

## ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

М. ЛЕВИН

Определение 1. Функция  $f(x, y)$  принадлежит классу  $W^{(m, n)}(M, N, P)$ , если на  $K = [0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$  частные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x, y) \quad (i = 0, 1, \dots, m; \quad j = 0, 1, \dots, n)$$

непрерывны и

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x, y) \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, y) \right| \leq N, \quad \left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(x, y) \right| \leq P.$$

Пусть мы имеем кубатурную формулу

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^s A_k f(x_k, y_k) + R[f], \quad (1)$$

в которой  $A_k, x_k, y_k$  ( $k = 1, 2, \dots, s$ ) выбраны так, что  $R[f] = 0$ , если  $f(x, y)$  многочлен относительно  $x$  степени  $\leq m-1$  и относительно  $y$  степени  $\leq n-1$ . Следуя Крылову [1] и Никольскому [2], найдем оценки для

$$R = \sup_{f \in W^{(m, n)}(M, N, P)} |R[f]|.$$

Из (1) мы имеем квадратурные формулы

$$\int_0^1 g(x) dx \approx \sum_{k=1}^s A_k g(x_k) \quad \text{и} \quad \int_0^1 h(y) dy \approx \sum_{k=1}^s A_k h(y_k), \quad (2)$$

точные для многочленов степени  $\leq m-1$  и  $\leq n-1$  соответственно.

Естественно считать известными величины

$$r = \sup_{g \in W^{(m)}(P)} |r[g(x)]| = \sup_{g \in W^{(m)}(P)} \left| \int_0^1 g(x) dx - \sum_{k=1}^s A_k g(x_k) \right|, \quad (3)$$

$$q = \sup_{h \in W^{(n)}(P)} |q[h(y)]| = \sup_{h \in W^{(n)}(P)} \left| \int_0^1 h(y) dy - \sum_{k=1}^s A_k h(y_k) \right|, \quad (4)$$

где  $W^{(l)}(P)$  — класс функций одной переменной, имеющих на  $[0, 1]$   $l$  непрерывных производных, причем последняя ограничена по модулю числом  $P$ .

Теорема 1. Верно неравенство

$$R \leq R_1 + R_2 + R_3, \quad (5)$$

где

$$R_1 = \frac{\varrho}{(m+1)!} + M \sum_{k=1}^s |A_k| \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^m}{m!} - E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!} \right| dt, \quad (6)$$

$$R_2 = \frac{r}{(n+1)!} + N \sum_{k=1}^s |A_k| \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^n}{n!} - E(y_k - t) \frac{(y_k - t)^{n-1}}{(n-1)!} \right| dt, \quad (7)$$

$$R_3 = P \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{(1-u)^m (1-t)^n}{m! n!} - \sum_{k=1}^s A_k E(x_k - u) E(y_k - t) \frac{(x_k - u)^{m-1} (y_k - t)^{n-1}}{(m-1)! (n-1)!} \right| du dt, \quad (8)$$

$$E(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Представим  $f(x, y)$  в форме Маклорена с остаточным членом в интегральной форме:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(0, y) + \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} f(0, 0) + \int_0^y \frac{\partial^{i+n}}{\partial x^i \partial y^n} f(0, t) \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \right] + \\ &\quad + \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt. \end{aligned}$$

Обозначим

$$P_{m-1, n-1}(x, y) = \sum_{i, k=0}^{m-1, n-1} \frac{x^i y^k}{i! k!} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} f(0, 0).$$

Получаем

$$\begin{aligned} f(x, y) &= P_{m-1, n-1}(x, y) + \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt + \\ &\quad + \int_0^y \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!} \frac{\partial^{i+n}}{\partial x^i \partial y^n} f(0, t) dt = \\ &= P_{m-1, n-1}(x, y) + \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt + \\ &\quad + \int_0^y \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left[ \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, t) - \int_0^x \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(u, t) \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!} du \right] dt = \\ &= P_{m-1, n-1}(x, y) + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3, \end{aligned}$$



где

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt = \int_0^1 \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt, \\ \varphi_2 &= \int_0^y \frac{\partial^n}{\partial y^n} \bar{f}(x, t) \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \int_0^1 \frac{\partial^n}{\partial y^n} \bar{f}(x, t) E(y-t) \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt, \\ \varphi_3 &= - \int_0^x \int_0^y \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \bar{f}(u, t) \frac{(x-u)^{m-1} (y-t)^{n-1}}{(m-1)! (n-1)!} dudt = \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} \bar{f}(u, t) E(x-u) E(y-t) \frac{(x-u)^{m-1} (y-t)^{n-1}}{(m-1)! (n-1)!} dudt.\end{aligned}$$

В силу определения (1)

$$R[P_{m-1, n-1}] = 0.$$

Поэтому

$$R[\bar{f}] = R[\varphi_1] + R[\varphi_2] + R[\varphi_3].$$

Оценим слагаемые  $R[\varphi_i]$  ( $i=1, 2, 3$ ).

$$\begin{aligned}R[\varphi_1] &= \int_0^1 dt R \left[ \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \right] = \\ &= \int_0^1 dt \left[ \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dx dy - \sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y_k) E(x_k - t) \cdot \right. \\ &\quad \left. \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!} \right] = \int_0^1 dt \left[ \int_0^1 \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y) dy \int_t^1 \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dx - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y_k) E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!} \right] = \\ &= \int_0^1 dt \left[ \left( \sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y_k) + \varrho \left[ \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y) \right] \right) \frac{(1-t)^m}{m!} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y_k) E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!} \right] = \\ &= \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} \varrho \left[ \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y) \right] dt + \int_0^1 \sum_{k=1}^s A_k \frac{\partial^m}{\partial x^m} \bar{f}(t, y_k) \left[ \frac{(1-t)^m}{m!} - \right. \\ &\quad \left. - E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!} \right] dt.\end{aligned}$$

Отсюда

$$|R[\varphi_1]| \leq R_1 = \frac{\varrho}{(m+1)!} + M \sum_{k=1}^s |A_k| \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^m}{m!} - E(x_k-t) \frac{(x_k-t)^{m-1}}{(m-1)!} \right| dt.$$

Аналогично получаем

$$|R[\varphi_2]| \leq R_2 = \frac{r}{(n+1)!} + N \sum_{k=1}^s |A_k| \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^n}{n!} - E(y_k-t) \frac{(y_k-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right| dt,$$

$$|R[\varphi_3]| \leq R_3 = P \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{(1-u)^m (1-t)^n}{m! n!} - \sum_{k=1}^s A_k E(x_k-u) E(y_k-t) \frac{(x_k-u)^{m-1} (y_k-t)^{n-1}}{(m-1)! (n-1)!} \right| dudt.$$

Этим теорема доказана.

Определение 2. Функция  $f(x, y)$  принадлежит классу  $W_0^{(m, n)}$  ( $P$ ), если на  $K = [0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$  ее частные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x, y) \quad (i=0, 1, \dots, m; j=0, 1, \dots, n)$$

непрерывны и

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} f(0, y) \equiv \frac{\partial^j}{\partial y^j} f(x, 0) \equiv 0 \quad (i=0, 1, \dots, m-1; j=0, 1, \dots, n-1), \quad (9)$$

$$\left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(x, y) \right| \leq P.$$

Теорема 2. Пусть дана кубатурная формула

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_{k=0}^r A_k f(x_k, y_k).$$

Тогда верна оценка

$$|R[f(x, y)]| = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \sum_{k=0}^r A_k f(x_k, y_k) \right| \leq \frac{P}{(m-1)! (n-1)!} \int_0^1 \int_0^1 K_{mn}(t, u) dt du,$$

где

$$K_{mn}(t, u) = \frac{(1-t)^m (1-u)^n}{mn} - \sum_{k=0}^r A_k E(x_k-t) E(y_k-u) (x_k-t)^{m-1} (y_k-u)^{n-1}.$$

Доказательство. Используя формулу Маклорена с остаточным членом в интегральной форме, мы можем написать

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(0, y) + \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt.$$



Учитывая (9) и используя функцию  $E(x)$ , получаем

$$f(x, y) = \int_0^1 \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt. \quad (10)$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) = \int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, u) E(y-u) \frac{(y-u)^{n-1}}{(n-1)!} du. \quad (11)$$

Равенства (10) и (11) дают

$$f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, u) E(x-t) E(y-u) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(y-u)^{n-1}}{(n-1)!} dt du.$$

Используя такое представление функции  $f \in W_0^{(m, n)}(P)$ , имеем

$$\begin{aligned} R[f(x, y)] &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, u) R \left[ E(x-t) E(y-u) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} \frac{(y-u)^{n-1}}{(n-1)!} \right] dt du = \\ &= \frac{1}{(m-1)! (n-1)!} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, u) \left[ \int_0^1 \int_0^1 E(x-t) E(y-u) (x-t)^{m-1} (y-u)^{n-1} dx dy - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^r A_k E(x_k - t) E(y_k - u) (x_k - t)^{m-1} (y_k - u)^{n-1} \right] dt du. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$R[f(x, y)] = \frac{1}{(m-1)! (n-1)!} \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, u) K_{mn}(t, u) dt du,$$

следовательно,

$$|R[f(x, y)]| \leq \frac{P}{(m-1)! (n-1)!} \int_0^1 \int_0^1 |K_{mn}(t, u)| dt du. \quad (12)$$

Этим теорема доказана.

Оценка (12) точна для класса  $W_0^{(m, n)}(P)$ .

Пример. Рассмотрим простейшую кубатурную формулу

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + R[f]$$

и найдем для нее оценку величины  $R$ . Здесь  $m = n = 2$ . Вычисления по (3), (4), (5), (7) и (8) дают

$$r = \varrho = P \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^2}{2} - E\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\frac{1}{2}-t\right) \right| dt = \frac{P}{24},$$

$$R_1 = \frac{P}{144} + \frac{M}{24}, \quad R_2 = \frac{P}{144} + \frac{N}{24} \text{ и } R_3 = \frac{7P}{576},$$

откуда

$$R \leq \frac{M+N}{24} + \frac{5P}{192}.$$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов. Москва, 1959.
2. Никольский С. М., Квадратурные формулы. Москва, 1958.

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
13. XII 1961

#### KUBATUURVALEMITE VEA HINNANGUST

M. Levin

Resümee

Artiklis esitatakse kubatuurvalemi (1) vea ülemine tõke diferentseeruvate funktsioonideklassi  $W^{(m, n)}$  ( $M, N, P$ ) jaoks.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia  
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse  
13. XII 1961

#### ON THE ESTIMATE OF THE ERROR FOR QUADRATURE IN TWO DIMENSIONS

M. Levin

Summary

The present article deduces the upper boundary of the errors of the quadrature formula (1) for the function class  $W^{(m, n)}$  ( $M, N, P$ ) which is subject to differentiation.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,  
Institute of Cybernetics

Received  
Dec. 13th, 1961