EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XI KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1962, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XI
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1962, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1962.2.06

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

И. КУЛЛЬ,
кандидат физико-математических наук

Э. ЛАНДРА

На Четвертом всесоюзном математическом съезде в июле 1961 г. в докладах В. В. Шкурбы и М. К. Гавурина, Г. Ш. Рубинштейна и С. С. Сурина ([1], стр. 96) были изложены методы решения обобщенной транспортной задачи, основанные на методе потенциалов. Ниже дается более простой метод решения, особенно удобен для нахождения почти оптимальных планов (см. табл. 5), основанный на методе А. Лурье [2].

1. С обобщенными транспортными задачами мы имеем дело, например, при распределении различных видов топлива между различными энергетическими установками. Так как фактическое содержание величин не суживает задачи, можем при формулировке задачи применить термины энергетической проблемы.

Пусть даны m видов топлива с запасами соответственно $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (например, в ккал). Из них некоторые виды топлива (скажем, k первых) являются принудительными, подлежащими обязательному израсходованию. Кроме того, даны n энергетических установок, с количествами производимого тепла соответственно b_1, $b_2, \ldots, b_n$ (в ккал). Предполагаем, что общий топливный резерв позволяет эти установки нагрузить полностью. Даны еще коэффициенты $c_{ij} \geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, m;$ $j=1, 2, \ldots, n)$, означающие затраты на единицу производимого тепла j-той установки при i-том виде топлива, и $\eta_{ij} > 0$ $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$ — коэффициенты полезного действия j-той установки при i-том виде топлива.

Задача состоит в том, чтобы найти величины $x_{ij} \geqslant 0$ $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=1, 2, \ldots, n)$ — количества производимого тепла j-той установки при i-том виде топлива, при которых общая затрата на производство тепла

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

была бы минимальной и выполнялись бы следующие условия:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad (j=1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

— все установки полностью нагружены, и

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ij}}{\eta_{ij}} \leqslant a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

— расходование топлива лимитируется соответствующими запасами $\left(\frac{x_{ij}}{\eta_{ij}} = y_{ij}\right.$ означает расходы i-того вида топлива для j-той установки). Для видов принудительного топлива должно выполняться равенство

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{x_{ij}}{\eta_{ij}} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k;\ k < m). \tag{4}$$

Чтобы обобщить метод А. Лурье, нужно принять в расчет и остатки видов топлива. Эти остатки обозначаем соответственно $x_{1, n+1}, x_{2, n+1}, \ldots, x_{m, n+1}$. В окончательном решении все эти остатки должны быть неотрицательными. Нужно задать и коэффициенты $c_{i, n+1}$. Для принудительного топлива принимаем $c_{i, n+1}$ равным некоторому очень большому числу, для остальных видов топлива принимаем $c_{i, n+1} = 0$. Коэффициенты $\eta_{i, n+1}$ принимаем все равными единице.

Тогда задача сводится к нахождению величин $x_{ij} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n, n+1)$, минимизирующих линейную форму

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n+1} c_{ij} x_{ij} \tag{5}$$

и удовлетворяющих условиям (2) и

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{x_{ij}}{\eta_{ij}} = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Набор таких величин x_{ij} назовем оптимальным планом. Все начальные данные и элементы решения x_{ij}, y_{ij} можно свести в одну таблицу:

	b_1	b_2	...	b_n	столбец остатков
a_1	$c_{11}\ \eta_{11}\ \ x_{11}\ y_{11}$	$c_{12}\ \eta_{12}\ \ x_{12}\ y_{12}$	...	$c_{1n}\ \eta_{1n}\ \ x_{1n}\ y_{1n}$	$c_{1, n+1}\ \ 1\ \ x_{1, n+1}$
a_2	$c_{21}\ \eta_{21}\ \ x_{21}\ y_{21}$	$c_{22}\ \eta_{22}\ \ x_{22}\ y_{22}$	...	$c_{2n}\ \eta_{2n}\ \ x_{2n}\ y_{2n}$	$c_{2, n+1}\ \ 1\ \ x_{2, n+1}$
⋮	...	...	...	...	...
a_m	$c_{m1}\ \eta_{m1}\ \ x_{m1}\ y_{m1}$	$c_{m2}\ \eta_{m2}\ \ x_{m2}\ y_{m2}$	...	$c_{mn}\ \eta_{mn}\ \ x_{mn}\ y_{mn}$	$c_{m, n+1}\ \ 1\ \ x_{m, n+1}$

Так как в столбце остатков $x_{i, n+1} = y_{i, n+1}$, то последние числа не выписываются вторично.

2. Метод решения этой задачи базируется на том, что если имеется оптимальный план x_{ij} в случае коэффициентов $c_{ij} + \frac{\lambda_i}{\eta_{ij}}$, где λ_i — произвольные вещественные числа для строк, то этот план является оптимальным и в случае первоначальных коэффициентов c_{ij}.

В самом деле, пусть x_{ij} — оптимальный план в случае коэффициентов $c_{ij}+\frac{\lambda_i}{\eta_{ij}}$ и x'_{ij} — любой другой план, удовлетворяющий условиям (2) и (6). Тогда по предположению

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}\left(c_{ij}+\frac{\lambda_i}{\eta_{ij}}\right)x_{ij}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}\left(c_{ij}+\frac{\lambda_i}{\eta_{ij}}\right)x'_{ij}.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{n+1}\frac{x_{ij}}{\eta_{ij}}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}x'_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{n+1}\frac{x'_{ij}}{\eta_{ij}}. \qquad (7)$$

Учитывая условие (6), получаем равенство

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{n+1}\frac{x_{ij}}{\eta_{ij}}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{j=1}^{n+1}\frac{x'_{ij}}{\eta_{ij}}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_i,$$

на основании которого из (7) вытекает

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}x_{ij}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}x'_{ij},$$

т. е. план x_{ij} является оптимальным и в случае коэффициентов c_{ij}.

Оптимальный план вычисляется по нашему методу аналогично методу Лурье и Лурье-Олейника [3]. Во-первых, прикрепляется всем установкам топливо с самыми меньшими c_{ij}, не учитывая вообще запасы топлива. После этого вычисляются остатки топлива. Метод требует приписания определенного знака и остаткам 0. Это определяется так: если найдется строка с отрицательным остатком, связанная с данной строкой, и эта последняя не связана ни с одной строкой с положительным остатком, то данная строка имеет остаток -0. Если для строки с остатком 0 не найдется ни одной связанной с ней строки с отрицательным остатком, то данная строка имеет остаток $+0$.

Если найдутся строки с отрицательными остатками, связанные с данной строкой (имеющей остаток 0), и эта последняя связана со строками с положительными остатками, то при помощи перенесения некоторых величин x_{ij} можно этот случай свести к предыдущим или остаток 0 не сохраняется.

Строка с номером μ считается связанной с ν-той строкой, если имеется индекс j, при котором

$$c_{\mu j}=c_{\nu j} \quad \text{и} \quad x_{\mu j}>0,$$

т. е., если возможно без увеличения затрат перенести количество $x_{\mu j}$ из μ-той строки в ν-тую строку.

Перенесение количеств x_{ij} из строк $\{\mu\}$ с отрицательными остатками в строки $\{\nu\}$ с положительными остатками производится тогда следующим образом: нужно найти минимальное (по всем μ, ν и j) λ, при котором

$$c_{\mu j}+\frac{\lambda}{\eta_{\mu j}}=c_{\nu j},$$

где $x_{\mu j}>0$. Таким образом,

$$\lambda = \min_{\mu, \nu, j} (c_{\nu j} - c_{\mu j}) \eta_{\mu j},$$

где μ — индекс строк с отрицательным остатком, ν — индекс строк с положительным остатком и $x_{\mu j} > 0$.

После нахождения λ нужно вычислить новые коэффициенты для μ-той строки:

$$c'_{\mu j} = c_{\mu j} + \frac{\lambda}{\eta_{\mu j}}. \tag{9}$$

Эти преобразования должны продолжаться до тех пор, пока не будет найден оптимальный план.

Отметим, однако, что не всегда легко судить, получен ли оптимальный план. Например, если все x_{ij} неотрицательны и их распределение по всем столбцам оптимальное (см. таблицу 5), то это еще не гарантирует оптимальности всего плана. Именно, может существовать план x'_{ij}, имеющий неотрицательные компоненты при тех же индексах i, j, что и в плане x_{ij}, и меньше остатки, чем в плане x_{ij}. Переход от плана x_{ij} к плану x'_{ij} уменьшает значение линейной формы на величину

$$\sum_{i=1}^{m} c'_{i,\,n+1} x_{i,\,n+1} - \sum_{i=1}^{m} c'_{i,\,n+1} x'_{i,\,n+1}.$$

Отсюда получаем вывод, что значение линейной формы при оптимальном распределении x_{ij} по всем столбцам отличается от значений линейной формы оптимального плана не больше чем на величину

$$\sum_{i=1}^{m} c'_{i,\,n+1} x_{i,\,n+1}, \tag{10}$$

и если эта последняя равна нулю, то получен оптимальный план. Из этого вытекает, что после оптимального распределения x_{ij} по всем столбцам нужно при помощи преобразований (9) и перераспределений x_{ij} минимизировать величину (10).

3. Пример.

Найдем решение обобщенной транспортной задачи, начальные данные которой приведены в следующей таблице:

Таблица 1

	$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 25$	$b_4 = 30$	столбец остатков
$a_1 = 40$	8 0,7	7 0,8	7 0,6	9 0,5	1000 1
$a_2 = 50$	4 0,6	3 0,7	4 0,5	8 0,8	0 1
$a_3 = 50$	3 0,5	5 0,8	6 0,6	5 0,7	0 1
$a_4 = 1000$	6 0,6	6 0,7	5 0,5	7 0,8	0 1

Из таблицы видно, что первое топливо является принудительным. Прикрепляя установкам самое дешевое топливо, получаем:

Таблица 2

	$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 25$	$b_4 = 30$	столбец остатков
$a_1 = 40$	8 0,7	7 0,8	7 0,6	9 0,5	1000 1 +40
$a_2 = 50$	4 0,6	20 3 0,7 28,6	25 4 0,5 50	8 0,8	0 1 —28,6
$a_3 = 50$	15 3 0,5 30	5 0,8	6 0,6	30 5 0,7 42,9	0 1 —22,9
$a_4 = 1000$	6 0,6	6 0,7	5 0,5	7 0,8	0 1 +1000

Вычисляем величину λ. По столбцам найдем

$$(6-3)\cdot 0{,}5 = 1{,}5; \qquad (6-3)\cdot 0{,}7 = 2{,}1;$$

$$(5-4)\cdot 0{,}5 = 0{,}5; \qquad (7-5)\cdot 0{,}7 = 1{,}4.$$

Значит, $\lambda = 0{,}5$ и к коэффициентам второй строки нужно прибавить соответственно величины $\frac{0{,}5}{0{,}6} = 0{,}8$, $\frac{0{,}5}{0{,}7} = 0{,}7$, $\frac{0{,}5}{0{,}5} = 1$, $\frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}6$ и $\frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$. Коэффициентам третьей строки нужно прибавить соответственно величины $\frac{0{,}5}{0{,}5} = 1{,}0$; $\frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}6$; $\frac{0{,}5}{0{,}6} = 0{,}8$; $\frac{0{,}5}{0{,}7} = 0{,}7$ и $\frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$. После сложения и частичного перенесения x_{23} получаем следующее распределение:

Таблица 3

	$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 25$	$b_4 = 30$	столбец остатков
$a_1 = 40$	8 0,7	7 0,8	7 0,6	9 0,5	1000 1 + 40
$a_2 = 50$	4,8 0,6	20 3,7 0,7 28,6	10,7 5 0,5 21,4	8,6 0,8	0,5 1 + 0
$a_3 = 50$	15 4 0,5 30	5,6 0,8	6,8 0,6	30 5,7 0,7 42,9	0,5 1 — 22,9
$a_4 = 1000$	6 0,6	6 0,7	14,3 5 0,5 28,6	7 0,8	0 1 + 971,4

Так как имеются отрицательные остатки, нужно вычисления продолжить. Вычисляем λ; $(4{,}8-4)\cdot 0{,}5 = 0{,}4$; $(7-5{,}7)\cdot 0{,}7 = 0{,}9$. Значит $\lambda = 0{,}4$ и к коэффициентам третьей строки нужно прибавить величины 0,8; 0,5; 0,7; 0,6 и 0,4, соответственно. Частично перенеся x_{31} и x_{23}, получаем:

Таблица 4

	$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 25$	$b_4 = 30$	столбец остатков
$a_1 =$ 40	8 0,7	7 0,8	7 0,6	9 0,5	1000 1 + 40
$a_2 =$ 50	11,45 **4,8** 0,6 19,1	20 **3,7** 0,7 28,6	1,15 **5** 0,5 2,3	8,6 0,8	0,5 1 + 0
$a_3 =$ 50	3,55 **4,8** 0,5 7,1	6,1 0,8	7,5 0,6	30 **6,3** 0,7 42,9	0,9 1 + 0
$a_4 = 1000$	6 0,6	6 0,7	23,85 **5** 0,5 47,7	7 0,8	0 1 + 952,3

Так как полученное распределение остатков явно неоптимальное, то нужно уменьшить коэффициенты c_{1j} первой строки. Вычисляем λ; $(8 - 4,8) \cdot 0,7 = 2,24$; $(7 - 3,7) \cdot 0,8 = 2,64$; $(7 - 5) \cdot 0,6 = 1,2$; $(9 - 6,3) \cdot 0,5 = 1,35$. Значит, $\lambda = -1,2$ и соответствующие слагаемые будут $-1,7$; $-1,5$; -2; $-2,4$; $-1,2$. Перенеся x_{43} и (частично) x_{23}, получаем:

Таблица 5

	$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 25$	$b_4 = 30$	столбец остатков
$a_1 =$ 40	6,3 0,7	5,5 0,8	24 **5** 0,6 40	6,6 0,5	998,8 1 + 0
$a_2 =$ 50	11,45 **4,8** 0,6 19,1	20 **3,7** 0,7 28,6	1 **5** 0,5 2	8,6 0,8	**0,5** 1 + 0,3
$a_3 =$ 50	3,55 **4,8** 0,5 7,1	6,1 0,8	7,5 0,6	30 **6,3** 0,7 42,9	0,9 1 +0
$a_4 = 1000$	6 0,6	6 0,7	5 0,5	7 0,8	**0** 1 + 1000

Полученное распределение величин x_{ij} по всем столбцам уже оптимальное (коэффициенты c_{4j} последней строки можно увеличить при помощи $\lambda = 0,5$). Общие затраты (1) на основе первоначальных коэффициентов при данном плане равны 438,5 ед. Однако мы не можем утверждать, что получен оптимальный план. На основе таблицы 5 и формулы (10) можем лишь сказать, что значение линейной формы при данном плане превышает наименьшее значение не более чем на 0,15 ед.

Исходя из таблицы 5, попробуем свести коэффициент c_{25} к нулю, сохраняя при этом равенства $c_{21} = c_{31}$; $c_{13} = c_{23}$ и неравенства $c_{22} \leqslant c_{12}, c_{32}$; $c_{34} \leqslant c_{14}, c_{24}$. Первые три строки нужно преобразовать тогда при помощи $\lambda_1 = -0,6$; $\lambda_2 = -0,5$ и $\lambda_3 = -0,4$. Но тогда получается, что $c'_{14} = 5,4$ и $c'_{34} = 5,7$, т. е. $c'_{14} < c'_{34}$. Последнее неравенство требовало бы перераспределения величин x_{i4}, что существенно изменило бы весь план. Тогда уменьшим c_{25} лишь настолько, чтобы сохранилось $c_{14} \geqslant c_{34}$. Соответствующие корректирующие λ_i найдем из системы уравнений

$$0,5\,\lambda_1 = 0,6\,\lambda_2,$$

$$0,5\,\lambda_2 = 0,6\,\lambda_3,$$

$$0{,}3 + \frac{\lambda_1}{0{,}5} = \frac{\lambda_3}{0{,}7};$$

получаем $\lambda_1 = -0{,}29$, $\lambda_2 = -0{,}24$ и $\lambda_3 = -0{,}20$. Новые коэффициенты c'_{ij} приведены в таблице 6.

Таблица 6

	$b_1 = 15$	$b_2 = 20$	$b_3 = 25$	$b_4 = 30$	столбец остатков
$a_1 =$ 40	5,9 0,7	5,1 0,8	23,75 4,5 0,6 39,6	0,2 6 0,5 0,4	998,5 1 +0
$a_2 =$ 50	11,3 4,4 0,6 18,9	20 3,4 0,7 28,6	1,25 4,5 0,5 2,5	8,3 0,8	0,3 1 +0
$a_3 =$ 50	3,7 4,4 0,5 7,4	5,9 0,8	7,2 0,6	29,8 6 0,7 42,6	0,7 1 +0
$a_4 = 1000$	6 0,6	6 0,7	5 0,5	7 0,8	0 1 +1000

Так как $c_{25} = 0{,}3 > 0$, то нужно в новом плане стремиться к минимальному x_{25}. Новые x_{ij} получаем из системы

$$\frac{x_{13}}{0{,}6} + \frac{x_{14}}{0{,}5} = 40,$$

$$\frac{x_{21}}{0{,}6} + \frac{x_{23}}{0{,}5} + x_{25} = 21{,}4,$$

$$\frac{x_{31}}{0{,}5} + \frac{x_{34}}{0{,}7} = 50,$$

$$x_{21} + x_{31} = 15,$$

$$x_{13} + x_{23} = 25,$$

$$x_{14} + x_{34} = 30,$$

учитывая требование минимальности x_{25}. Решение системы приведено в таблице 6. В этом плане распределение x_{ij} по всем столбцам оптимальное и, кроме того, величина (10) равна нулю. Следовательно, получен оптимальный план. Общие затраты (1) на основе первоначальных коэффициентов для этого плана равны 438,4 ед.

При практическом применении иногда удобнее использовать почти оптимальные планы, как в таблице 5 (см., напр., четвертые столбцы в таблицах 5 и 6).

Тартуский государственный университет

Институт энергетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
18. IX 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Программа Четвертого всесоюзного математического съезда 3 VII—12 VII 1961 г., Ленинград 1961 г.
2. А. Л. Лурье, Методы достижения наименьшего пробега грузов при составлении перевозочных схем, в сб. Применение математики в экономических исследованиях, Москва 1959, стр. 354—389.
3. Ю. А. Олейник, Решение задачи о транспортировке на электронной вычислительной машине методом приближения условно оптимальными планами, Москва 1960, 33 стр.

ÜLDISTATUD TRANSPORDIÜLESANDE LAHENDUSMEETOD

I. Kull,

füüsikalis-matemaatiliste teaduste kandidaat

E. Landra

Resümee

Artiklis vaadeldakse üldistatud transpordiülesannet, mis esineb näiteks mitme kütuseliigi jaotamisel mitmele energeetikaseadmele. Ülesanne seisneb suuruste $x_{ij} \geqslant 0$ leidmises, mis minimiseeriksid lineaarvormi (5), kusjuures oleksid täidetud tingimused (2) ja (6). Esitatud meetod on A. Lurje [2] meetodi üldistus. Olulisem erinevus on selles, et esitatud meetod nõuab ka jääkide optimaalset jaotust, kusjuures lineaarvorm (10) tuleb minimiseerida, kordajate c_{ij} teisendusi määravad suurused λ leitakse valemi (8) abil ja uued kordajad c'_{ij} valemi (9) abil.

Tartu Riiklik Ülikool

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Energeetika Instituut

Saabus toimetusse
18. IX 1961

A METHOD FOR SOLVING A GENERALIZED TRANSPORTATION PROBLEM

I. Kull, E. Landra

Summary

In the paper a generalized transportation problem is considered, which may occur, e. g., in the distribution of several kinds of fuel to various energy aggregates. The problem consists in the determination of the quantities $x_{ij} \geqslant 0$, which minimize the linear form (5) and satisfy the conditions (2) and (6). The presented method is a generalization of the method of A. Lurye [2]. The most important difference is that our method requires the optimal distribution of surplus fuels, and thus the linear form (10) must be minimized; the quantities λ for the transformations of the coefficients c_{ij} are determined by the formula (8), and new coefficients c'_{ij} — by the formula (9).

Tartu State University
Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Energetics

Received
Sept. 18th, 1961