EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1966, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1966, № 1

П. КАРД

АМПЛИТУДНО-ФАЗОВАЯ АХРОМАТИЗАЦИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫХ ЗЕРКАЛ

Излагается простой метод синтеза многослойных диэлектрических полупрозрачных зеркал (светоделителей), комплексный амплитудный коэффициент отражения которых слабо зависит от длины волны в заданном спектральном интервале.

Введение

Задача синтеза ахроматических диэлектрических интерференционных светоделителей уже рассматривалась несколькими авторами [1–4]. Под ахроматизмом в этих работах понимается требование, чтобы энергетические коэффициенты отражения R и пропускания D светоделителя были приближенно постоянны в заданном спектральном интервале. Однако, как подчеркнул недавно Книттл [5], в некоторых случаях этого недостаточно. Кроме постоянства R, нужно, чтобы комплексный амплитудный коэффициент отражения

$$r = \sqrt{R}\, e^{i\xi} \tag{1}$$

тоже слабо зависел от длины волны. Называя вещественную амплитуду $|r| = \sqrt{R}$ просто амплитудой, можем сказать, что речь в этой задаче идет об ахроматизации отражения по амплитуде и фазе.

В названной работе [5] Книттл решает эту задачу методом, сходным с развитым им ранее [3] способом одной лишь амплитудной (энергетической) ахроматизации. Обе задачи решаются им на основе соответствующих точных формул теории многослойных пленок. Вследствие значительной сложности этих формул, метод Книттла требует довольно громоздких вычислений. Поэтому, несмотря на хорошие результаты, полученные Книттлом, предпочтительным был бы более простой метод.

По мнению автора настоящей статьи, в теории синтеза светоделителей можно обойтись без сложных точных формул. Вместо них можно с успехом применить одну приближенную формулу. Ее эффективность была уже показана в задаче об энергетической ахроматизации светоделителя в предыдущей статье автора [4]. Тот же метод с небольшим изменением будет применен в настоящей статье к задаче комбинированной амплитудно-фазовой ахроматизации отражения. Как увидим ниже, фазовая ахроматизация по этому методу лишь незначительно ухудшает амплитудную ахроматизацию, так что практически качество последней остается неизменным.

В последующем изложении мы будем пользоваться в основном обозначениями статьи [4].

Метод

Итак, будем исходить из приближенной формулы

$$r = \frac{-\sum\limits_{m=0}^{N} v_m e^{-2i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m)}}{\sqrt{Q+1}}, \tag{2}$$

где

$$Q = \left|\sum_{m=0}^{N} v_m e^{-2i(\alpha_1+\alpha_2+\ldots\alpha_m)}\right|^2 \tag{3}$$

$$v_m = \frac{1}{2}\ln\frac{n_{m+1}}{n_m} \tag{4}$$

$$\alpha_m = kn_m h_m. \tag{5}$$

Падение света предполагается нормальным; $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; h_m — толщина m-го слоя; $n_0, n_1, n_2, \ldots n_{N+1}$ — показатели преломления исходной среды, N слоев и подложки.

Задача заключается в том, чтобы сделать r приближенно постоянным в заданном спектральном интервале. Пусть оптические толщины всех слоев равны

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_N \equiv \alpha, \tag{6}$$

причем в середине шкалы частот выбранного спектрального интервала слои пусть будут четвертьволновые, т. е.

$$\alpha = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Эти условия довольно обычны; в частности, они применялись ранее почти во всех задачах синтеза ахроматичных пленок [1-6]. Таким образом, проблема сводится к определению необходимых значений показателей преломления слоев.

Формулы (2) и (3) принимают теперь вид:

$$r = \frac{-\sum\limits_{m=0}^{N} v_m e^{-2im\alpha}}{\sqrt{Q+1}} \tag{8}$$

и

$$Q(\alpha) = \left|\sum_{m=0}^{N} v_m e^{-2im\alpha}\right|^2. \tag{9}$$

Из них следует, что

$$Q = \frac{R}{1-R}. \tag{10}$$

Отсюда вытекает, что в интересах амплитудной (энергетической) ахроматизации Q должно мало отклоняться от некоторой заданной величины

$$Q_0 \equiv Q\left(\frac{\pi}{2}\right). \tag{11}$$

Тогда R будет мало отклоняться от значения

$$R_{\alpha=\frac{\pi}{2}} = \frac{Q_0}{Q_0+1}. \tag{12}$$

Далее ахроматизация по фазе требует, чтобы величина

$$q \equiv \sum_{m=0}^{N} v_m e^{-2im\alpha} \tag{13}$$

тоже слабо зависела от частоты. Это значит, что величина

$$\left|\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right|^2$$

должна быть возможно мала во всем спектральном интервале. Это условие гарантирует, очевидно, не только фазовую, но и амплитудную ахроматизацию. Таким образом, в качестве критерия фазово-амплитудного ахроматизма можем написать условие

$$\overline{\left|\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right|^2} = \frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left|\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right|^2 d\alpha = \min, \tag{14}$$

где α_1, α_2 означают границы выбранного спектрального интервала.

Подставляя в формулу (14) выражение (13) для q, находим

$$\frac{1}{\alpha_2-\alpha_1}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left|\sum_{m=0}^{N} m v_m e^{-2im\alpha}\right|^2 d\alpha = \min \tag{15}$$

или

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} k m v_k v_m \overline{\cos 2(k-m)\alpha} = \min. \tag{16}$$

Выражение, стоящее в левой части этого равенства, представляет собой квадратичную форму от величин v_1, v_2, ... v_N с коэффициентами $\overline{\cos 2(k-m)\alpha}$, зависящими от спектрального интервала. Минимум этой квадратичной формы следует искать с учетом следующих двух дополнительных условий:

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_N = \frac{1}{2}\ln\frac{n_{N+1}}{n_0} = \mathrm{const} \tag{17}$$

и

$$v_0 - v_1 + - \ldots + (-1)^N v_N = \mathrm{Arsh}\sqrt{Q_0} = \mathrm{const}. \tag{18}$$

Первое из них вытекает из формулы (4), а второе нужно для того, чтобы выполнялось условие (12), так как точная формула R при $\alpha=\frac{\pi}{2}$ имеет вид

$$R_{\alpha=\frac{\pi}{2}}=\operatorname{th}^2(v_0-v_1+-\ldots+(-1)^N v_N). \tag{19}$$

После того, как квадратичная форма (16) с учетом условий (17) и (18) минимизирована и соответствующие минимуму значения v_0, v_1, ... v_N найдены, то по формуле (4) вычисляются искомые показатели преломления всех слоев.

Пример и обсуждение

Для иллюстрации описанного метода ограничимся единственным примером. Пусть $N=3$, $n_0=1$, $n_{N+1}=1{,}52$ и $Q_0=1$ (т. е. $R_{\alpha=\frac{\pi}{2}}=0{,}50$). Спектральный интервал выберем равным одной октаве:

$$\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}. \tag{20}$$

Тогда получим условие (16) в виде

$$v_1^2+4v_2^2+9v_3^2-\frac{6\sqrt{3}}{\pi}(v_1v_2+3v_2v_3)+\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}v_1v_3=\min, \tag{21}$$

а дополнительные условия будут:

$$\left.\begin{aligned} v_0+v_1+v_2+v_3&=0{,}20936\\ v_0-v_1+v_2-v_3&=0{,}88137.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Процедура минимизирования квадратичной формы приводит к системе линейных уравнений. Не останавливаясь на этом элементарном расчете, приведем только результат. Для v_0, v_1, v_2, v_3 получаются следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} v_0&=0{,}74979\\ v_1&=-0{,}25681\\ v_2&=-0{,}20443\\ v_3&=-0{,}07919.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Отсюда находим показатели преломления слоев

$$\left.\begin{aligned} n_1&=4{,}480\\ n_2&=2{,}680\\ n_3&=1{,}781.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Остается вычислить R и фазу ξ в зависимости от α. Это делается, конечно, по соответствующим точным формулам. Окончательные результаты таковы:

$$\frac{R}{D}=1{,}000-0{,}7846\cos^2\alpha+5{,}855\cos^4\alpha-6{,}026\cos^6\alpha \tag{25}$$

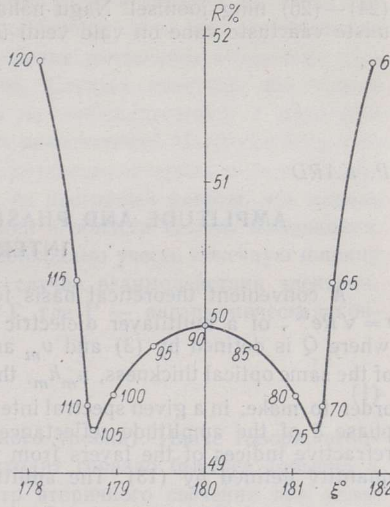
и

$$\tan \xi = \frac{\sin 2\alpha(-0{,}06087 + 0{,}3332 \cos^2 \alpha - 1{,}0010 \cos^4 \alpha)}{-1 + 0{,}5960 \cos^2 \alpha - 4{,}456 \cos^4 \alpha + 4{,}708 \cos^6 \alpha}. \tag{26}$$

График, вычисленный по этим формулам, изображен на рисунке.

Итак, мы получили действительно хорошую ахроматичность: разность между крайними значениями R едва превышает 2,5%, а разность между крайними значениями ξ меньше 4°.

Сравним изложенный метод с методом одной лишь энергетической ахроматизации, примененным в статье [4]. Разница между ними состоит только в том, что вместо минимизирования $\left|\frac{\partial q}{\partial \alpha}\right|^2$ мы там минимизировали величину $\overline{\left|\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(q e^{-2ig\alpha}\right)\right|^2}$. Добавление множителя $e^{-2ig\alpha}$ не изменяет абсолютной величины q и поэтому, нарушая фазовую ахроматизацию, не влияет на энергетическую. Цель введения этого множителя в том и состояла, чтобы путем предоставления большей свободы в изменении фазы приобрести дополнительный варьируемый аргумент g в интересах более эффективной ахроматизации амплитуды. Действительно, как показывают соответствующие расчеты, отказ от ахроматизации фазы по методу статьи [4] дает несколько лучшую амплитудную ахроматизацию. Однако разница невелика. Изложенный в настоящей статье метод дает практически столь же хорошую амплитудную ахроматизацию, как и предыдущий, но он дает также и хорошую фазовую ахроматичность. Заметим, однако, еще, что показатель преломления первого слоя, имеющий в обоих случаях особо высокие значения, без фазовой ахроматизации получается все-таки несколько меньшим. Это можно видеть из примеров, приведенных в статье [4].



Зависимость R и ξ от α. Значения α показаны возле соответствующих точек кривой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pohlack H., Die Synthese optischer Interferenzschichtsysteme mit vorgegebenen Spektraleigenschaften, Jenaer Jahrbuch, 1962, 181.
2. Pohlack H., Zur Theorie der absorptionsfreien achromatischen Lichtteilungsspiegel, Jenaer Jahrbuch, 1956, 79.
3. Knittl Z., Král M., Optica Acta, **9**, 295 (1962).
4. Кард П., Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, **12**, № 1, 3 (1963).
5. Knittl Z., J. phys., **25**, No. 1—2, 245 (1964).
6. Kard P., Loodus ja matemaatika, **1**, 67 (1959).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 17/II 1965

P. KARD

DIELEKTRILISTE INTERFERENTSPEEGLITE AKROMATISEERIMINE AMPLITUUDI JA FAASI JÄRGI

Mitmekihilise dielektrilise poolläbipaistva kelme amplituudse peegeldumiskoefitsiendi $r=\sqrt{R}e^{i\xi}$ akromatiseerimisel on sobivaks teoreetiliseks aluseks ligikaudne valem (2), kus Q on määratud valemiga (3) ning v_m ja α_m valemitega (4) ja (5). Eeldades, et kõikide kihtide optilised paksused $n_m h_m$ on võrdsed, saavad valemid (2) ja (3) lihtsama kuju (8) ja (9). Selleks et kelme amplituudne peegeldumiskoefitsient oleks nii absoluutväärtuselt $\sqrt{R}$ kui ka faasilt ξ antud spektrivahemikus $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ võimalikult konstantne, tuleb kihtide murdumisnäitajad määrata miinimumtingimusest (14), kus q tähendab valemis (13) defineeritud suurust. Seejuures tuleb arvestada lisatingimusi (17) ja (18), kus Q_0 on peegeldumiskoefitsiendi R ja läbilaskvuskoefitsiendi D suhte $\frac{R}{D}$ soovitud väärtus ning n_0, n_{N+1} on kelmet piiravate keskkondade murdumisnäitajad. Probleem taandub seega algebraliste lineaarvõrrandite süsteemi lahendamisele. Selle näitena vaadeldakse spektrivahemikus $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$ kolmekihilist peeglit, millel $Q_0=1$. Tulemus esitatakse valemites (24)—(26) ning joonisel. Nagu näha, on peegli akromaatsus võrdlemisi hea, sest R äärmiste väärtuste vahe on vaid veidi üle 2,5%, kuna ξ äärmiste väärtuste vahe ei ületa 4°.

P. KARD

AMPLITUDE AND PHASE ACHROMATIZATION OF DIELECTRIC INTERFERENCE MIRRORS

A convenient theoretical basis for the achromatization of the amplitude reflectance, $r=\sqrt{R}e^{i\xi}$, of a multilayer dielectric semireflecting film is the approximate formula (2), where Q is defined by (3) and v_m and α_m by (4) and (5). Supposing that all layers are of the same optical thickness, $n_m h_m$, the formulae (2) and (3) get simpler, (8) and (9). In order to make, in a given spectral interval $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$, both the absolute value $\sqrt{R}$ and the phase ξ of the amplitude reflectance as constant as possible, one should determine the refractive indices of the layers from the minimum condition (14), where q stands for the quantity defined by (13). The additional conditions (17) and (18) must also be taken into account. In these formulae Q_0 means the desired value of the ratio $\frac{R}{D}$ of the reflectance, R, and the transmittance, D, of the film, and n_0, n_{N+1} are the refractive indices of the bounding media. The whole problem is thus reduced to the solution of a system of linear algebraic equations. An example is given for the three-layer film with $Q_0=1$ in the spectral interval $60° \leqslant \alpha \leqslant 120°$. The results are shown in formulae (24)—(26) and in the figure. As one can see, the achromatism of the mirror is satisfactory, since the difference of the extreme values of R is only slightly more than 2.5 per cent and the difference of the extreme values of ξ does not exceed 4°.