EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XV KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1966, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XV
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1966, № 1

Т. ТОБИАС

ОБ ОДНОЙ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЕ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА ВИНЕРА С ВЕСОМ

В статье [1] В. Владимиров предлагал способ для приближенного вычисления интеграла Винера. В настоящей работе этот метод обобщается к вычислению интегралов вида $\int\limits_C \exp\{\lambda \int\limits_0^1 p(t)x^2(t)dt\}F(x)d_Wx$, где $F(x)$ — функционал, определенный на винеровском пространстве. Ограничения для константы λ и функции $p(t)$ даны ниже.

Приближенное значение интеграла ищем в виде ряда

$$\int\limits_C \exp\{\lambda \int\limits_0^1 p(t)x^2(t)dt\}F(x)d_Wx \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k F(x_k). \tag{1}$$

При этом требуем, чтобы приближенное равенство (1) дало точный результат, когда:

а) $F(x)$ — константа;

б) $F(x)$ — нечетный функционал;

в) $F(x)$ — «полином» второй степени, т. е.

$$F(x) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 x(t_1)x(t_2)d^2_{t_1,t_2}\sigma(t_1,t_2),$$

где $\sigma(t_1, t_2)$ — произвольная функция с ограниченной вариацией по обеим переменным;

г) $F(x)$ — определенный «полином» четвертой степени:

$$F(x) = \|x\|^2 \int\limits_0^1\int\limits_0^1 x(t_1)x(t_2)d^2_{t_1,t_2}\sigma(t_1,t_2) \quad \left(\|x\|^2 = \int\limits_0^1 x^2(t)dt\right).$$

Все эти условия будут удовлетворены, если

$$x_0(t) = 0, \quad x_k(t) = -x_{-k}(t), \quad a_k = a_{-k} \tag{2}$$

$$a_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \int\limits_C \exp\{\lambda \int\limits_0^1 p(t)x^2(t)dt\}d_Wx \tag{3}$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^1\int_0^1 x_k(t_1)\,x_k(t_2)\,d^2_{t_1,t_2}\sigma(t_1,t_2) =$$

$$= \int_C \exp\{\lambda \int_0^1 p(t)\,x^2(t)\,dt\} \int_0^1\int_0^1 x(t_1)\,x(t_2)\,d^2_{t_1,t_2}\sigma(t_1,t_2)\,d_W x \qquad (4)$$

$$2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \|x_k\|^2 \int_0^1\int_0^1 x_k(t_1)\,x_k(t_2)\,d^2_{t_1,t_2}\sigma(t_1,t_2) =$$

$$= \int_C \exp\{\lambda \int_0^1 p(t)\,x^2(t)\,dt\} \int_0^1\int_0^1 x(t_1)\,x(t_2)\,d^2_{t_1,t_2}\sigma(t_1,t_2)\,\|x\|^2 d_W x. \qquad (5)$$

Пусть $\sigma(s_1, s_2) = g_1(s_1)\,g_2(s_2)$, где

$$g_i(s_i) = \begin{cases} -1, & \text{если } s_i < t_i \\ 0, & \text{если } s_i \geqslant t_i \quad (i = 1, 2). \end{cases}$$

Тогда вместо (4) и (5) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k(t_1)\,x_k(t_2) = \frac{1}{2}\int_C \exp\{\lambda \int_0^1 p(t)\,x^2(t)\,dt\}\,x(t_1)\,x(t_2)\,d_W x, \qquad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \|x_k\|^2 x_k(t_1)\,x_k(t_2) = \frac{1}{2}\int_C \exp\{\lambda \int_0^1 p(t)\,x^2(t)\,dt\}\|x\|^2 x(t_1)\,x(t_2)\,d_W x. \qquad (7)$$

Если ряды в соотношениях (6) и (7) сходятся равномерно, то верно и обратное: из условий (6) и (7) можно вывести условия (4) и (5) при любой $\sigma(t_1, t_2)$.

Вычислим интегралы в правых частях равенств (6) и (7). При этом воспользуемся результатами статьи [3].

Рассмотрим краевую задачу

$$f''(t) + \lambda p(t)\,f(t) = 0 \qquad (8)$$

$$f(0) = f'(1) = 0, \qquad (9)$$

где непрерывная функция $p(t) > 0$ на отрезке [0, 1]. Через λ_0 обозначим наименьшее собственное значение задачи (8), (9), которое непременно существует. Пусть $-\infty < \lambda < \lambda_0$. Через $f_\lambda(t)$ обозначим любое нетривиальное решение уравнения (8) при краевом условии

$$f'_\lambda(1) = 0. \qquad (10)$$

Отметим, что $f_\lambda(t) \neq 0$ на отрезке [0, 1]. В работе [3] доказывается, что при этих условиях

$$\int_C \exp\{\lambda \int_0^1 p(t)\,x^2(t)\,dt\}\,d_W x = \left\{\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right\}^{1/2} \int_C F[y(\cdot) + f_\lambda(\cdot)\int_0^{(\cdot)} \frac{f'_\lambda(s)}{[f_\lambda(s)]^2}\,y(s)\,ds]\,d_W y. \qquad (11)$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. *Пусть $\sigma_i(t)$ — непрерывная справа функция с ограниченной вариацией и пусть $\sigma_i(1)=0 \quad (i=1, \ldots, 2n)$. Тогда*

$$\int_C \exp\{\lambda \int_0^1 p(t)x^2(t)\,dt\} \int_0^1 x(t)\,d\sigma_1(t) \ldots \int_0^1 x(t)\,d\sigma_{2n}(t)\,d_W x =$$

$$=\left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2} \frac{1}{2^n} \sum \int_0^1 \alpha_{i_1}(t)\,\alpha_{i_2}(t)\,dt \ldots \int_0^1 \alpha_{i_{2n-1}}(t)\,\alpha_{i_{2n}}(t)\,dt, \quad (12)$$

где

$$\alpha_i(t)=\frac{1}{f_\lambda(t)} \int_t^1 f_\lambda(s)\,d\sigma_i(s),$$

а суммирование распространено на всевозможные различные разбиения $2n$ индексов $i_1, \ldots, i_{2n}$ на пары.

По формуле (11) имеем

$$\int_C \exp\{\lambda \int_0^1 p(t)x^2(t)\,dt\} \int_0^1 x(t)\,d\sigma_1(t) \ldots \int_0^1 x(t)\,d\sigma_{2n}(t)\,d_W x =$$

$$=\left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2} \int_C \int_0^1 [y(t)+f_\lambda(t) \int_0^t \frac{f_\lambda'(s)}{[f_\lambda(s)]^2}\,y(s)\,ds]\,d\sigma_1(t) \ldots$$

$$\int_0^1 [y(t)+f_\lambda(t) \int_0^t \frac{f_\lambda'(s)}{[f_\lambda(s)]^2}\,y(s)\,ds]\,d\sigma_{2n}(t)\,d_W y. \quad (13)$$

Преобразуем выражение $\int_0^1 [y(t)+f_\lambda(t) \int_0^t \frac{f_\lambda'(s)}{[f_\lambda(s)]^2}\,y(s)\,ds]\,d\sigma_i(t)$.

$$\int_0^1 [y(t)+f_\lambda(t) \int_0^t \frac{f_\lambda'(s)}{[f_\lambda(s)]^2}\,y(s)\,ds]\,d\sigma_i(t) = \int_0^1 y(t)\,d\sigma_i(t) +$$

$$+\int_0^1 f_\lambda(t) \left\{-\frac{y(s)}{f_\lambda(s)}\Big|_0^t + \int_0^t \frac{dy(s)}{f_\lambda(s)}\right\} d\sigma_i(t) = \int_0^1 f_\lambda(t) \int_0^t \frac{dy(s)}{f_\lambda(s)}\,d\sigma_i(t) =$$

$$= f_\lambda(t) \int_0^t \frac{dy(s)}{f_\lambda(s)}\,\sigma_i(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sigma_i(t)\,d\left[f_\lambda(t) \int_0^t \frac{dy(s)}{f_\lambda(s)}\right] =$$

$$= -\int_0^1 \sigma_i(t) f_\lambda'(t) \int_0^t \frac{dy(s)}{f_\lambda(s)}\,dt - \int_0^1 \sigma_i(t)\,dy(t) = \int_0^t \frac{dy(s)}{f_\lambda(s)} \int_t^1 \sigma_i(s) f_\lambda'(s)\,ds\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \left[\int_t^1 \sigma_i(s) f_\lambda'(s)\,ds\right] \frac{dy(t)}{f_\lambda(t)} - \int_0^1 \sigma_i(t)\,dy(t) =$$

$$=-\int_0^1\left[\frac{1}{f_\lambda(t)}\int_t^1 \sigma_i(s) f_\lambda'(s)\,ds+\sigma_i(t)\right]dy(t)=$$

$$=-\int_0^1\left\{\frac{1}{f_\lambda(t)}\left[f_\lambda(s)\sigma_i(s)\Big|_t^1-\int_t^1 f_\lambda(s)\,d\sigma_i(s)\right]+\sigma_i(t)\right\}dy(t)=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{f_\lambda(t)}\int_t^1 f_\lambda(s)\,d\sigma_i(s)\,dy(t).$$

Остальное ясно: используем в формуле (13) правило интегрирования произведения линейных функционалов (см. [2]). Полученный результат применим к вычислению интегралов в равенствах (6) и (7). Пусть

$$\sigma_{t_1}(s)=\begin{cases}-1, & s<t_1\\ 0, & s\geqslant t_1\end{cases}\qquad \sigma_{t_2}(s)=\begin{cases}-1, & s<t_2\\ 0, & s\geqslant t_2.\end{cases}$$

Тогда $x(t_i)=\int_0^1 x(s)\,d\sigma_{t_i}(s)\qquad (i=1,\ 2)$

и

$$\alpha_{t_i}(t)=\frac{1}{f_\lambda(t)}\int_t^1 f_\lambda(s)\,d\sigma_{t_i}(s)=\begin{cases}0 & ,\quad t_i\leqslant t\\ \dfrac{f_\lambda(t_i)}{f_\lambda(t)} & ,\quad t<t_i.\end{cases}$$

Теперь из (12) ясно, что

$$\int_C \exp\{\lambda\int_0^1 p(t)x^2(t)\,dt\}x(t_1)x(t_2)\,d_W x=\left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2}\frac{1}{2}\int_0^1 \alpha_{t_1}(t)\,\alpha_{t_2}(t)\,dt=$$

$$=\left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2}\frac{1}{2}f_\lambda(t_1)f_\lambda(t_2)\int_0^{\min(t_1,t_2)}\frac{dt}{f_\lambda^2(t)}.\tag{14}$$

Аналогично вычислим и интеграл в равенстве (7):

$$\int_C \exp\{\lambda\int_0^1 p(t)x^2(t)\,dt\}\int_0^1 x^2(s)\,ds\,x(t_1)x(t_2)\,d_W x=$$

$$=\int_0^1 ds\int_C \exp\{\lambda\int_0^1 p(t)x^2(t)\,dt\}\times$$

$$\times\int_0^1 x(t)\,d\sigma_s(t)\int_0^1 x(t)\,d\sigma_s(t)\int_0^1 x(t)\,d\sigma_{t_1}(t)\int_0^1 x(t)\,d\sigma_{t_2}(t)\,d_W x=$$

$$= \left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2} \frac{1}{4} \int_0^1 ds \Big[\int_0^1 \alpha_s(t)\, \alpha_s(t)\, dt \int_0^1 \alpha_{t_1}(t)\, \alpha_{t_2}(t)\, dt +$$

$$+ 2 \int_0^1 \alpha_s(t)\, \alpha_{t_1}(t)\, dt \int_0^1 \alpha_s(t)\, \alpha_{t_2}(t)\, dt \Big] =$$

$$= \left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2} \frac{1}{4} \int_0^1 \Big[f_\lambda^2(s) \int_0^s \frac{dt}{f_\lambda^2(t)}\, f_\lambda(t_1)\, f_\lambda(t_2) \int_0^{\min(t_1, t_2)} \frac{dt}{f_\lambda^2(t)} +$$

$$+ 2 f_\lambda(s) f_\lambda(t_1) \int_0^{\min(s, t_1)} \frac{dt}{f_\lambda^2(t)}\, f_\lambda(s) f_\lambda(t_2) \int_0^{\min(s, t_2)} \frac{dt}{f_\lambda^2(t)} \Big] ds$$

(порядок интегрирования можно было переменить в силу теоремы Фубини).

Обозначим

$$\frac{1}{4} f_\lambda(t_1)\, f_\lambda(t_2) \int_0^{\min(t_1, t_2)} \frac{dt}{f_\lambda^2(t)} = b_\lambda(t_1, t_2).$$

Вместо уравнений (6) и (7) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k(t_1)\, x_k(t_2) = \left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2} b_\lambda(t_1, t_2) \tag{15}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \|x_k\|^2 x_k(t_1)\, x_k(t_2) =$$

$$= \left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2} \Big\{ 2 \int_0^1 b_\lambda(s, s)\, ds\, b_\lambda(t_1, t_2) + 4 \int_0^1 b_\lambda(t_1, s)\, b_\lambda(s, t_2)\, ds \Big\}. \tag{16}$$

Уравнение (15) с неизвестными a_k и $x_k(t)$ рассмотрим как билинейное разложение симметрического ядра $b_\lambda(t_1, t_2)$. Разложение будет удовлетворено, если

$$a_k = \left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2} \frac{1}{c_k^2 \mu_k} \qquad \text{и} \qquad x_k(t) = c_k y_k(t), \tag{17}$$

где μ_k — собственные числа и $y_k(t)$ — соответствующие собственные функции однородного интегрального уравнения

$$y_k(t) = \mu_k \int_0^1 b_\lambda(t, s)\, y_k(s)\, ds. \tag{18}$$

Константы c_k используем для удовлетворения уравнения (16). Так как

$$\int_0^1 b_\lambda(t_1, s)\, b_\lambda(s, t_2)\, ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k(t_1)\, y_k(t_2)}{\mu_k^2},$$

то из (16) получим

$$\left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_k^2-2\int_0^1 b_\lambda(s,s)\,ds-\frac{4}{\mu_k}\right]\frac{y_k(t_1)\,y_k(t_2)}{\mu_k}=0,$$

откуда видно, что можно принять

$$c_k=\left[2\int_0^1 b_\lambda(s,s)\,ds+\frac{4}{\mu_k}\right]^{1/2}=\left[\frac{1}{2}\int_0^1 f_\lambda^2(s)\int_0^s\frac{dt}{f_\lambda^2(t)}\,ds+\frac{4}{\mu_k}\right]^{1/2}. \tag{19}$$

Лемма 1. *Собственные значения ядра $b_\lambda(s,t)$ положительные.*

Ядро $b_\lambda(s,t)$ непрерывное. Докажем, что оно положительное. При любой непрерывной функции $h(t)$ $(t\in[0,1])$ имеем

$$\int_0^1\int_0^1 b_\lambda(s,t)\,h(s)\,h(t)\,dsdt=$$

$$\int_0^1\int_0^1\frac{1}{2}\left(\frac{f_\lambda(0)}{f_\lambda(1)}\right)^{1/2}\int_C\exp\Big\{\lambda\int_0^1 p(t)\,x^2(t)\,dt\Big\}x(s)\,x(t)\,d_W x\,h(s)\,h(t)\,dsdt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{f_\lambda(0)}{f_\lambda(1)}\right)^{1/2}\int_C\exp\Big\{\lambda\int_0^1 p(t)\,x^2(t)\,dt\Big\}\left[\int_0^1 x(s)\,h(s)\,ds\right]^2 d_W x\geqslant 0.$$

Но положительность ядра равносильна положительности всех собственных значений этого ядра. Лемма доказана.

В силу теоремы Мерсера билинейный ряд ядра $b_\lambda(s,t)$ сходится равномерно; это оправдает переход от (6) и (7) к (4) и (5).

Ясно также, что в силу $\mu_k>0$ всегда возможно вычислить c_k по формуле (19).

Иногда удобнее найти собственные значения и собственные функции из краевой задачи.

Лемма 2. *Функция* $G(s,t)=f_\lambda(s)\,f_\lambda(t)\displaystyle\int_0^{\min(s,t)}\frac{du}{f_\lambda^2(u)}$ *является функцией Грина краевой задачи* (8), (9).

Проверим это непосредственно.

1° $G(s,t)$ непрерывна в квадрате $0\leqslant s,\ t\leqslant 1$.

2° $G(s,t)$ как функция переменной s имеет при $0\leqslant s<t$ и $t<s\leqslant 1$ непрерывные производные до второго порядка.

$$G'(s,t)=\begin{cases} f_\lambda'(s)\;f_\lambda(t)\displaystyle\int_0^s\frac{du}{f_\lambda^2(s)}+\frac{f_\lambda(t)}{f_\lambda(s)}, & s<t\\[2ex] f_\lambda'(s)\;f_\lambda(t)\displaystyle\int_0^t\frac{du}{f_\lambda^2(u)}, & t<s.\end{cases}$$

$$G''(s,t)=\begin{cases} f''_\lambda(s)\ f_\lambda(t)\displaystyle\int_0^s \frac{du}{f_\lambda^2(u)}, & s<t\\ f''_\lambda(s)\ f_\lambda(t)\displaystyle\int_0^t \frac{du}{f_\lambda^2(u)}, & t<s.\end{cases}$$

$G(s,t)$ удовлетворяет как функция от s уравнению (8). Пусть, например, $s<t$, тогда

$$f''_\lambda(s)f_\lambda(t)\int_0^s \frac{du}{f_\lambda^2(u)}+\lambda p(s)f_\lambda(s)\,f_\lambda(t)\int_0^s \frac{du}{f_\lambda^2(u)}=$$

$$=f_\lambda(t)\int_0^s \frac{du}{f_\lambda^2(u)}\,[f''_\lambda(s)+\lambda p(s)f_\lambda(s)]=0.$$

3° $G(s,t)$ как функция переменной s удовлетворяет краевым условиям (9):

$$G(0,t)=0,\quad G'(1,t)=f'_\lambda(1)f_\lambda(t)\int_0^t \frac{du}{f_\lambda^2(u)}=0$$

в силу условия (10).

4° $G'(t+0,t)-G'(t-0,t)=-\dfrac{f_\lambda(t)}{f_\lambda(t)}=-1,$

$G'(t,t+0)-G'(t,t-0)=1.$

Лемма доказана.

Теперь ясно, что собственные значения и собственные функции интегрального уравнения (18) являются собственными значениями и собственными функциями краевой задачи

$$y''_k(t)=-(\lambda p(t)+\frac{\mu_k}{4})\,y_k(t) \tag{20}$$

$$y_k(0)=y'_k(1)=0. \tag{21}$$

Итак, пусть λ_0 является наименьшим собственным значением краевой задачи (8), (9). Пусть $p(t)>0$ — непрерывная функция и пусть $\lambda<\lambda_0$. Тогда коэффициенты и узлы приближенной формулы (1) определяются по формулам (17), где μ_k и $y_k(t)$ — собственные значения и соответствующие нормированные собственные функции интегрального уравнения (18) [или краевой задачи (20), (21)]. В этих формулах $f_\lambda(t)$ — любое нетривиальное решение уравнения (8) при краевом условии (10) (при $\lambda<\lambda_0$), а c_k вычисляются по формуле (19). После всех этих вычислений определяется a_0 по формуле (3):

$$a_0=\left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2}-2\sum_{k=1}^{\infty}a_k.$$

Замечание 1. Пусть $\lambda = 0$. Тогда $f_\lambda(t) = c$,

$$y_k(t) = \sqrt{2}\sin\frac{2k-1}{2}\pi t, \quad \mu_k = \pi^2(2k-1)^2,$$

$$c_k = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}}, \quad a_0 = 1 - 8\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(2k-1)^2+16} =$$

$$= 1 - \frac{\text{th}2}{2} \approx 0{,}517986,$$

т. е. мы получили результаты В. Владимирова [1]. Приведенное в этой работе значение $a_0 \approx 0{,}51860$ кажется нам опечаткой.

Замечание 2. В статье [3] указано, что множитель $\left(\frac{f_\lambda(1)}{f_\lambda(0)}\right)^{1/2}$ в приведенных выше формулах можно заменить множителем

$$\left(\frac{f_2'(\xi)f_1(\xi) - f_1'(\xi)f_2(\xi)}{f_2'(1)f_1(0) - f_1'(1)f_2(0)}\right)^{1/2},$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — любые независимые решения уравнения (8), а ξ — произвольная точка отрезка $[0, 1]$.

Рассмотрим случай $p(t) \equiv 1$. Тогда вместо (8), (9) имеем краевую задачу

$$f''(t) + \lambda f(t) = 0 \tag{22}$$

$$f(0) = f'(1) = 0, \tag{23}$$

наименьшее собственное число которой $\lambda_0 = \frac{\pi^2}{4}$. Нетривиальное решение (22), удовлетворяющее условию (10), будет

$$f_\lambda(t) = \cos\sqrt{\lambda}\,(t-1).$$

Собственные значения и собственные функции уравнения

$$y''(t) = -\left(\lambda + \frac{\mu}{4}\right)y(t)$$

$$y(0) = y'(1) = 0$$

легко найти:

$$y_k(t) = \sqrt{2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}t, \quad \mu_k = (2k-1)^2\pi^2 - 4\lambda.$$

Так как

$$\frac{1}{2}\int_0^1 f_\lambda^2(s)\int_0^s\frac{dt}{f_\lambda^2(t)}\,ds = \frac{1}{2}\int_0^1\cos^2\sqrt{\lambda}(s-1)\int_0^s\frac{dt}{\cos^2\sqrt{\lambda}(t-1)}\,ds = \frac{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\lambda}},$$

то

$$c_k = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\lambda}} + \frac{4}{(2k-1)^2\pi^2 - 4\lambda}}$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\cos\sqrt{\lambda}}}\;\frac{4}{\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}[(2k-1)^2\pi^2 - 4\lambda] + 16}$$

$$a_0=\frac{1}{\sqrt{\cos\sqrt{\lambda}}}\left[1-\frac{8\sqrt{\lambda}}{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\pi^2-\left(4\lambda-\frac{16\sqrt{\lambda}}{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}}\right)}\right]$$

и

$$x_k(t)=\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}}{4\sqrt{\lambda}}+\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2-4\lambda}}\,\sqrt{2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}t.$$

Используя разложения

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2+z^2}=\frac{\pi\operatorname{th}\frac{\pi}{2}z}{4z}\quad\text{и}\quad\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2-z^2}=\frac{\pi\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z}{4z},$$

легко вычислим

$$a_0=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\cos\sqrt{\lambda}}}\left[1-\dfrac{\sqrt{\lambda}\operatorname{th}\sqrt{-\alpha}}{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{-\alpha}}\right], & \text{если}\quad\alpha\leqslant 0\\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\cos\sqrt{\lambda}}}\left[1-\dfrac{\sqrt{\lambda}\operatorname{tg}\sqrt{\alpha}}{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}\sqrt{\alpha}}\right], & \text{если}\quad\alpha\geqslant 0,\end{cases}$$

где

$$\alpha=\frac{\lambda\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}-4\sqrt{\lambda}}{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}}.$$

Пример 1. Рассмотрим интеграл

$$I=\int_C\exp\left\{\int_0^1 x^2(t)\,dt\right\}\left[\int_0^1 x^2(t)\,dt\right]^2 d_W x. \tag{24}$$

Точное значение интеграла получим, продифференцировав обе части равенства

$$\int_C\exp\{\lambda\int_0^1 x^2(t)\,dt\}d_W x=\sqrt{\sec\sqrt{\lambda}},\quad\lambda<\frac{\pi^2}{4}$$

два раза по λ:

$$\int_C\left[\int_0^1 x^2(t)\,dt\right]^2\exp\{\lambda\int_0^1 x^2(t)\,dt\}d_W x=(\sqrt{\sec\sqrt{\lambda}})''=$$

$$=\frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{\sec\sqrt{\lambda}}}{\lambda}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\sqrt{\lambda}+\sec^2\sqrt{\lambda}-\frac{\operatorname{tg}\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

(Дифференцирование по параметру под знаком интеграла Винера законно.)

Поэтому

$$I=\frac{1}{8}\sqrt{\sec 1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 1+\sec^2 1-\operatorname{tg} 1\right)\approx 0{,}353864.$$

Тот же результат получим при помощи формулы (1):

$$I = 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Big[\int_0^1 x_k^2(t)\,dt\Big]^2 = 2\sqrt{\sec 1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_k^2}{\mu_k} =$$

$$= 2\sqrt{\sec 1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{tg} 1\,[(2k-1)^2\pi^2-4]+16}{4[(2k-1)^2\pi^2-4]^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sec 1}\operatorname{tg} 1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\pi^2-4} + 8\sqrt{\sec 1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[(2k-1)^2\pi^2-4]^2} =$$

$$= \frac{1}{16}\sqrt{\sec 1}\operatorname{tg}^2 1 + \frac{\sqrt{\sec 1}}{2\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg[\frac{1}{\left(2k-1-\frac{2}{\pi}\right)^2} +$$

$$+ \frac{1}{\left(2k-1+\frac{2}{\pi}\right)^2} - \frac{2}{\left(2k-1-\frac{2}{\pi}\right)\left(2k-1+\frac{2}{\pi}\right)}\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{\sec 1}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 1 + \sec^2 1 - \operatorname{tg} 1\right).$$

Применим к интегралу (24) формулу В. Владимирова

$$\int_C F(x)\,d_W x \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k F(x_k),$$

где

$$x_0(t) = 0, \quad x_k(t) = -x_{-k}(t) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}}\,\sqrt{2}\sin\frac{2k-1}{2}\pi t,$$

$$a_k = a_{-k} = \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2+16}, \quad a_0 = 1 - \frac{\operatorname{th} 2}{2}.$$

Это дает

$$I \approx 2\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\int_0^1 x_k^2(t)dt}\int_0^1 x_k^2(t)\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}e^{\frac{1}{4}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\left[1+\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\right]e^{\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}} \approx 0{,}270.$$

Проверим еще формулу Симпсона, найденную Р. Камероном [4]:

$$\int_C F(x)\,d_W x \approx \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} F[\Phi(u,\cdot)]\,du,$$

где

$$\Phi(u,t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sign} u & \text{при } 0 \leqslant |u| < t \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant |u| \leqslant 1. \end{cases}$$

В применении к интегралу (24) формула Симпсона дает

$$I \approx \int\limits_0^1 \exp\left(\int\limits_u^1 \frac{1}{2}\,dt\right)\left[\int\limits_u^1 \frac{1}{2}\,dt\right]^2 du = \frac{5}{2}\sqrt{e} - 4 \approx 0{,}122.$$

Пример 2. Рассмотрим еще интегралы

$$I_n = \int\limits_C \exp\left(\int\limits_0^1 x^2(t)\,dt\right)\left[\int\limits_0^1 x(t)\,dt\right]^n d_W x.$$

Точное значение интеграла I_n можно вычислить по теореме 2 статьи [3]:

$$I_n = \sqrt{\sec 1}\,(2n-1)!!\left(\frac{\operatorname{tg} 1 - 1}{2}\right)^n,$$

$$I_{2n-1} = 0.$$

Даем результаты вычислений по известным квадратурным формулам:

n	По формуле			Точное значение
	Симпсона	Владимирова	(1)	$I_n(\pm 0{,}0005)$
0	1,297	1,341	1,360	1,360
2	0,244	0,319	0,381	0,381
4	0,074	0,168	0,327	0,317
6	0,026	0,089	0,260	0,442
∞	0	0	0	∞

При нечетных n все эти формулы дают точное значение интеграла. При больших четных n вышеприведенные формулы непригодны, но лучшие квадратурные формулы пока не известны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С., Успехи мат. наук, 15, вып. 4(94), 129—135 (1960).
2. Винер Н., Нелинейные задачи в теории случайных процессов, М., 1961.
3. Cameron R. H., Martin W. T., Bull. Amer. Math. Soc., 51, Nr. 2, 73—90 (1945).
4. Cameron R. H., Duke Math. Journ., 18, Nr. 1, 111—130 (1951).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
23/III 1965

T. TOBIAS

ÜHEST KVADRATUURVALEMIST KAALUGA WIENERI INTEGRAALI ARVUTAMISEKS

Artiklis vaadeldakse ligikaudset valemit (1) kaaluga Wieneri integraali arvutamiseks. Valemi kordajad ja sõlmed avalduvad teatud integraalvõrrandi omaväärtuste ja omafunktsioonide kaudu. Valem on täpne teatud polünomiaalsete funktsionaalide jaoks.

T. TOBIAS

AN APPROXIMATION FORMULA FOR THE EVALUATION OF WIENER'S INTEGRAL WITH WEIGHT

In this paper an approximation formula (1) for the evaluation of Wiener's integral is considered. The unknown coefficients and points of this formula are in connection with eigenvalues and eigenfunctions of a certain integral equation. This formula is exact for a certain class of polynomial functionals.