда методы $\left(H,\frac{1}{\mu_k}\right)$ и $\left(H,\frac{1}{\nu_l}\right)$ сохраняют сходимость, что вытекает из теорем 1.5 и 1.6. Дальнейший вывод условий (3.3) совпадает с доказательством необходимости условия вида (3.3) (например в теореме 1.1 [3]).

Докажем достаточность условий.

Пусть $b\text{-}\lim\limits_{m,n} t_{mn}=h$ и пусть выполнены предположения нашей теоремы относительно методов (H,μ_k) и (H,ν_l). Тогда метод $(H,\mu_k\nu_l)$ не может суммировать расходящихся последовательностей, т. к. условие теоремы 1.7 не выполнено ввиду леммы 1.1 и условий нашей теоремы. Из последнего вытекает и ограниченность суммируемой последовательности.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adams, C. R., On summability of double series. Trans. Amer. Math. Soc., 34, 1932, No. 2, 215—230.
2. Adams, C. R., Hausdorff transformations for double sequences. Bull. Amer. Math. Soc., 39, 1933, 303—312.
3. Pitt, H. R. and Peterhouse, Ph. D., Mercerian theorems. Proc. Cambridge Philos. Soc., 34, 1938, 510—520.
4. Wilansky, A., A necessary and sufficient condition that a summability method be stronger than convergence. Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 914—916.
5. Сырмус Т., Об одном обобщении теоремы Мерсера для двойных последовательностей. Уч. зап. Тартуского гос. ун-та, 102, 1961, 156—168.
6. Сырмус Т., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера. Уч. зап. Тартуского гос. ун-та, 102, 1961, 169—184.
7. Сырмус Т., О некоторых обобщениях теоремы Мерсера для двойных последовательностей. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, XI, 1, 1962, 37—49.
8. Харди Г., Расходящиеся ряды, Москва, 1949.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
5. V 1961

ÜLDISTATUD MERCERI TEOREEMIST

T. Sõrmus

Resümee

Pitt, H. R. ja Peterhouse, Ph. D. [3] tõestasid teoreemi (teoreem 1.1), mis annab tarvilikud ja piisavad tingimused selleks, et jada (H, μ_k)-summeeruvusest järelduks jada koonduvus.

Siin tõestatakse teoreem (teoreem 2.2), mis asendab Pitti ja Peterhouse'i teoreemi Merceri tüüpi teoreemides esinevate menetluste korral. Peale selle näidatakse, et Pitti ja Peterhouse'i teoreemis esinevat tarvilikku ja piisavat tingimust on võimalik lihtsustada, kui Hausdorffi menetlust määrav jada on totaalselt monotoonne (teoreem 2.4).

Lõpuks antakse ülalmainitud kolmele teoreemile vastavad üldistused kahekordsete jadade tarvis, piirdudes sealjuures faktoriseeruvate Hausdorffi menetlustega (teoreemid 3.1, 3.2 ja 3.3).

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
5. V 1961

ÜBER DEN VERALLGEMEINERTEN MERCERSCHEN SATZ

T. Sõrmus

Zusammenfassung

Pitt, H. R. und Peterhouse, Ph. D. [3] haben den Satz bewiesen (Satz 1.1), der eine notwendige und hinreichende Bedingung dazu aufstellt, dass aus der (H, μ_k)-Summierbarkeit einer Folge ihre Konvergenz folgt.

Das Ziel des Artikels ist, zu zeigen, dass man die Pittsche und Peterhousesche notwendige und hinreichende Bedingung für die folgenden Verfahren noch vereinfachen kann:

1) das Verfahren, das durch die Transformation

$$t_n = \lambda_{sn} + (1 - \lambda) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \Delta^{n-1-k} \mu_k s_k$$

bestimmt ist;

2) das mit Hilfe der total-monotonen Folge $\{\mu_k\}$ definierte (H, μ_k)-Verfahren [die Sätze 2.2 und 2.4].

Schliesslich werden die drei Sätze für den Fall der Doppelfolgen verallgemeinert (Sätze 3.1, 3.2 und 3.3).

Staatsuniversität zu Tartu

Eingegangen
am 5. Mai 1961