EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XI KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1962, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XI
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1962, № 2

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1962.2.04

ОБОБЩЕННЫЕ МНОЖИТЕЛИ СХОДИМОСТИ ДЛЯ МЕТОДА ЭЙЛЕРА-КНОППА

Ф. ВИХМАНН

Последовательность $\{s_k\}$ называется суммируемой методом Эйлера-Кноппа E^p, если существует предел $\lim\limits_{\nu\to\infty} \sigma_\nu = \sigma$, где

$$\sigma_\nu = \frac{1}{p^\nu} \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} (p-1)^{\nu-k} s_k \qquad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Если $p > 1$, то метод E^p регулярен. Пусть дан еще другой регулярный метод Эйлера-Кноппа E^q преобразованием

$$\tau_\nu = \frac{1}{q^\nu} \sum_{l=0}^{\nu} \binom{\nu}{l} (q-1)^{\nu-l} t_l \qquad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

Преобразования (1) и (2) имеют следующие обратные преобразования:

$$s_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} p^k (1-p)^{\nu-k} \sigma_k \qquad (\nu = 0, 1, \ldots) \tag{3}$$

и

$$t_\nu = \sum_{l=0}^{\nu} \binom{\nu}{l} q^l (1-q)^{\nu-l} \tau_l \qquad (\nu = 0, 1, \ldots). \tag{4}$$

Определение. *Величины ε_n $(n = 0, 1, \ldots)$ называются множителями сходимости относительно $\mathfrak{E}^p$ и $\mathfrak{E}^q$, если ряд $\sum \varepsilon_n s_n t_n$ сходится при каждой E^p-суммируемой последовательности $\{s_n\}$ и каждой E^q-суммируемой последовательности $\{t_n\}$. Величины ε_n $(n = 0, 1, \ldots)$ называются множителями сходимости относительно E^p и E^q, если ряд $\sum \varepsilon_n a_n b_n$ сходится при каждой E^p-суммируемой последовательности $\left\{\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu\right\}$ и E^q-суммируемой последовательности $\left\{\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\right\}$.*

В настоящей статье обобщаются некоторые результаты Пейеримхоффа [1], а также Гайера и Пейеримхоффа [2], касающиеся простых множителей сходимости для E^p, на случай обобщенных множителей сходимости.

Теорема 1. *Величины* $\varepsilon_n = (-\Theta)^n (n = 0, 1, \ldots)$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{1}{(2p-1)(2q-1)}$, *являются множителями сходимости относительно* $\mathfrak{E}^p$ *и* $\mathfrak{E}^q$.

При доказательстве теоремы используется следующая

Лемма (Фроли, [3]). *Преобразование* $z_n = \sum_{k,l=0}^{\infty} A_{nkl} x_k y_l$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *переводит пространство* $c_0 \times c_0$ *в пространство* c *тогда и только тогда, когда*

1° $\lim_n A_{nkl} = A_{kl}$ $(k, l = 0, 1, \ldots)$,

2° $\sup_{\substack{\|x\| \leqslant 1, \\ \|y\| \leqslant 1, \\ x, y \in c_0}} \left| \sum_{k,l=0}^{\infty} A_{nkl} x_k y_l \right| = O(1)$, *где* $x = \{x_k\}$, $y = \{y_l\}$.

Условие 2° *выполнено, если* $\sum_{k,l=0}^{\infty} |A_{nkl}| = O(1)$.

Так как для каждой E^p-суммируемой последовательности $\{s_\nu\}$ и E^q-суммируемой последовательности $\{t_\nu\}$ известно, что $s_\nu = o[(2p-1)^\nu]$ и $t_\nu = o[(2q-1)^\nu]$ (см. [4], стр. 228), то достаточно показать, что ряд $\sum \varepsilon_\nu s_\nu t_\nu$ сходится при каждой последовательности $\{s_\nu\}$, E^p-суммируемой к нулю, и каждой последовательности $\{t_\nu\}$, E^q-суммируемой к нулю.

Принимая во внимание формулы (3) и (4) и обозначая max $\{k, l\}$ через (k, l), получаем:

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu s_\nu t_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} (-\Theta)^\nu \sum_{k,l=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{\nu}{l} p^k q^l (1-p)^{\nu-k} (1-q)^{\nu-l} \sigma_k \tau_l =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{n} p^k q^l \sigma_k \tau_l \sum_{\nu=0}^{n-(k,l)} (-1)^{\nu+(k,l)} \binom{\nu+(k,l)}{k} \binom{\nu+(k,l)}{l} (1-p)^{\nu+(k,l)-k} (1-q)^{\nu+(k,l)-l} \Theta^{\nu+(k,l)} =$$

$$= \sum_{k,l=0}^{n} \sigma_k \tau_l p^k q^l (1-p)^{(k,l)-k} (1-q)^{(k,l)-l} \Theta^{(k,l)} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} - \sum_{\nu=n-(k,l)+1}^{\infty} \right\} (-1)^{\nu+(k,l)} \binom{\nu+(k,l)}{k} \cdot$$

$$\cdot \binom{\nu+(k,l)}{l} [(1-p)(1-q)\Theta]^\nu = \sum_{k,l=0}^{n} A_{kl} \sigma_k \tau_l - \sum_{k,l=0}^{n} B_{nkl} \sigma_k \tau_l .$$

Покажем, что существуют пределы при $n \to \infty$ обеих сумм при каждой последовательности $\{\sigma_k\} \in c_0$ и каждой последовательности $\{\tau_l\} \in c_0$. Для этого величины A_{nkl} $[A_{nkl} = A_{kl}$ $(k, l \leqslant n)$, $A_{nkl} = 0$ в остальных случаях$]$ и B_{nkl} $(k, l, n = 0, 1, \ldots)$ должны удовлетворять условиям леммы.

Обозначаем

$$y = (1-p)(1-q)\Theta. \tag{5}$$

Очевидно, $0 \leqslant y < 1$.

1. Покажем, что условия леммы выполнены для величин A_{nkl} (n, k, l). Пусть $k \geqslant l$. Обозначаем сумму ряда $\sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu+k} \binom{\nu+k}{k} \binom{\nu+k}{l} y^{\nu}$ через $P_{kl}(y)$.

Тогда

$$y^k \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} y^{\nu} = (-1)^k k!\, l! \underbrace{\int_0^y \cdots \int_0^y}_{k} y^{-k} dy^k \underbrace{\int_0^y \cdots \int_0^y}_{l} y^{k-l} P_{kl}(y) dy^l,$$

откуда

$$P_{kl}(y) = \frac{(-1)^k y^{l-k}}{l!} \frac{d^l}{dy^l} \left[\frac{y^k}{(1+y)^{k+1}} \right] = \frac{(-1)^k}{(1+y)^{k+1}} \sum_{\nu=0}^{l} (-1)^{\nu} \binom{l}{\nu} \binom{k+\nu}{l} \left(\frac{y}{1+y} \right)^{\nu}$$

Обозначаем $\frac{y}{1+y}$ через x. Очевидно, $0 \leqslant x < 0{,}5$.

Определяем полиномы $p_{ln}(x)$ для $l = 0, 1, \ldots$:

$$p_{ln}(x) = \frac{(-1)^n}{\binom{n+l}{l}} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} \binom{n+l+\nu}{n} x^{\nu} =$$

$$= \frac{(-1)^n x^{-l}}{\binom{n+l}{n} n!} \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+l} (1-x)^n] \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{6}$$

Легко убедиться, что полиномы $p_{ln}(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ при фиксированном l ортогональны относительно веса x^l на интервале $(0, 1)$.

Нетрудно увидеть, что имеет место интегральное представление

$$p_{on}(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_C \frac{z^n (z-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

где C — замкнутый контур, окружающий точку x. Пусть, в частности, x — действительное число, $|x| > 1$, а C — окружность с центром в точке x и радиусом $\sqrt{x(x-1)}$. Полагая $z = x + \sqrt{x(x-1)} e^{i\varphi}$, находим $z(z-1) = e^{i\varphi} \sqrt{x(x-1)} [(2x-1) + 2\sqrt{x(x-1)} \cos\varphi]$ и, следовательно,

$$p_{on}(x) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^{\pi} [(2x-1) + 2\sqrt{x(x-1)} \cos\varphi]^n d\varphi.$$

Так как здесь слева и справа стоят полиномы от x, то последнее равенство, полученное нами для $|x| > 1$, верно для всех действительных x.

Покажем, что для $x \in [0, 1]$ имеем $|p_{on}(x)| \leqslant 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Так как

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n+1} x\, dx = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

то

$$p_{on}(x) = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^{\pi} [(2x-1) + 2i\sqrt{x(1-x)} \cos\varphi]^n d\varphi = \frac{(-1)^n}{\pi} \int_0^{\pi} [F_1(x, \varphi) + iF_2(x, \varphi)] d\varphi,$$

где

$$\int_0^\pi F_1(x,\varphi)\,d\varphi=0, \qquad p_{on}(x)=\frac{(-1)^n}{\pi}\int_0^\pi F_2(x,\varphi)\,d\varphi.$$

Следовательно,

$$|p_{on}(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |F_1(x,\varphi)+iF_2(x,\varphi)|\,d\varphi.$$

Поскольку при $x\in[0,1]$

$$|(2x-1)+i\sqrt{x(1-x)}\cos\varphi|=[(2x-1)^2\sin^2\varphi+\cos^2\varphi]^{\frac{1}{2}}\leqslant 1,$$

то

$$|p_{on}(x)|\leqslant 1 \qquad (x\in[0,1]). \tag{7}$$

Покажем теперь, что $|p_{ln}(x)|\leqslant 1$ $(l,\ n=0,\ 1,\ \ldots)$ для $x\in[0,1]$. Для этого докажем справедливость формулы

$$p_{ln}(x)=\frac{1}{\binom{l+n}{l}^2}\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu\left[\binom{l+n-\nu}{l}^2-\binom{l+n-\nu-1}{l}^2\right]p_{l-1,n-\nu}(x). \tag{8}$$

$$(l=1,\ 2,\ \ldots;\quad n=0,\ 1,\ \ldots).$$

Формула (8) верна, очевидно, тогда и только тогда, когда коэффициенты при x^ν $(\nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ слева и справа в равенстве (8) равны. Вставим вместо $p_{ln}(x)$ и $p_{l-1,i}(x)$ $(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ их выражения из (6). Если $\nu=0$, то из (8) получаем

$$(-1)^n=\frac{(-1)^n}{\binom{l+n}{l}^2}\sum_{\nu=0}^{n}\left[\binom{l+n-\nu}{l}^2-\binom{l+n-\nu-1}{l}^2\right],$$

справедливость которого очевидна. Если $\nu\neq 0$, то при каждом $n\geqslant\nu$ равенство коэффициентов при x^ν выражается соотношением

$$\frac{(-1)^{n+\nu}\binom{n}{\nu}\binom{n+l+\nu}{n}}{\binom{n+l}{n}}=\frac{1}{\binom{n+l}{n}^2}\sum_{i=\nu}^{n}(-1)^{n+\nu}\frac{\binom{i}{\nu}\binom{i+\nu+l-1}{i}}{\binom{i+l-1}{i}}\left[\binom{l+i}{l}^2-\binom{l+i-1}{l}^2\right],$$

или

$$\frac{(n+l)!\,(n+l+\nu)!}{n!\,(n-\nu)!\,(l+\nu)}=\sum_{i=\nu}^{n}\frac{(l+i-1)!\,(l+\nu+i-1)!\,(l+2i)}{i!\,(i-\nu)!}.$$

Очевидно, что последнее равенство справедливо при $n=\nu$. Предположим его справедливость при всех n, $\nu\leqslant n\leqslant m$, и покажем, что оно останется в силе при $n=m+1$.

Действительно,

$$\sum_{i=\nu}^{m+1}\frac{(l+i-1)!\,(l+\nu+i-1)!\,(l+2i)}{i!\,(i-\nu)!}=\frac{(m+l)!\,(m+l+\nu)!}{m!\,(m-\nu)!\,(l+\nu)}+$$

$$+\frac{(m+l)!\,(m+l+\nu)!\,[2(m+1)+l]}{(m+1)!\,(m+1-\nu)!}=\frac{(m+l)!\,(m+l+\nu)!}{(m+1)!\,(m+1-\nu)!\,(l+\nu)}\cdot$$

$$\cdot\Big\{(m+1)(m+1-\nu)+(l+\nu)[2(m+1)+l]\Big\}=\frac{(m+1+l)!\,(m+1+l+\nu)!}{(m+1)!\,(m+1-\nu)!\,(l+\nu)}.$$

Так как $\frac{1}{\binom{l+n}{l}^2}\sum_{\nu=0}^{n}\left[\binom{l+n-\nu}{l}^2-\binom{l+n-\nu-1}{l}^2\right]=1$, то, ввиду (7) из формулы (8) вытекает $|p_{ln}(x)|\leqslant 1$ $(l, n=0, 1, \ldots)$ для $x\in[0,1]$.

Теперь уже легко показать, что условие 2° леммы выполнено для величин $A_{nkl}(k, l, n=0, 1, \ldots)$. Так как

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{k}|A_{kl}|=\sum_{k=0}^{n}\frac{p^k\Theta^k}{(1+y)^{k+1}}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}q^l(q-1)^{k-l}\left|\frac{1}{\binom{k}{l}}\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^\nu\binom{l}{\nu}\binom{k+\nu}{l}\left(\frac{y}{1+y}\right)^\nu\right|=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{p^k\Theta^k}{(1+y)^{k+1}}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}q^l(q-1)^{k-l}|p_{k-l,\,l}(x)|=O(1)\sum_{k=0}^{n}\frac{p^k(2q-1)^k\Theta^k}{(1+y)^{k+1}}=O(1)$$

и аналогично $\sum_{l=0}^{n}\sum_{k=0}^{l}|A_{kl}|=O(1)$, то $\sum_{k,l=0}^{n}|A_{kl}|=O(1)$. Условие 1° леммы автоматически выполнено.

2. Покажем, что для величин B_{nkl} $(k, l, n=0, 1, \ldots)$ выполнены условия леммы.

Пусть $k\geqslant l$. Обозначаем через $P_{nkl}(y)$ сумму ряда $\sum_{\nu=n-k+1}^{\infty}(-1)^{\nu+k}\binom{\nu+k}{k}\binom{\nu+k}{l}y^\nu$, где y определено формулой (5). Рассматривая y как переменную, можно выписать равенство

$$\frac{(-1)^k}{l!}\sum_{\nu=n-k+1}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\nu+k}{k}y^{\nu+k}=\underbrace{\int_0^y\ldots\int_0^y}_{l}y^{k-l}P_{nkl}(y)\,dy^l.$$

Представим здесь остаточный член ряда $\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\nu+k}{k}y^\nu$ в форме Лагранжа:

$$\sum_{\nu=n-k+1}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\nu+k}{k}y^\nu=\frac{y^{n-k+1}}{(n-k+1)!}\left[\frac{d^{n-k+1}}{d\eta^{n-k+1}}\left(\frac{1}{1+\eta}\right)^{k+1}\right]_{\eta=\delta y},$$

где $0<\delta<1$. Следовательно,

$$P_{nkl}(y)=\frac{(-1)^k\binom{n+1}{l}}{(n-k+1)!}y^{n-k+1}\left[\frac{d^{n-k+1}}{d\eta^{n-k+1}}\left(\frac{1}{1+\eta}\right)^{k+1}\right]_{\eta=\delta y}=$$

$$=(-1)^{n+1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{l}y^{n-k+1}(1+\eta)^{-n-2}\Big|_{\eta=\delta y},$$

откуда

$$|P_{nkl}(y)|=O(1)\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{l}y^{n-k+1}\qquad(0\leqslant y<1).$$

Аналогично, если $l\geqslant k$, то

$$|P_{nkl}(y)|=O(1)\binom{n+1}{k}\binom{n+1}{l}y^{n-l+1}\qquad(0\leqslant y<1).$$

Оценим выражение $\sum\limits_{k,\,l=0}^{n} |B_{nkl}|$:

$$\sum_{k,\,l=0}^{n} |B_{nkl}| = O(1)\left\{\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \frac{p^k y^{n-k+1}}{(2p-1)^k (2q-1)^k} \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n+1}{l} q^l (q-1)^{k-l} + \right.$$

$$\left. + \sum_{l=0}^{n} \binom{n+1}{l} \frac{q^l y^{n-l+1}}{(2p-1)^l (2q-1)^l} \sum_{k=0}^{l} \binom{n+1}{k} p^k (p-1)^{l-k} \right\} =$$

$$= \frac{O(1)}{(2p-1)^{n+1} (2q-1)^{n+1}} \sum_{k,\,l=0}^{n} \binom{n+1}{k} \binom{n+1}{l} p^k q^l (p-1)^{n+1-k} (q-1)^{n+1-l} =$$

$$= \frac{O(1)}{(2p-1)^{n+1} (2q-1)^{n+1}} [(2p-1)^{n+1} - p^{n+1}][(2q-1)^{n+1} - q^{n+1}] = O(1).$$

Значит, условие 2° леммы выполнено, а выполнение условия 1° тривиально.

Т е о р е м а 2. *Величины* $\varepsilon_n = (-\Theta)^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{1}{(2p-1)(2q-1)}$, *являются множителями сходимости относительно* E^p *и* E^q.

Д о к а з а т е л ь с т в о Справедлива формула

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu a_\nu b_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu s_\nu t_\nu + \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu s_{\nu-1} t_{\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu s_\nu t_{\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu s_{\nu-1} t_\nu, \tag{9}$$

где $s_\nu = \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} a_\mu$ и $t_\nu = \sum\limits_{\mu=0}^{\nu} b_\mu$.

Так как регулярные методы Эйлера-Кноппа E^p и E^q транслятивны, то при каждой E^p-суммируемой последовательности $\{s_0, s_1, \ldots\}$ также E^p-суммируема и последовательность $\{0, s_0, s_1, \ldots\}$, а при каждой E^q-суммируемой последовательности $\{t_0, t_1, \ldots\}$ также E^q-суммируема и последовательность $\{0, t_0, t_1, \ldots\}$. Значит, по теореме 1, справа в равенстве (9) все пределы при $n \to \infty$ существуют при каждой E^p-суммируемой последовательности $\{s_\nu\}$ и каждой E^q-суммируемой последовательности $\{t_\nu\}$, что и доказывает теорему.

П р и м е ч а н и е. Величины $\varepsilon_n = \frac{1}{(2p-1)^n (2q-1)^n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ не являются множителями сходимости относительно $\mathfrak{E}^p$ и $\mathfrak{E}^q$. Действительно, иначе ряд $\sum \varepsilon_\nu s_\nu t_\nu$ сходился бы при каждой E^p-суммируемой последовательности $\{s_\nu\}$ и каждой E^q-суммируемой последовательности $\{t_\nu\}$. Но тогда должно выполняться условие 2° леммы

$$A_n = \sup_{\substack{\|\sigma\| \leqslant 1,\\ \|\tau\| \leqslant 1,\\ \sigma,\ \tau \in c_0}} \left| \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon_\nu \sum_{k,\,l=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} \binom{\nu}{l} p^k q^l (1-p)^{\nu-k} (1-q)^{\nu-l} \sigma_k \tau_l \right| = O(1)$$

Возьмем здесь $\sigma = \{\sigma_k\} = \{1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, 0, 0, \ldots\}$ и $\tau = \{\tau_l\} = \{1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, 0, 0, \ldots\}$. Тогда $A_n \geqslant n+1$, что не совместимо с условием $A_n = O(1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Peyerimhoff, Konvergenzfaktoren beim Euler-Knoppschen Limitierungsverfahren, Math. Z., **55**, 288—291.
2. D. Gaier, A. Peyerimhoff, Summierbarkeitsfaktoren bei Eulerschen Reihentransformationen, Math. Z., **58**, 232—242.
3. P. A. Fraleigh, Regular bilinear transformations of sequences, Amer. Journ. Math., **53** (1931), 667—709.
4. Г. Харди, Расходящиеся ряды, М. (1951).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
24. IV 1961

ÜLDISTATUD SUMMEERUVUSTEGURID EULERI-KNOPPI MENETLUSE KORRAL

F. Vichmann

Resümee

Olgu E^p ja E^q Euleri-Knoppi summeerimismenetlused. Reaalarve ε_n $(n=0,1,\ldots)$ nimetatakse $\mathfrak{E}^p$ ja $\mathfrak{E}^q$ koonduvustegureiks, kui rida $\sum \varepsilon_n s_n t_n$ koondub iga E^p-summeeruva jada $\{s_n\}$ ja iga E^q-summeeruva jada $\{t_n\}$ korral.

Artiklis tõestatakse, et arvud $\varepsilon_n = (-\Theta)^n$ $(n=0, 1, \ldots)$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{1}{(2p-1)(2q-1)}$, on $\mathfrak{E}^p$ ja $\mathfrak{E}^q$ koonduvustegurid $(p, q > 1)$.

Tartu Riiklik Ülikool

Saabus toimetusse
24. IV 1961

VERALLGEMEINERTE KONVERGENZFAKTOREN BEIM EULER-KNOPPSCHEN LIMITIERUNGSVERFAHREN

F. Vichmann

Zusammenfassung

E^p und E^q seien Euler-Knoppsche Limitierungsverfahren. Reelle Zahlen $\varepsilon_n (n=0,1,\ldots)$ nennt man Konvergenzfaktoren der $\mathfrak{E}^p$ und $\mathfrak{E}^q$, wenn für alle E^p-limitierbaren Folgen $\{s_n\}$ und für alle E^q-limitierbaren Folgen $\{t_n\}$ stets die Reihe $\sum \varepsilon_n s_n t_n$ konvergiert.

Im Aufsatz wird bewiesen, dass die Zahlen $\varepsilon_n = (-\Theta)^n$ $(n=0,1,\ldots)$, $0 \leqslant \Theta \leqslant \frac{1}{(2p-1)(2q-1)}$ Konvergenzfaktoren der $\mathfrak{E}^p$ und $\mathfrak{E}^q$ sind $(p, q > 1)$.

Staatsuniversität zu Tartu

Eingegangen
am 24 April 1961