LÜHIUURIMUSI

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

У. НИГУЛ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДВЕРГНУТОЙ ВОЗДЕЙСТВИЮ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ ДАВЛЕНИЯ

В технических приложениях представляет интерес осесимметричный переходный волновой процесс деформации сферической оболочки, вызванный воздействием плоской волны давления, которая, передвигаясь с постоянной скоростью v_0, атакует оболочку в момент времени $t=0$ и затем продолжает движение по ней.

Рассмотрим волновой процесс деформации открытой свободной упругой оболочки типа полусферы на основе теории типа Тимошенко без учета обратного влияния деформации оболочки на волну давления. Безмоментная теория в аналогичной постановке задачи для замкнутой сферической оболочки использована в работе [1]. Однако ее обоснованность на начальном этапе движения вызывает сомнения.

Пусть: E — модуль упругости; ν — коэффициент Пуассона; ϱ — плотность материала; $2h$ — толщина; R — радиус; a — относительная толщина оболочки; $c_\text{П}$, c_T — скорости распространения волн по теории типа Тимошенко, k_T — коэффициент сдвига; t — время; τ — безразмерное время; φ, z — координаты по меридиану и по нормали; u_φ u_z — размерные и u, w — безразмерные перемещения; ψ — угол поворота нормали; $H(\tau)$ — единичная функция Хевисайда. При этом

$$c_\text{П}=\sqrt{\frac{E}{\varrho(1-\nu^2)}}, \quad k=\frac{c_\text{T}}{c_\text{П}}=\sqrt{\frac{(1-\nu)k_\text{T}}{2}}, \quad a=\frac{h}{\sqrt{3}R} \tag{1}$$

$$\tau=\frac{c_\text{П}t}{R}, \quad u=\frac{u_\varphi}{R}, \quad w=\frac{1}{2Rh}\int\limits_{-h}^{h} u_z dz. \tag{2}$$

В принятой постановке задачи нагрузка на оболочку представляет собой нормальное давление p, выражающееся через интенсивность $p_0=\text{const}$ и скорость $v_0=\text{const}$ волны давления по формуле

$$p=p_0 H\left[t-\frac{(1-\cos\varphi)R}{v_0}\right]=p_0 H(\tau_1), \tag{3}$$

где

$$\tau_1=\tau-\frac{1-\cos\varphi}{v}, \quad 0<v=\frac{v_0}{c_\text{П}}<1. \tag{4}$$

Безразмерное давление определим в форме

$$q=q_0 H(\tau_1), \quad q_0=\frac{p_0 R(1-\nu^2)}{2Eh}. \tag{5}$$

Уравнения движения по теории типа Тимошенко [2]:

$$[\partial_\varphi^2 + \cot\varphi\,\partial_\varphi - \cot^2\varphi - \nu - k^2 - (1+a^2)\,\partial_\tau^2]\,u + (k^2 - 2a^2\partial_\tau^2)\,\psi + (k^2+1+\nu)\,\partial_\varphi w = 0$$

$$(k^2+1+\nu)\,(\partial_\varphi + \cot\varphi)\,u - k^2(\partial_\varphi + \cot\varphi)\,\psi + [-k^2(\partial_\varphi^2 + \cot\varphi\,\partial_\varphi) + 2(1+\nu) + (1+a^2)\,\partial_\tau^2]\,w = -q \tag{6}$$

$$(k^2 - 2a^2\partial_\tau^2)\,u + [a^2(\partial_\varphi^2 + \cot\varphi\,\partial_\varphi - \cot^2\varphi - \nu) - k^2 - a^2\partial_\tau^2]\,\psi - k^2\partial_\varphi w = 0$$

и по безмоментной теории:

$$(\partial_\varphi^2 + \cot\varphi\,\partial_\varphi - \cot^2\varphi - \nu - \partial_\tau^2)\,u + (1+\nu)\,\partial_\varphi w = 0$$

$$(1+\nu)\,(\partial_\varphi + \cot\varphi)\,u + [2(1+\nu) + \partial_\tau^2]\,w = -q \tag{7}$$

$$\psi = u - \partial_\varphi w.$$

Начальные условия нулевые. Краевые условия для уравнений теории типа Тимошенко:

$$u(0,\tau) = 0, \qquad \psi(0,\tau) = 0, \qquad \partial_\varphi w(0,\tau) = 0 \tag{8}$$

$$T_\varphi\left(\frac{\pi}{2},\,\tau\right) = 0, \qquad M_\varphi\left(\frac{\pi}{2},\,\tau\right) = 0, \qquad N\left(\frac{\pi}{2},\,\tau\right) = 0. \tag{9}$$

Здесь T_φ, M_φ, N — безразмерные величины типа усилия, изгибающего момента и поперечной силы, выражающиеся через u, ψ, w по формулам

$$T_\varphi = (\partial_\varphi + \nu\cot\varphi)\,u + (1+\nu)\,w$$

$$M_\varphi = (\partial_\varphi + \nu\cot\varphi)\,\psi, \qquad N = -u + \psi + \partial_\varphi w. \tag{10}$$

В случае безмоментной теории из краевых условий (8), (9) используют лишь первые.

Обозначим решения по теории типа Тимошенко через $u_\text{Т}$, $\psi_\text{Т}$, $w_\text{Т}$ и по безмоментной теории — через $u_\text{Б}$, $\psi_\text{Б}$, $w_\text{Б}$.

В начале движения с точностью теории типа Тимошенко при $\varphi < v$, $\tau_1 \ll a$

$$w_\text{Т} \sim -\frac{q_0}{2f_1}\,\tau_1^2 H(\tau_1), \qquad \psi_\text{Т} \sim -\frac{q_0 k^2}{6a^2}\,\frac{\sin\varphi}{vff_1}\,\tau_1^3 H(\tau_1) \tag{11}$$

$$u_\text{Т} \sim \frac{q_0}{6}\,\frac{\sin\varphi}{vf^2f_1}\,[2k^2 + (k^2+1+\nu)\,f]\,\tau_1^3 H(\tau_1)$$

$$f = 1 - \frac{\sin^2\varphi}{v^2}, \qquad f_1 = 1 - \frac{\sin^2\varphi}{v^2}\,k^2. \tag{12}$$

По безмоментной теории:

$$w_\text{Б} \sim -\frac{q_0}{2}\,\tau_1^2 H(\tau_1), \qquad \psi_\text{Б} \sim -\frac{q_0\sin\varphi}{v}\,\tau_1 H(\tau_1) \quad \text{при } \tau_1 < 1 \tag{13}$$

$$u_\text{Б} \sim \frac{q_0(1+\nu)\sin\varphi}{6vf}\,\tau_1^3 H(\tau_1) \quad \text{при } \tau_1 \ll 1,\ \varphi < v.$$

При бо́льших значениях времени исследование проводилось как по теории типа Тимошенко, так и по безмоментной теории на основе метода сеток.

Предварительные результаты следующие:

1. В начале движения, когда фронт нагрузки, определяемый условием $\tau_1 = 0$, опережает фронт первичного возмущения, определяемый условием $\tau = \varphi$ и $\tau_1 < a$, имеем: $\max|w| \gg \max|u|$, причем $w_Т \approx w_Б$.

2. При $a \lesssim \tau_1 \lesssim \frac{1}{2}$ было получено: $\max|\psi| \gtrsim \max|w| \gg \max|u|$, причем $w_Б$, $\psi_Б$ хорошо аппроксимируются простыми формулами (11), но с ростом τ все больше отличаются от $w_Т$, $\psi_Т$. Например, при $v = {}^1/_{10}$, $\nu = {}^3/_{10}$ и $\tau = {}^1/_2$ значение $\max|\psi_Б|$ оказалось преувеличенным примерно в два раза, $\max|w_Б|$ — примерно в полтора раза, $\max u_Б$ — примерно на 10% с одновременным сдвигом $\max u_Б$ в сторону меньших φ. При этом перемещения перед фронтом нагрузки весьма малы по сравнению с максимальными значениями их абсолютных величин; $\max|w|$ имеет место при $\varphi = 0$.

3. При $\frac{1}{2} < \tau \lesssim \frac{\pi}{2}$ разница между $u_Б$, $\psi_Б$, $w_Б$ и $u_Т$, $\psi_Т$, $w_Т$ продолжала увеличиваться. Однако можно полагать, что при бо́льших значениях τ эта разница будет уменьшаться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huth J. H., Cole J. D., Acoust. Soc. Amer., 22, No. 4, 473—478 (1955).
2. Векслер Н. Д., Нигул У. К., Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1, № 1 (1966).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
1/XI 1965

U. NIGUL

SFÄÄRILISES KOORIKUS TASAPINNALISE SURVELAINE POOLT ESILEKUTSUTUD PINGELAINETE UURIMISE ESIALGSEID TULEMUSI

Timoshenko tüüpi teooria ja membraanteooria alusel käsitletakse sfäärilise kooriku deformeerumist tasapinnalise akustilise survelaine toimel. Esitatakse ligikaudsed valemid (11), (13) liikumise alguse kirjeldamiseks ning võrreldakse kahe mainitud teooria järgi hilisemate ajahetkede jaoks võrgumeetodiga saadud tulemusi.

U. NIGUL

PRELIMINARY RESULTS OF AN ANALYSIS OF THE TRANSIENT STRESS WAVES PRODUCED BY A PLANE ACOUSTIC PRESSURE WAVE IN A SPHERICAL SHELL

Response of a spherical shell to a plane pressure wave is considered by using the Timoshenko type and membrane theories. The approximate formulae (11), (13) for the beginning of the motion are given and some results obtained by finite difference method for later times are described with a comparison of the two theories used.