EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. X KÖIDE
FÜÜSIKALIS-MATEMAATILISTE JA TEHNILISTE TEADUSTE SEERIA. 1961, NR. 2

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ X
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК, 1961, № 2

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОЛЬКЕ

А. ХУМАЛ,
академик Академии наук Эстонской ССР

На плоскости даны четыре точки, находящиеся не на одной прямой. Считая их проекциями вершин некоторого прямоугольного равнобедренного тетраэдра, найти направление лучей проекции и положение тетраэдра относительно этой плоскости. Такова задача Польке в ее первоначальном виде (в параллельной проекции). Решение задачи, изложенное автором в недавно опубликованной статье*, сводится к отысканию эллипса, огибающего снаружи три данных концентрических эллипса. Полученная для этого система уравнений, однако, определяет не один, а два эллипса, второй из которых огибает данные эллипсы изнутри. Возникает, конечно, вопрос, возможно ли составить систему уравнений так, чтобы она определяла только искомый эллипс. Если это возможно, то решение задачи должно значительно упроститься.

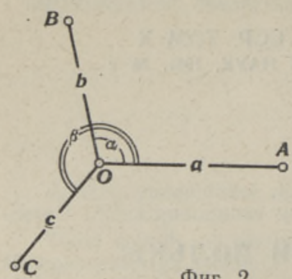
Как будет показано ниже, на самом деле возможно получить систему линейных уравнений, если при решении задачи не ограничиваться общими геометрическими соображениями, а сами конструкции, которыми она решается в начертательной геометрии, реализовать соответствующими операциями аналитической геометрии.

Шаровая поверхность, радиусами которой являются взаимно перпендикулярные ребра тетраэдра, пересекается с плоскостями трех взаимно перпендикулярных граней по окружностям, проекции которых довольно просто определены данными задачи; по этим проекциям определяется и контур проекции шара. Как известно, контур состоит из следов тех лучей проекции, которые являются касательными шаровой поверхности и, следовательно, образуют цилиндрическую поверхность, огибающую все те касательные плоскости шаровой поверхности, которые состоят из лучей проекции.


Фиг. 1.

Контур проекции шара можно найти по точкам касания окружностей с этой цилиндрической поверхностью (фиг. 1). А для таких точек характерно следующее: касательные плоскости шаровой поверхности, взятые во всех точках одной из рассматриваемых окружностей, параллельны тому ребру тетраэдра, которое перпендикулярно к плоскости окружности; следовательно, огибающая их цилиндрическая поверхность состоит из параллельных тому же ребру касательных шаровой поверхности; контуром проекции такой цилиндрической поверх-

* См. № 4 этого журнала за 1960 г., стр. 291—294.



Фиг. 2.

ности будет пара прямых, которые параллельны проекции этого ребра, являясь касательными как проекции рассматриваемой окружности, так и контура проекции шара. Ведь такие прямые оказываются следами тех касательных плоскостей шаровой поверхности, которые составлены из лучей проекции и имеют точку касания на рассмотренной окружности.

Пусть даны точки O, A, B и C, из которых O считается проекцией общей вершины взаимно перпендикулярных (и равных по длине) ребер тетраэдра, а A, B и C — проекциями остальных его вершин (фиг. 2). Если прямая OA берется за ось абсцисс и точка O за начало координат, то проекциями взятых окружностей являются * эллипсы

$$x^2-2xy\operatorname{ctg}\alpha+\left(\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{a^2}{b^2\sin^2\alpha}\right)y^2=a^2,$$

$$x^2-2xy\operatorname{ctg}\beta+\left(\operatorname{ctg}^2\beta+\frac{a^2}{c^2\sin^2\beta}\right)y^2=a^2,$$

$$(b^2\sin^2\alpha+c^2\sin^2\beta)x^2-2(b^2\sin\alpha\cos\alpha+c^2\sin\beta\cos\beta)xy+$$
$$+(b^2\cos^2\alpha+c^2\cos^2\beta)y^2=b^2c^2\sin^2(\beta-\alpha),$$

из которых первый проходит через точки A и B, второй — через A и C, и третий — через B и C. Контур проекции шара, согласно вышеизложенному, есть концентричный с ними эллипс, проходящий через те точки первого эллипса, где касательная параллельна прямой OC, те точки второго, где касательная параллельна OB, и те точки третьего, где касательная параллельна OA, причем все эти касательные являются и его касательными.

Как известно, кривая $gx^2+2hxy+ky^2=N$ имеет в своей точке (X, Y) касательную $(gX+hY)x+(hX+kY)y=N$, и последняя параллельна прямой $x\sin\gamma-y\cos\gamma=0$ при условии $(gX+hY)\cos\gamma+$ $+(hX+kY)\sin\gamma=0$. В частности та точка (X, Y), где касательная параллельна оси абсцисс, определена условием $gX+hY=0$ или $X=-\frac{h}{g}Y$, так что из уравнения $gX^2+2hXY+kY^2=N$ (которое в данном случае $hXY+kY^2=N$) следует: $Y^2=\frac{gN}{gk-h^2}$.

Итак, первый эллипс имеет параллельную прямой OC касательную в точке (X, Y), где

$$(X-Y\operatorname{ctg}\alpha)\cos\beta+\left[-X\operatorname{ctg}\alpha+\left(\operatorname{ctg}^2\alpha+\frac{a^2}{b^2\sin^2\alpha}\right)Y\right]\sin\beta=0;$$

из этого условия и уравнения эллипса вытекает, что такой точкой является **

$$\left(\frac{a^2\sin\beta+b^2\cos\alpha\sin(\beta-\alpha)}{\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\sin^2(\beta-\alpha)}},\quad \frac{b^2\sin\alpha\sin(\beta-\alpha)}{\sqrt{a^2\sin^2\beta+b^2\sin^2(\beta-\alpha)}}\right).$$

---

* См. стр. 292 цитированной статьи.

** Получаемая другая точка симметрична ей относительно начала координат; достаточно учитывать в дальнейшем лишь одну из них, поскольку будут рассматриваться только симметричные относительно начала координат фигуры.

Таким же образом следует, что параллельная прямой OB касательная второго эллипса получается в его точке

$$\left(\frac{a^2 \sin\alpha - c^2 \cos\beta \sin(\beta-\alpha)}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + c^2 \sin^2(\beta-\alpha)}},\quad \frac{-c^2 \sin\beta \sin(\beta-\alpha)}{\sqrt{a^2 \sin^2\alpha + c^2 \sin^2(\beta-\alpha)}}\right).$$

И, наконец, третий эллипс имеет параллельную оси абсцисс касательную в точке

$$\left(\frac{b^2 \sin\alpha \cos\alpha + c^2 \sin\beta \cos\beta}{\sqrt{b^2 \sin^2\alpha + c^2 \sin^2\beta}},\quad \sqrt{b^2 \sin^2\alpha + c^2 \sin^2\beta}\right).$$

Контуром проекции шара является, как известно, кривая $gx^2 + 2hxy + ky^2 = 1$, проходящая через полученные три точки и имеющая там общие с эллипсами касательные. Таким образом, для выявления искомых g, h и k можно написать шесть линейных уравнений. Наиболее простыми из них оказываются: уравнение, которое констатирует, что кривая имеет в третьей точке параллельную оси абсцисс касательную, —

$$\text{(I)}\qquad (b^2 \sin\alpha \cos\alpha + c^2 \sin\beta \cos\beta)g + (b^2 \sin^2\alpha + c^2 \sin^2\beta)h = 0,$$

и условие, что та же точка находится на кривой, —

$$\text{(II)}\qquad (b^2 \sin\alpha \cos\alpha + c^2 \sin\beta \cos\beta)h + (b^2 \sin^2\alpha + c^2 \sin^2\beta)k = 1.$$

Третьим уравнениеи (явно независимым от этих двух) может служить, например, требование, чтобы кривая имела в первой точке параллельную прямой OC касательную, —

$$\text{(III)}\qquad [a^2 \sin\beta \cos\beta + b^2 \cos\alpha \cos\beta \sin(\beta-\alpha)]g +$$
$$+ [a^2 \sin^2\beta + b^2 \sin(\alpha+\beta) \sin(\beta-\alpha)]h + [b^2 \sin\alpha \sin\beta \sin(\beta-\alpha)]k = 0.$$

Путем прямой проверки можно установить, что остальные три уравнения (здесь не приведенные) являются их следствиями.*

Если с помощью первого уравнения элиминировать g из третьего уравнения, то получается

$$(a^2 + b^2 \cos^2\alpha + c^2 \cos^2\beta)h + (b^2 \sin\alpha \cos\alpha + c^2 \sin\beta \cos\beta)k = 0.$$

Это, взятое вместе со вторым уравнением, приводит к заключению, что

$$h = -\frac{b^2 \sin\alpha \cos\alpha + c^2 \sin\beta \cos\beta}{a^2b^2 \sin^2\alpha + a^2c^2 \sin^2\beta + b^2c^2 \sin^2(\beta-\alpha)},$$

$$k = \frac{a^2 + b^2 \cos^2\alpha + c^2 \cos^2\beta}{a^2b^2 \sin^2\alpha + a^2c^2 \sin^2\beta + b^2c^2 \sin^2(\beta-\alpha)},$$

а затем из первого уравнения следует, что

$$g = \frac{b^2 \sin^2\alpha + c^2 \sin^2\beta}{a^2b^2 \sin^2\alpha + a^2c^2 \sin^2\beta + b^2c^2 \sin^2(\beta-\alpha)}.$$

---

* Уравнение, согласно которому кривая имеет во второй точке параллельную прямой OB касательную, оказывается следствием первого и третьего уравнений, а уравнения, констатирующие, что кривая проходит через первую и вторую точки, оказываются следствиями системы написанных трех уравнений.

Таким образом, доказано (в параллельной проекции) следующее утверждение: если данные проекции трех взаимно перпендикулярных радиусов некоторого шара имеют длины, соответственно, a, b, c, составляя (первая со второй и третьей) углы α, β, то контуром проекции шара является

$$(b^2 \sin^2 \alpha + c^2 \sin^2 \beta) x^2 - 2(b^2 \sin \alpha \cos \alpha + c^2 \sin \beta \cos \beta) xy +$$
$$+ (a^2 + b^2 \cos^2 \alpha + c^2 \cos^2 \beta) y^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha + a^2 c^2 \sin^2 \beta + b^2 c^2 \sin^2 (\beta - \alpha)$$

(при условии, что проекция первого радиуса считается осью абсцисс и проекция центра шара — началом координат).

В заключение остается отметить, что для величин φ и τ, характеризующих направление лучей проекции (φ есть угол между прямой OA и проекцией нормали чертежной плоскости, а τ — тангенс угла отклонения лучей проекции от нормали), получаются довольно простые формулы:

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{a^2 + b^2 \cos 2\alpha + c^2 \cos 2\beta - Q}{b^2 \sin 2\alpha + c^2 \sin 2\beta},$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2Q}{a^2 + b^2 + c^2 - Q}},$$

причем

$$Q = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2 b^2 \cos 2\alpha + 2a^2 c^2 \cos 2\beta + 2b^2 c^2 \cos 2(\beta - \alpha)}.$$

Что касается радиуса шара, то он имеет длину

$$\sqrt{\frac{2[a^2 b^2 \sin^2 \alpha + a^2 c^2 \sin^2 \beta + b^2 c^2 \sin^2 (\beta - \alpha)]}{a^2 + b^2 + c^2 + Q}}.$$

Поступила в редакцию
29. III 1961

POHLKE ÜLESANDE ANALÜÜTILINE LAHENDUS

A. Humal,
Eesti NSV Teaduste Akadeemia akadeemik

Resümee

Kujutavas geomeetrias lahendatakse Pohlke ülesanne teatavasti mõningate konstruktsioonidega. Kui samad konstruktsioonid üle kanda analüütilisse geomeetriasse, siis saadakse lineaarne võrrandisüsteem, millest võib vajalikele suurustele tuletada lihtsad valemid.

Peamiseks tulemuseks on järgmine paralleelprojektsiooni teooriasse kuuluv teoreem: kui kera mingisugused kolm üksteisega risti olevat raadiust esinevad projektsioonis antud pikkustes a, b, c ja moodustavad (esimene teise ja kolmandaga) antud nurgad α, β, siis kera projektsiooni piirjoon on

$$(b^2 \sin^2 \alpha + c^2 \sin^2 \beta) x^2 - 2(b^2 \sin \alpha \cos \alpha + c^2 \sin \beta \cos \beta) xy +$$
$$+ (a^2 + b^2 \cos^2 \alpha + c^2 \cos^2 \beta) y^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha + a^2 c^2 \sin^2 \beta + b^2 c^2 \sin^2 (\beta - \alpha)$$

(eeldusel, et esimese raadiuse projektsioon võetakse abstsissteljeks).

Saabus toimetusse
29. III 1961

EINE ANALYTISCHE LÖSUNG DER POHLKESCHEN AUFGABE

A. Humal,

Mitglied der Akademie der Wissenschaften der Estnischen SSR

Zusammenfassung

Die Aufgabe löst man bekanntlich in der darstellenden Geometrie durch gewisse Konstruktionen. Werden dieselben Konstruktionen in die analytische Geometrie übertragen, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, woraus einfache Formeln für die erforderlichen Grössen abgeleitet werden können.

Das Hauptergebnis ist der folgende, zur Theorie der Parallelprojektion gehörende Satz: Wenn irgendwelche drei aufeinander senkrechte Radien einer Kugel in einer Projektion in den gegebenen Längen a, b, c und unter gegebenen Winkeln α, β zueinander (der erste zu dem zweiten und dem dritten) auftreten, so hat die Projektion der Kugel den Umriss

$$(b^2 \sin^2 \alpha + c^2 \sin^2 \beta) x^2 - 2(b^2 \sin \alpha \cos \alpha + c^2 \sin \beta \cos \beta) xy +$$
$$+ (a^2 + b^2 \cos^2 \alpha + c^2 \cos^2 \beta) y^2 = a^2 b^2 \sin^2 \alpha + a^2 c^2 \sin^2 \beta + b^2 c^2 \sin^2 (\beta - \alpha)$$

(vorausgesetzt, dass man die Projektion des ersten Radius als Abszissenachse verwendet).

Eingegangen
am 29. März 1961