EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XI KOIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1962, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XI
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1962, № 2

# ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛ

М. ЛЕВИН

Определение 1. Функция $f(x,y)$ принадлежит классу $W^{(m,n)}(M, N, P)$, если на $K=[0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1]$ частные производные

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x,y) \qquad (i=0, 1, \ldots, m; \quad j=0, 1, \ldots, n)$$

непрерывны и

$$\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(x,y)\right| \leqslant M, \left|\frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x,y)\right| \leqslant N, \left|\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(x,y)\right| \leqslant P.$$

Пусть мы имеем кубатурную формулу

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{k=1}^{s} A_k f(x_k, y_k) + R[f], \tag{1}$$

в которой $A_k, x_k, y_k$ $(k=1, 2, \ldots, s)$ выбраны так, что $R[f]=0$, если $f(x, y)$ многочлен относительно $x$ степени $\leqslant m-1$ и относительно $y$ степени $\leqslant n-1$. Следуя Крылову [1] и Никольскому [2], найдем оценки для

$$R = \sup_{f\in W^{(m,n)}(M,N,P)} |R[f]|.$$

Из (1) мы имеем квадратурные формулы

$$\int_0^1 g(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{s} A_k g(x_k) \quad \text{и} \quad \int_0^1 h(y)\,dy \approx \sum_{k=1}^{s} A_k h(y_k), \tag{2}$$

точные для многочленов степени $\leqslant m-1$ и $\leqslant n-1$ соответственно.

Естественно считать известными величины

$$r = \sup_{g\in W^{(m)}(P)} |r[g(x)]| = \sup_{g\in W^{(m)}(P)} \left|\int_0^1 g(x)\,dx - \sum_{k=1}^{s} A_k g(x_k)\right|, \tag{3}$$

$$\varrho = \sup_{h\in W^{(n)}(P)} |\varrho[h(y)]| = \sup_{h\in W^{(n)}(P)} \left|\int_0^1 h(y)\,dy - \sum_{k=1}^{s} A_k h(y_k)\right|, \tag{4}$$

где $W^{(l)}(P)$ — класс функций одной переменной, имеющих на [0,1] $l$ непрерывных производных, причем последняя ограничена по модулю числом $P$.

Теорема 1. *Верно неравенство*

$$R \leqslant R_1 + R_2 + R_3, \tag{5}$$

*где*

$$R_1 = \frac{\varrho}{(m+1)!} + M \sum_{k=1}^{s} |A_k| \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^m}{m!} - E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!} \right| dt, \tag{6}$$

$$R_2 = \frac{r}{(n+1)!} + N \sum_{k=1}^{s} |A_k| \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^n}{n!} - E(y_k - t) \frac{(y_k - t)^{n-1}}{(n-1)!} \right| dt, \tag{7}$$

$$R_3 = P \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{(1-u)^m (1-t)^n}{m!\, n!} - \sum_{k=1}^{s} A_k E(x_k - u)\, E(y_k - t) \frac{(x_k - u)^{m-1} (y_k - t)^{n-1}}{(m-1)!\,(n-1)!} \right| du\,dt, \tag{8}$$

$$E(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Доказательство. Представим $f(x, y)$ в форме Маклорена с остаточным членом в интегральной форме:

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(0, y) + \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\, dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!} \left[ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} f(0, 0) + \int_0^y \frac{\partial^{i+n}}{\partial x^i \partial y^n} f(0, t) \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, dt \right] +$$

$$+ \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\, dt.$$

Обозначим

$$P_{m-1, n-1}(x, y) = \sum_{i, k=0}^{m-1, n-1} \frac{x^i\, y^k}{i!\; k!} \frac{\partial^{i+k}}{\partial x^i \partial y^k} f(0, 0).$$

Получаем

$$f(x, y) = P_{m-1, n-1}(x, y) + \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\, dt +$$

$$+ \int_0^y \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!} \frac{\partial^{i+n}}{\partial x^i\, \partial y^n} f(0, t)\, dt =$$

$$= P_{m-1, n-1}(x, y) + \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\, dt +$$

$$+ \int_0^y \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} \left[ \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, t) - \int_0^x \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(u, t) \frac{(x-u)^{m-1}}{(m-1)!}\, du \right] dt =$$

$$= P_{m-1, n-1}(x, y) + \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

где

$$\varphi_1 = \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt = \int_0^1 \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt,$$

$$\varphi_2 = \int_0^y \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, t) \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt = \int_0^1 \frac{\partial^n}{\partial y^n} f(x, t) E(y-t) \frac{(y-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt,$$

$$\varphi_3 = -\int_0^x \int_0^y \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(u, t) \frac{(x-u)^{m-1}(y-t)^{n-1}}{(m-1)!\,(n-1)!} du dt =$$

$$= -\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(u, t) E(x-u) E(y-t) \frac{(x-u)^{m-1}(y-t)^{n-1}}{(m-1)!\,(n-1)!} du dt.$$

В силу определения (1)

$$R[P_{m-1,\,n-1}] = 0.$$

Поэтому

$$R[f] = R[\varphi_1] + R[\varphi_2] + R[\varphi_3].$$

Оценим слагаемые $R[\varphi_i]$ $(i = 1, 2, 3)$.

$$R[\varphi_1] = \int_0^1 dt\, R\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}\right] =$$

$$= \int_0^1 dt \left[\int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dx dy - \sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y_k) E(x_k - t) \cdot\right.$$

$$\left.\cdot \frac{(x_k-t)^{m-1}}{(m-1)!}\right] = \int_0^1 dt \left[\int_0^1 \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) dy \int_t^1 \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dx - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y_k) E(x_k - t) \frac{(x_k-t)^{m-1}}{(m-1)!}\right] =$$

$$= \int_0^1 dt \left[\left(\sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y_k) + \varrho\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y)\right]\right) \frac{(1-t)^m}{m!} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y_k) E(x_k - t) \frac{(x_k-t)^{m-1}}{(m-1)!}\right] =$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-t)^m}{m!} \varrho\left[\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y)\right] dt + \int_0^1 \sum_{k=1}^{s} A_k \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y_k) \left[\frac{(1-t)^m}{m!} - \right.$$

$$\left. - E(x_k - t) \frac{(x_k-t)^{m-1}}{(m-1)!}\right] dt.$$

Отсюда

$$|R[\varphi_1]| \leqslant R_1 = \frac{\varrho}{(m+1)!} + M \sum_{k=1}^{s} |A_k| \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^m}{m!} - E(x_k - t) \frac{(x_k - t)^{m-1}}{(m-1)!} \right| dt.$$

Аналогично получаем

$$|R[\varphi_2]| \leqslant R_2 = \frac{r}{(n+1)!} + N \sum_{k=1}^{s} |A_k| \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^n}{n!} - E(y_k - t) \frac{(y_k - t)^{n-1}}{(n-1)!} \right| dt,$$

$$|R[\varphi_3]| \leqslant R_3 = P \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{(1-u)^m (1-t)^n}{m!\ n!} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{s} A_k E(x_k - u) E(y_k - t) \frac{(x_k - u)^{m-1} (y_k - t)^{n-1}}{(m-1)!\ (n-1)!} \right| du dt.$$

Этим теорема доказана.

Определение 2. *Функция $f(x, y)$ принадлежит классу $W_0^{(m,n)}$ $(P)$, если на $K = [0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1]$ ее частные производные*

$$\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x, y) \quad (i = 0, 1, \ldots, m;\ j = 0, 1, \ldots, n)$$

*непрерывны и*

$$\frac{\partial^i}{\partial x^i} f(0, y) \equiv \frac{\partial^j}{\partial y^j} f(x, 0) \equiv 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, m-1;\ j = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{9}$$

$$\left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(x, y) \right| \leqslant P.$$

Теорема 2. *Пусть дана кубатурная формула*

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \approx \sum_{k=0}^{r} A_k f(x_k, y_k).$$

*Тогда верна оценка*

$$|R[f(x, y)]| = \left| \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy - \sum_{k=0}^{r} A_k f(x_k, y_k) \right| \leqslant \frac{P}{(m-1)!\ (n-1)!} \int_0^1 \int_0^1 |K_{mn}(t, u)|\, dt du,$$

*где*

$$K_{mn}(t, u) = \frac{(1-t)^m (1-u)^n}{mn} - \sum_{k=0}^{r} A_k E(x_k - t) E(y_k - u) (x_k - t)^{m-1} (y_k - u)^{n-1}.$$

Доказательство. Используя формулу Маклорена с остаточным членом в интегральной форме, мы можем написать

$$f(x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!} \frac{\partial^i}{\partial x^i} f(0, y) + \int_0^x \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt.$$

Учитывая (9) и используя функцию $E(x)$, получаем

$$f(x, y)=\int_0^1 \frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y) E(x-t) \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} dt. \tag{10}$$

Аналогично находим

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} f(t, y)= \int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, u) E(y-u) \frac{(y-u)^{n-1}}{(n-1)!} du. \tag{11}$$

Равенства (10) и (11) дают

$$f(x, y)=\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, u) E(x-t) E(y-u) \frac{(x-t)^{m-1}(y-u)^{n-1}}{(m-1)!\ (n-1)!} dtdu.$$

Используя такое представление функции $f \in W_0^{(m, n)}(P)$, имеем

$$R[f(x, y)]=\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, u) R\left[E(x-t) E(y-u) \frac{(x-t)^{m-1}(y-u)^{n-1}}{(m-1)!\ (n-1)!}\right] dtdu=$$

$$=\frac{1}{(m-1)!\,(n-1)!}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, u)\Big[\int_0^1\int_0^1 E(x-t) E(y-u)(x-t)^{m-1}(y-u)^{n-1} dxdy -$$

$$-\sum_{k=0}^{r} A_k E(x_k-t) E(y_k-u)(x_k-t)^{m-1}(y_k-u)^{n-1}\Big] dtdu.$$

Отсюда следует

$$R[f(x, y)]=\frac{1}{(m-1)!\ (n-1)!}\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} f(t, u) K_{mn}(t, u) dtdu,$$

следовательно,

$$|R[f(x, y)]| \leqslant \frac{P}{(m-1)!\ (n-1)!}\int_0^1\int_0^1 |K_{mn}(t, u)| dtdu \tag{12}$$

Этим теорема доказана.

Оценка (12) точна для класса $W_0{}^{(m, n)}(P)$.

Пример. Рассмотрим простейшую кубатурную формулу

$$\int_0^1\int_0^1 f(x, y) dxdy=f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)+R[f]$$

и найдем для нее оценку величины $R$. Здесь $m=n=2$. Вычисления по (3), (4), (5), (7) и (8) дают

$$r = \varrho = P\int\limits_0^1 \left| \frac{(1-t)^2}{2} - E\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\frac{1}{2}-t\right) \right| dt = \frac{P}{24},$$

$$R_1 = \frac{P}{144} + \frac{M}{24}, \qquad R_2 = \frac{P}{144} + \frac{N}{24} \text{ и } R_3 = \frac{7P}{576},$$

откуда

$$R \leqslant \frac{M+N}{24} + \frac{5P}{192}.$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов В. И., Приближенное вычисление интегралов. Москва, 1959.
2. Никольский С. М., Квадратурные формулы. Москва, 1958.

*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
13. XII 1961

## KUBATUURVALEMITE VEA HINNANGUST

M. Levin

*Resümee*

Artiklis esitatakse kubatuurvalemi (1) vea ülemine tõke diferentseeruvate funktsioonideklassi $W^{(m,\,n)}$ $(M, N, P)$ jaoks.

*Eesti NSV Teaduste Akadeemia*
*Küberneetika Instituut*

Saabus toimetusse
13. XII 1961

## ON THE ESTIMATE OF THE ERROR FOR QUADRATURE IN TWO DIMENSIONS

M. Levin

*Summary*

The present article deduces the upper boundary of the errors of the quadrature formula (1) for the function class $W^{(m,\,n)}$ $(M, N, P)$ which is subject to differentiation.

*Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,*
*Institute of Cybernetics*

Received
Dec. 13th, 1961