

*Л. АЙНОЛА, У. НИГУЛ*

## ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГИХ ПЛИТ И ОБОЛОЧЕК

В последнее время возрастает интерес к проблемам распространения волн, вызванных быстроизменяющейся нагрузкой, в плитах и оболочках. Это объясняется важными приложениями теории распространения волн во многих разделах технических наук и в геофизике.

Современная теория распространения волн в плитах и оболочках возникла в результате слияния двух существенно отличающихся друг от друга направлений исследований: а) инженерной теории, базирующейся на уравнениях, первоначально построенных для вычисления некоторого количества первых форм и частот собственных колебаний; б) математической теории упругости, использованной до сих пор, главным образом, в задачах по геофизике (сейсмологии).

В связи со сказанным уместно напомнить некоторые существенные различия между постановкой геофизических задач и задач по расчету конструкций. Во-первых, в геофизике главный интерес представляют сравнительно высокочастотные (прифронтные) части возмущения, прибывающего на «станцию наблюдения», где их параметры могут быть определены измерительными приборами. Соответственно в теории основное внимание уделено развитию асимптотических методов построения высокочастотных (прифронтных) полей перемещений. При расчете инженерных конструкций не меньший (а иногда даже главный) интерес также представляет низкочастотная часть переходного волнового процесса, которую во многих случаях гораздо сложнее вычислить, чем высокочастотную. Во-вторых, в геофизике объекты (слои) обычно считают бесконечными в направлении двух координат. Протяженность встречающихся в технике оболочек невелика, поэтому часто появляется необходимость рассматривать отражение волн от краев (поверхностей опирания), что в свою очередь ограничивает применимость результатов исследования бесконечных и полубесконечных объектов. В-третьих, в геофизике основную трудность при изучении распространения волн напряжения создают поверхности раздела (искажения), которые, однако, в решенных задачах чаще всего приняты плоскими. Оболочки не уступают геофизическим объектам по сложности исследования, поскольку их боковые поверхности кривые и расположены они сравнительно близко друг от друга.

Бегущие волны в плитах и оболочках конечных размеров важно исследовать, когда:

а) нагрузка приложена вдоль некоторой линии (в том числе по краю) или в небольшой области поверхности;

б) время действия нагрузки или время ее возрастания до максимального значения соизмеримо либо меньше времени пробега упругой волной пути, равного характерному размеру (длине) конструкции.

Если нагрузка изменяется медленно или же ее распределение (даже при кратковременном действии) соответствует одной из первых форм собственных колебаний,



то необходимость рассмотрения бегущих волн отпадает, поскольку могут быть применены хорошо разработанные методы разложения волнового процесса по формам собственных колебаний.

Волновые процессы представляют интерес также в случае нагрузки в виде движущегося давления (особенно в районе фронта давления).

Хотя при исследовании волновых процессов переходного типа в плоских плитах в последнее время достигнуты существенные результаты как на основе двумерных, так и трехмерной теорий, следует отметить, что изучение таких процессов в оболочках лишь начинается. Выдвинутые практикой задачи расчета оболочек на динамическую нагрузку делают проблему выбора и оценки точности приближенных расчетных моделей в зависимости от требуемой информации весьма актуальной.

Не менее важен вопрос развития методов решения конкретных задач, в частности задач, приводящих к дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами (нецилиндрические оболочки). Систематизация имеющихся результатов, относящихся главным образом к плоским плитам и круговым цилиндрическим оболочкам, по-видимому, поможет содействовать решению этих проблем и избежать затраты энергии на повторное открытие уже известных фактов.

Авторы настоящего обзора попытались систематизировать результаты исследований по линейной теории распространения волн в изотропных идеально-упругих плитах и оболочках, имея в виду ее применение к анализу переходных процессов деформации технических конструкций. При этом оказалось целесообразным особо выделить проблемы приведения трехмерной задачи к двумерной, ибо при постановке задач расчета нецилиндрических оболочек эта тема приобретет весьма важное значение.

Наличие работ обзорного характера существенно облегчило задачу авторов. Более ранние результаты иностранных исследователей освещены в обзорной статье Р. Дейвиса [0.1] и в монографиях Г. Кольского [0.2] и М. Редвуда [0.3]. Из интересующих нас конструкций в [0.2] затронуты плиты, а в [0.3] — плиты и цилиндрические оболочки. Монография М. Редвуда [0.3] представляет собой обзор результатов, достигнутых в западных странах при изучении распространения волн в жидких и упругих средах различной формы, и содержит, по-видимому, самую полную библиографию (около 800 наименований) работ западных авторов до 1960 г.

Обзор результатов советских авторов в развитии динамической теории упругости и ее внедрении в практику геофизических (сейсмологических) исследований дан Г. И. Петрашенем [0.4]. Отметим еще монографию Л. М. Бреховских [0.5] и книгу В. Юинга, В. Ярдецкого и Ф. Пресса [0.6], посвященные, главным образом, проблемам распространения волн в слоистых средах, а также книгу В. Новацкого [0.7].

В монографии [0.5] подробно рассматриваются проблемы отражения волн. Однако волновые процессы переходного типа изучаются в ней лишь применительно к объектам, где может распространяться только одна волна. Книга [0.6] посвящена приложениям в геофизике. В монографии [0.7] рассматривается главным образом метод разложения волнового процесса по формам собственных колебаний.

Обширный материал о применении трехмерной теории упругости в геофизических задачах распространения волн деформации изложен в серии сборников [0.8], опубликованных под руководством и редакцией Г. И. Петрашеня.

Вопросы распространения волн в стержнях и балках рассмотрены в обзоре Х. Н. Эйбрамсона, Х. Дж. Пласа и Э. А. Риппергера [0.9].

В 1960 г. Ю. Микловиц опубликовал обзор литературы [0.10], в котором дается обширный перечень работ западных авторов о распространении упругих волн (в основном — стационарных) в стержнях, плитах, цилиндрических оболочках, полупространстве и неограниченном пространстве. В кратком докладе Ю. Микловица [0.11] реферированы некоторые работы, посвященные переходным волновым процессам деформации, вызванным импульсной нагрузкой.

Отметим также обзор Р. Д. Миндлина [0.12] о результатах исследования мод трехмерной теории плит.



О постановке задачи распространения волн в математической теории упругости. Линейная теория приводит к интегрированию уравнения Лямэ

$$(2\mu + \lambda) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{u} - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = 0 \quad (0.1)$$

при заданных начальных и краевых условиях. (Здесь  $\lambda$ ,  $\mu$  — коэффициенты Лямэ,  $\rho$  — плотность материала).

В неограниченной среде уравнение (0.1) описывает волны двух типов: волну расширения ( $P$ -волну) и волну сдвига ( $S$ -волну, волну искажения), распространяющихся соответственно со скоростями  $c_1$ ,  $c_2$

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (0.2)$$

Будем рассматривать плиты и оболочки, при которых одно измерение (толщина  $2h$ ) существенно меньше других, а на боковых поверхностях ( $z = \pm h$ ) заданы краевые условия в напряжениях:

$$\sigma_{i3}(x^1, x^2, \pm h; t) = p_{\pm}^i(x^1, x^2; t) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (0.3)$$

Здесь функции  $p_{\pm}^i$  отличаются от нуля лишь в ограниченных областях или на линиях, где приложена внешняя нагрузка.

Если оставить в стороне некоторые напряженные состояния весьма частного типа, то, при условии отсутствия напряжений на боковых поверхностях, вообще говоря, не могут раздельно распространяться волны сдвига ( $S$ ) и расширения ( $P$ ). Указанное явление существенно усложняет задачу по сравнению с некоторыми родственными задачами, рассматриваемыми в акустике (водяные и атмосферные слои). С другой стороны, малая толщина конструкции типа плит и оболочек часто является упрощающим фактором при изучении волнового процесса достаточно далеко от источника и фронтов.

В тонких плитах и оболочках первичные  $P$ - и  $S$ -волны многократно отражаются от боковых поверхностей. Поскольку они, как правило, отражаются в виде нескольких элементарных волн, то при каждом отражении волновой процесс становится более сложным. Поэтому даже в простейшем случае плоского слоя метод разложения по элементарным волнам оказывается эффективным лишь в непосредственной близости от места приложения нагрузки (в области соизмеримой с толщиной слоя).

Вообще следует констатировать, что задачи распространения волн в плитах и оболочках в постановке математической теории упругости настолько сложны, что их, как правило, удается решить лишь приближенно. При этом существуют две возможности: сформулировать каждую задачу точно и решить ее приближенными способами, либо сразу сформулировать приближенные расчетные модели (методы, алгоритмы) для целых классов задач. В технических приложениях второй подход имеет явные преимущества. Поэтому первый подход, раскрывающий физическое содержание задачи, следует в первую очередь рассматривать как средство построения новых моделей и анализа точности существующих. В будущем он может (с применением новой вычислительной техники), конечно, стать и основой решения конкретных задач.

**Приближенные расчетные модели.** Наиболее распространенная идея упрощения, явно использующая свойство малости толщины объекта, заключается в разложении трехмерного волнового процесса на двумерные волны, относящиеся к срединной поверхности и определяющие (каждая в отдельности) некоторое поле перемещений по толщине объекта. Многочисленные способы реализации этой идеи можно разделить на две группы: а) построение двумерных теорий с приближенным удовлетворением уравнению (0.1) и краевым условиям (0.3); б) разложение волнового процесса по частным решениям (модам) уравнения (0.1), точно удовлетворяющим условиям (0.3).



Материал данного обзора разделен на две части. В первой части дается краткий обзор методов приведения трехмерных уравнений к двумерным (§ 1) и систематизируются различные модели для плит и оболочек (§ 2). Вторая часть посвящена главным образом переходным волновым процессам деформации плит и оболочек. Весьма бегло указываются важнейшие методы интегрирования (§ 3), дается обзор опубликованного материала по частным решениям — модам (§ 4) и перечисляются конкретно изученные задачи (§ 5). Статья заканчивается общими выводами и оценкой ближайших перспектив рассматриваемого раздела теории упругости (§ 6).

Работа составлена совместными усилиями авторов, причем § 1, 2 написаны Л. Айнола, а § 3—5 — У. Нигулом.

Авторы приносят глубокую благодарность Н. А. Алумяз, являющемуся инициатором составления данного обзора и оказавшему авторам неоценимую помощь при выполнении этой работы.

## ЧАСТЬ I

### ПРИБЛИЖЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛИТ И ОБОЛОЧЕК

#### § 1. Методы приведения

**1.1. Постановка задачи приведения.** В последнее время вопросы составления моделей расчета и выяснение области их применимости привлекли значительное внимание. Наиболее обстоятельно некоторые направления исследований по моделям изложены в монографии Н. А. Кильчевского [1], на 84-й странице которой, в частности, отмечается, что «Общая программа приведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной заключается в конструировании аналитических выражений величин, характеризующих напряженное и деформированное состояние оболочки, через новые величины, определенные в системе координат  $x^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) ее основной поверхности, и в составлении уравнений, которым должны удовлетворять эти величины в области изменения переменных  $x^\alpha$  и на ее границе».

По-видимому, не существует универсальных расчетных моделей, которые одинаково хорошо применимы для определения всех напряженных состояний трехмерных тел при всевозможных внешних нагрузках. В зависимости от применяемого метода приведения и порядка приближения полученная модель является наилучшей в определенном смысле (ошибка будет наименьшей в некоторой метрике). Надо сказать, что методами приведения занимались главным образом механики, поэтому с точки зрения строгого математического анализа они почти не изучены. Исследования в этом направлении были бы весьма актуальны.

В дальнейшем изложении наиболее распространенные методы приведения разделены на две группы, называемые аналитическими и энергетическими методами. Многие методы приведения вначале разработаны для решения задач статики, но большинство из них применимо также в динамике. Поэтому ниже упоминаются и важнейшие работы по моделям в статике.

**1.2. Аналитические методы приведения** могут быть разделены на две подгруппы: 1) формальные, 2) асимптотические.

Наиболее распространенным представителем первой подгруппы является метод степенных рядов: перемещения и напряжения разлагаются в ряд по степеням координаты  $z$ , нормальной к срединной поверхности:



$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} (\nabla_3)^n u_i(x^\gamma, 0; t) z^n, \quad \sigma^{ik} = \sum_{n=0}^{\infty} (\nabla_3)^n \sigma^{ik}(x^\gamma, 0; t) z^n. \quad (\gamma = 1, 2) \quad (1.1)$$

Далее при помощи уравнений равновесия и соотношений упругости все функции  $(\nabla_3)^n u_i$ ,  $(\nabla_3)^n \sigma^{ik}$  выражаются через шесть основных функций, которые определяются из условий на поверхностях оболочки. Известны два варианта выбора основных функций: 1)  $u_i(x^\gamma, 0; t)$ ,  $\nabla_3 u_i(x^\gamma, 0; t)$  или 2)  $u_i(x^\gamma, 0; t)$ ,  $\sigma^{i3}(x^\gamma, 0; t)$ .

Впервые метод степенных рядов был применен в 1828—1829 гг. в работах А. Коши<sup>[1.2]</sup> и С. Пуассона<sup>[1.3]</sup> при выведении уравнения плиты. В 1929 г. Ф. Краусс<sup>[1.4]</sup> попытался построить статическую теорию оболочек методом степенных рядов. Этот же метод был использован Н. А. Кильчевским в 1939—1940 гг.<sup>[1.5, 1.6]</sup> при построении общей теории статики оболочек. Алгоритм Н. А. Кильчевского был недавно применен И. Т. Селезовым<sup>[1.7-1.11]</sup> при выводе уравнений динамики плиты и круговой цилиндрической оболочки. Работы<sup>[1.5, 1.6]</sup> нашли дальнейшее развитие и усовершенствование в монографии<sup>[1.1]</sup> Н. А. Кильчевского (1963 г.), где изложена общая теория оболочек для решения динамических задач. В<sup>[1.1]</sup> была представлена теория оболочек 12-го порядка, сохраняющая в уравнениях все члены с множителями до  $h^3$  включительно. Во всех названных работах нашел применение первый вариант основных функций.

Имеется ряд работ, где в качестве метода приведения использован метод степенных рядов со вторым вариантом основных функций. Этим путем В. В. Новожилов и Р. Финкельштейн<sup>[1.12]</sup> исследовали в 1943 г. погрешность гипотез Кирхгоффа-Лява в статической теории оболочек. В динамике этот вариант нашел применение у П. Эпштейна<sup>[1.13]</sup> для построения уравнений плиты и круговой цилиндрической оболочки. Методика работы<sup>[1.13]</sup> получила дальнейшее развитие в исследованиях Е. Кеннарда<sup>[1.14-1.17]</sup> и в работах<sup>[1.18, 1.19]</sup>.

В случае простых геометрических объектов (напр., плит) алгоритм степенных рядов может быть успешно применен в форме символического метода А. И. Лурье<sup>[1.20, 1.21]</sup> (при первом варианте основных функций) или в форме метода начальных функций В. З. Власова<sup>[1.22, 1.23]</sup> (при втором варианте основных функций). Символические формулы трехмерной теории динамики плит представлены в работе<sup>[1.24]</sup> для деформации, антисимметричной относительно срединной поверхности. В символической теории применяются бесконечные, во всех других вариантах — усеченные ряды.

При применении метода степенных рядов в уравнениях появляются операторы с коэффициентами порядка 1,  $\varepsilon^2$ ,  $\varepsilon^4$ , ... ( $\varepsilon$  — малый параметр — относительная толщина). При формальном применении метода степенных рядов в операторах обычно сохраняют все члены с коэффициентами порядка  $\varepsilon^{2n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) включительно. Такое усечение (условная оценка точности) часто приводит к тому, что по существу оказываются сохраненными некоторые члены такого же порядка величины, как отброшенные. Этот недостаток метода может быть устранен асимптотическим анализом.

Метод степенных рядов как метод приведения имеет еще один существенный недостаток, состоящий в том, что удовлетворение краевых и начальных условий с заданной условной точностью (по степеням  $\varepsilon$ ) требует вывода системы дифференциальных уравнений относительно более высокой точности.



**1.3. Асимптотические методы.** Неоценимые заслуги в разработке и применении асимптотических методов в теории оболочек принадлежат А. Л. Гольденвейзеру [1.25].

В задачах приведения асимптотический подход достигается наиболее наглядно введением параметров типа  $\varepsilon^{\eta_\alpha}$  ( $\eta_\alpha$  — характеристика изменяемости напряженного состояния в направлении координаты  $x^\alpha$ ). С их помощью осуществляется сжатие—растяжение координатной сетки в зависимости от рассматриваемого напряженного состояния (параметры типа  $\eta_\alpha$  различны для различных напряженных состояний). Принимая  $x^\alpha = \varepsilon^{\eta_\alpha} \xi^\alpha$ , выписывают уравнения теории упругости в новых координатах и отбрасывают члены с достаточно малыми коэффициентами. В первых приближениях появляются простейшие модели (двумерные теории) расчета оболочек.

В 1949—1950 гг. асимптотический метод был применен К. Фридриком [1.26, 1.27] для исследования краевых эффектов плит. Основные работы по изучению различных напряженных состояний в плитах и оболочках опубликованы недавно. Работы К. Фридрикса, Р. Дресслера [1.28, 1.29] и А. Л. Гольденвейзера [1.30] относятся к плитам, работы М. Джонсона и Э. Рейсснера [1.31], Е. Рейсса [1.32] и М. Джонсона [1.33] — к цилиндрическим оболочкам и работы А. Е. Грина [1.34, 1.35], В. Койтера [1.36], А. Л. Гольденвейзера [1.37] и Э. Рейсснера [1.38] — к общей теории оболочек. Все указанные здесь исследования [1.26—1.38] посвящены статике.

В динамике плит и оболочек асимптотический метод нашел применение в несколько иных формах.\* В работах Г. И. Петрашеня и Л. А. Молоткова [1.40—1.42] методом асимптотического анализа был исследован вопрос о границах применимости уравнений классической теории изгиба плит в динамических задачах. Основная идея, использованная в [1.40], состоит в сопоставлении формальных решений (контурных интегралов), полученных на основе трехмерной теории и двумерных теорий. (В ходе этого сопоставления пользуются разложением точного изображения по степеням нормальной координаты  $z$ ).

В работах [1.18, 1.19, 1.43] была построена асимптотическая теория круговых цилиндрических оболочек на базе метода степенных рядов. В [1.18] получены асимптотически обоснованные разрешающие уравнения восьмого и десятого порядка; в [1.19, 1.43] — асимптотические формулы для усилий, моментов и других искомых величин, выраженных через разрешающую функцию.

В качестве первых приближений асимптотический метод позволяет вывести безмоментную теорию и теорию Кирхгофа-Лява. Как показывает опыт работ [1.18, 1.19, 1.43], при этом оказывается возможным выявить наиболее удачный вариант соотношений упругости двумерной теории оболочек; в случае круговых цилиндрических оболочек им оказался вариант В. В. Новожилова, при котором наблюдалось интересное явление взаимной компенсации погрешностей гипотез теории Кирхгофа-Лява.

Асимптотический анализ, несомненно, является эффективным и перспективным средством построения моделей плит и оболочек и определения области их применимости. Однако существуют здесь и опасные «подводные камни». Из статике плит известны краевые задачи [1.44, 1.45], при которых асимптотические при  $\varepsilon \rightarrow 0$  формулы могут дать неправиль-

\* В работе Дж. Крэггса [1.39] вышеописанный асимптотический метод применялся для уточнения основного напряженного состояния симметричных колебаний цилиндрического стержня.



ные численные результаты в случае конечной относительной толщины плиты, поскольку коэффициенты асимптотического разложения отличаются друг от друга в сотни раз.

**1.4. Идея энергетических методов приведения** состоит в переходе от бесконечного числа степеней свободы в направлении нормали к конечному числу степеней свободы путем аппроксимации некоторой группы из величин  $u_i$ ,  $\sigma^{ik}$  в виде конечных рядов:

$$u_i = \sum_{k=0}^n v_i^{(k)}(z) u_i^{(k)}(x, t), \quad \sigma^{ik} = \sum_{k=0}^n \tau^{ik}(z) \sigma^{ik}(x, t), \quad (1.2)$$

где  $v_i^{(k)}(z)$ ,  $\tau^{ik}(z)$  — заданные функции. Далее для определения искомых функций  $u_i$ ,  $\sigma^{ik}$  выводятся соответствующие уравнения. При этом используются вариационные принципы теории упругости или уравнения точной теории интегрируются по толщине объекта.

Различные энергетические методы могут быть сгруппированы по аппроксимации (1.2) в зависимости от того, какие из величин  $u_i$ ,  $\sigma^{ik}$  задаются и как они задаются, т. е. из какого класса функций выбираются соответствующие  $v_i^{(k)}(z)$ ,  $\tau^{ik}(z)$ . Можно аппроксимировать: 1) перемещения, 2) напряжения или 3) все или некоторые из перемещений и напряжений. В качестве аппроксимирующих функций нашли применение: а) степени  $z$ , б) полиномы Лежандра и в) другие функции.

Любой из возможных вариантов аппроксимации может быть применен вполне формально, но целесообразнее его использовать в форме обратного метода.

Рассмотрим отдельные варианты энергетического метода приведения, вытекающие из приведенной классификации.

**1.5. Теории, основанные на аппроксимации перемещений.** Начнем с рассмотрения варианта 1а, т. е. методов, где перемещения задаются в виде степенных рядов. Если оставить в стороне безмоментную теорию, то теорией наиболее низкого порядка этой группы можно считать теорию Кирхгоффа-Лява. Ей соответствует двучленная аппроксимация перемещений  $u_1$ ,  $u_2$  и одночленная аппроксимация  $u_3$  при дополнительных гипотезах: 1) нормаль к срединной поверхности остается нормалью и после деформации, 2) напряжениями  $\sigma^{33}$  можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями.

Уравнения теории Кирхгоффа-Лява являются уравнениями восьмого порядка и в динамике принадлежат к параболическому типу. Если оставить в стороне некоторые особые случаи [1.19], то теория Кирхгоффа-Лява в статике при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\varepsilon$  — относительная толщина) позволяет определить напряженное состояние оболочки с асимптотической погрешностью порядка  $\varepsilon$  [1.12, 1.18, 1.34–1.37, 1.46].

В динамике возникли сомнения о применимости теории Кирхгоффа-Лява в задачах распространения волн, так как уравнения этой теории негиперболического типа. Это привело к построению различных вариантов уточненных теорий.

В динамике балок первая поправка к элементарной теории была внесена еще Релеем [1.47], предложившим учесть инерцию вращения. С. П. Тимошенко показал в 1921 г., что учет сдвига дает поправку такого же порядка. Он вывел уравнение балки, учитывающее поправки от сдвига и от инерции вращения [1.48]. Эти поправки приводят к отказу от первой



дополнительной гипотезы элементарной теории (прямолинейная нормаль к срединной поверхности теперь не остается нормалью после деформации). Уравнения теории Тимошенко — гиперболические.

Для плит уравнение типа Тимошенко впервые было выведено в 1948 г. Я. С. Уфландом [1.49]. Далее теория этого типа рассматривалась в работах [1.50–1.56]. В 1956–1958 гг. она была обобщена для цилиндрических оболочек в работах Т. Лина — Г. Моргана [1.57], Г. Германа — И. Мирского [1.58, 1.59] и в исследованиях [1.60–1.63].

Простейший вариант общей теории типа Тимошенко для оболочек (считающий метрический тензор не зависящим от координаты  $z$ ) может быть представлен следующим образом:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} - b_\alpha^\beta N^\alpha - 2\varrho h d_t^2 v^\beta &= 0, \\ \nabla_\alpha N^\alpha + b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - 2\varrho h d_t^2 w &= 0, \\ \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} - N^\beta - \frac{2\varrho h^3}{3} d_t^2 \varphi^\beta &= 0;\end{aligned}\tag{1.3}$$

соотношения упругости

$$T^{\alpha\beta} = BE^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad M^{\alpha\beta} = DE^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta}, \quad N^\alpha = \frac{k^2(1-\nu)}{2} B\omega^\alpha,\tag{1.4}$$

$$B = \frac{2Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}, \quad E^{\alpha\beta\gamma\delta} = a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} + \nu c^{\alpha\gamma} c^{\beta\delta};$$

кинематические соотношения

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha - 2b_{\alpha\beta} w), \\ \kappa_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \varphi_\beta + \nabla_\beta \varphi_\alpha), \quad \omega_\alpha = \varphi_\alpha + \nabla_\alpha w.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Если выразить (1.3) в перемещениях, то появится система уравнений десятого порядка гиперболического типа.

Из более высоких приближений теорий варианта 1а отметим работы И. Мирского и Г. Германа [1.64, 1.65], где при выводе уравнения цилиндрической оболочки все перемещения аппроксимируют двумя членами степенного ряда. Общая схема вывода уравнений статики оболочек, где перемещения задаются степенными рядами, дана в работе Х. М. Муштары — И. Г. Терегулова [1.66]. Соответствующая схема для динамики приведена в книге Н. А. Кильчевского [1.1].

Вариант 1б, т. е. методы, где задаются перемещения в виде рядов из полиномов Лежандра, в первом приближении совпадает с предыдущим. В более высоких приближениях аппроксимация функций в виде полиномов Лежандра имеет преимущество перед аппроксимацией в виде степеней  $z$ , так как первые являются ортогональными функциями.

Впервые полиномы Лежандра нашли применение при выводе статической теории оболочек в 1955 г. в работе И. Н. Векуа [1.67]. Далее в статике оболочек они применены в работах [1.68, 1.69]. В динамике имеется работа Р. Миндлина — М. Медика [1.70], где выведены уравнения десятого порядка для симметричной деформации плиты.

Вариант 1в, т. е. методы, где задаются перемещения в виде других функций, мало развит. В общих чертах теория динамики оболочек с



применением тригонометрических функций изложена в книге Н. А. Кильчевского [1.1]

Отметим, что варианты 1а, 1б, 1в связаны с применением вариационного начала Лагранжа.

**1.6. Теории, основанные на аппроксимации напряжений.** Вариант 2а, т. е. методы, где напряжения аппроксимируются степенными рядами, впервые применен в работе Е. Треффца [1.71] в 1935 г., но большое внимание исследователей к этому методу было привлечено работами Э. Рейсснера [1.72–1.74] 1944–1947 гг., относящимися к статике плит. Э. Рейсснер применил гипотезу о линейном распределении напряжений  $\sigma^{z^3}$  по толщине плиты. Остальные напряжения определялись из уравнений равновесия точной теории, а уравнения плиты выводились из вариационного принципа Кастильяно. Теория Рейсснера была обобщена для статике оболочек в работах [1.75–1.77].

Вариант 2б, т. е. методы, где напряжения задаются рядами полиномов Лежандра, применен В. В. Понятовским в работе [1.78], относящейся к статическому изгибу плит.

Вариант 2в, т. е. методы, где напряжения аппроксимируются иными функциями, был развит А. Л. Гольденвейзером [1.79], который в 1958 г. дал обобщение теории Рейсснера для плит, аппроксимируя распределение напряжений  $\sigma^{z^3}$  по толщине в виде произвольно заданной функции. В работе [1.80] эта произвольная функция считалась не заданной, а определяемой на основе вариационного принципа Кастильяно точной теории.

Методы приведения типа 2а, 2б, 2в не применимы для вывода уравнений динамики оболочек, поскольку вариационные формулы динамики невозможно представить в таком виде, чтобы в них входили только напряжения.

**1.7. Теории, основанные на аппроксимации перемещений и напряжений.** Метод одновременной аппроксимации перемещений и напряжений является более общим и содержит как частные случаи предыдущие методы.

Прежде всего здесь надо отметить работы С. А. Амбарцумяна. Начиная с 1957 г. он и его ученики развивают теорию оболочек (главным образом анизотропных), в которой задается зависимость от координаты  $z$  для напряжений  $\sigma^{z^3}$  (произвольная функция или параболическая функция) и для нормального перемещения  $u_z$  (не зависит от  $z$ ) [1.81].

Разложение перемещений и напряжений  $\sigma^{z^3}$  в степенные ряды было применено П. Рюдигером [1.82] при выводе общей теории статике оболочек. В. Церна [1.83] предложил аналогичную теорию, считая напряжения  $\sigma^{z^3}$  изменяющимися по толщине согласно параболическому закону.

Общая теория динамики оболочек с аппроксимированием всех перемещений и напряжений отрезками степенных рядов получена в 1957 г. П. Нагди [1.84]. В его работе уравнения и соотношения теории оболочек выводятся при помощи вариационного принципа Рейсснера. Соответствующая теория для цилиндрических оболочек приведена Р. Купером — П. Нагди [1.85, 1.86] и для пологих сферических оболочек — А. Калнинсом [1.87].

В работе [1.88] выведена теория плит для симметричных и антисимметричных динамических деформаций, предполагающая изменение перемещений и напряжений  $\sigma^{z^3}$  заданными произвольными функциями.

Более общий подход к построению моделей динамики плит и оболочек недавно применили И. Г. Терегулов [1.89] и И. Ю. [1.90]. Они аппрок-



симиrowали все перемещения, напряжения и компоненты деформации первыми членами степенного ряда.

Одной из главных положительных сторон всех энергетических методов приведения является то обстоятельство, что в процессе вывода уравнений равновесия естественным образом получаются и соответствующие краевые условия.

**1.8. Другие методы.** В последнее время проблемы построения приближенных теорий и оценки их точности пытались рассматривать и другими методами, которые не входят в изложенную схему классификации. Из таких исследований отметим работы [1.91–1.106].

Вопросу о построении теории оболочек посвящены и работы [1.107–1.110], опубликованные недавно.

## § 2. Модели плит и оболочек

**2.1. Модели плит.** При антисимметричных деформациях простейшим уравнением плит является уравнение Кирхгофа [2.1, 2.2]:

$$D \nabla^4 w + 2 q h \partial_t^2 w = 0. \quad (2.1)$$

Разные варианты уточненных уравнений приведены в работах [1.7–1.10, 1.48–1.54, 1.56, 2.3–2.7]. Наиболее популярными из них стали уравнения теории типа Тимошенко:

$$\left( D \nabla^2 - \frac{2 q h^3}{3} \partial_t^2 \right) \left( \nabla^2 - \frac{q}{\kappa^2 \mu} \partial_t^2 \right) w + 2 q h \partial_t^2 w = 0, \quad (2.2)$$

$$\left( \mu \nabla^2 - \frac{3 \kappa^2 \mu}{h^2} - q \partial_t^2 \right) \Phi = 0.$$

Для выбора значения коэффициента  $\kappa^2$  сделаны разные предложения:  $\kappa^2 = \frac{2}{3}$  [1.49],  $\kappa^2 = \frac{5}{6}$  [1.88, 2.4],  $\kappa^2 = \frac{\pi^2}{12}$  [1.50],  $\kappa^2$  является корнем уравнения [1.50]:

$$4 \sqrt{(1 - \alpha \kappa^2)(1 - \kappa^2)} = (2 - \kappa^2)^2, \quad \alpha = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu}. \quad (2.3)$$

Первое из уравнений (2.2) имеет такую же асимптотическую точность, как и уравнение (2.1); следующее асимптотически обоснованное приближение [1.40] имеет вид:

$$D \nabla^4 w - \left( \frac{9}{10} - \frac{2\mu}{3(\lambda + 2\mu)} \right)^2 h^3 q \nabla^2 \partial_t^2 w +$$

$$+ \frac{1}{8} \left( \frac{9}{10} - \frac{2\mu}{3(\lambda + 2\mu)} \right)^2 h^5 q \nabla^4 \partial_t^2 w + 2 q h \partial_t^2 w = 0. \quad (2.4)$$

Более точные уравнения изгиба плит мало исследованы. В работах [1.6, 1.7] приводятся уравнения более высоких приближений, полученные методом степенных рядов, но в [2.8] указаны существенные недостатки уравнений шестого и восьмого порядков.

Простейшими уравнениями для симметричных деформаций плиты являются уравнения плоского напряженного состояния. Следующее



приближение — уравнение шестого порядка — приведено в работах [1.88, 2.9, 2.10]. Теориям высшего порядка посвящены исследования [1.70, 2.11], где рассматриваются уравнения десятого порядка.

**2.2. Модели цилиндрической оболочки.** Простейшим вариантом теории цилиндрических оболочек является безмоментная теория. Ее разрешающее уравнение [1.19] имеет вид

$$L_0 \Phi \equiv \left\{ \partial_{\xi}^6 - \frac{1}{2} (3 - \nu) \partial_{\xi}^4 (\partial_{\xi}^2 + \partial_{\varphi}^2) + \partial_{\xi}^4 + \frac{1}{2} (1 - \nu) \partial_{\xi}^2 [(\partial_{\xi}^2 + \partial_{\varphi}^2)^2 - (3 + 2\nu) \partial_{\xi}^2 - \partial_{\varphi}^2] + \frac{1}{2} (1 - \nu) (1 - \nu^2) \partial_{\xi}^4 \right\} \Phi = 0, \quad (2.5)$$

где  $\xi, \varphi$  — безразмерные координаты и  $\tau$  — безразмерное время.

Различные варианты теории Кирхгофа-Лява изложены в работах [1.14, 1.18, 1.19, 2.12, 2.13]. Разрешающее уравнение этой теории

$$(L_0 + \varepsilon^2 L_1) \Phi = 0. \quad (2.6)$$

В зависимости от способа применения гипотез Кирхгофа-Лява (выбора соотношений упругости) получены разные виды оператора  $L_1$ . Сопоставление некоторых вариантов можно найти в работах [2.13–2.15]. С асимптотической погрешностью  $\theta_0 = \varepsilon^2 (1 + \chi^2)$  ( $\chi$  — наибольший из показателей изменчивости по аргументам  $\xi, \varphi, \tau$ ) оператор  $L_1$  может быть представлен [1.18, 1.19, 1.43] в виде:

$$L_1 = \frac{1}{2} (1 - \nu) [(\partial_{\xi}^2 + \partial_{\varphi}^2)^4 + 2\partial_{\xi}^6 + \partial_{\varphi}^4] + 2(1 - \nu) \partial_{\xi}^2 \partial_{\varphi}^2 (1 + 2\partial_{\varphi}^2). \quad (2.7)$$

В работе [1.18] приведено также характеристическое уравнение десятого порядка, построенное с асимптотической погрешностью  $\theta_1 = \varepsilon^2 + \varepsilon^4 \chi^4$ .

Уравнения теории типа Тимошенко приведены в работах [1.59–1.61, 1.63, 1.86]. Разрешающее уравнение теории типа Тимошенко

$$[L_0 + \varepsilon^2 (L_1 + L_{11}) + \varepsilon^4 L_2] \Phi = 0 \quad (2.8)$$

представляет собой уравнение десятого порядка гиперболического типа.

Для осесимметричного частного случая теория типа Тимошенко изложена в статьях [1.57, 1.58, 2.16].

Более высокое приближение теории представлено в работе [1.65] (система уравнений двенадцатого порядка гиперболического типа). Соответствующий осесимметричный случай рассмотрен в [1.64].

**2.3. Модели сферической оболочки.** Уравнения движения безмоментной сферической оболочки представлены в работах [2.17, 2.18]. Теорию Кирхгофа-Лява можно найти в [2.19]. Для пологих сферических оболочек уравнения теории Кирхгофа-Лява приведены в работах [2.20, 2.21]. Уравнения теории типа Тимошенко выведены недавно в статье [2.22]; для пологих оболочек они изложены ранее в работе [1.87].

Для оболочек других форм уравнения движения пока составлены только на базе безмоментной теории или на базе теории Кирхгофа-Лява.



## ЧАСТЬ II

## ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ ДЕФОРМАЦИИ ПЛИТ И ОБОЛОЧЕК

## § 3. Методы интегрирования

**3.1. Метод Фурье.** При расчете технических конструкций на импульсную нагрузку в инженерной практике широко применяется метод разложения по собственным формам (стоячим волнам). Если импульс нагрузки достаточно плавный и его продолжительность одного порядка или больше периода первой формы собственных колебаний, то применение метода Фурье достаточно эффективно. Однако его применение к расчету сравнительно тонких плит и оболочек, подвергнутых кратковременному импульсу, вызывает трудности, если распределение нагрузки по пространственным координатам не соответствует какой-либо из первых форм собственных колебаний. Из опыта расчета круговой цилиндрической оболочки на действие сосредоточенного импульса [3.1] известно, что даже при импульсе длительностью порядка  $t_1 \sim \frac{\pi}{2\omega_1}$  ( $\omega_1$  — круговая частота первой формы) необходимо учитывать десятки форм собственных колебаний. В разложении следует, вообще говоря, брать тем больше членов, чем меньше относительная толщина объекта и короче длительность нагрузки. При чрезмерном возрастании количества учитываемых членов, метод разложения по стоячим волнам становится неэффективным, и приходится рассматривать бегущие волны. Наглядный пример сопоставления методов разложения по стоячим и бегущим волнам имеется в работе [3.2], где на основе элементарной теории изгиба рассматривается действие на балку кратковременного поперечного импульса.\*

**3.2. Метод интегральных преобразований.** Подавляющее большинство результатов о волновых процессах переходного типа получено методом интегральных преобразований.

*А. Формальные решения в виде контурных интегралов*

Составление таких формальных решений в случае одной пространственной координаты элементарно. В случае волнового процесса, зависящего от двух пространственных координат, сначала обычно составляется формальное решение в виде двукратных контурных интегралов. Методика разработана главным образом для задач расчета плиты на основе точной теории. Наиболее известны два метода составления формальных решений.

Первый — метод падающих потенциалов — основан на применении закономерностей отражения первичных  $P$ - и  $S$ -волн, вызванных заданной нагрузкой. Этот метод был развит для полупространства в работах В. И. Смирнова и С. Л. Соболева [3.3, 3.4] и применялся для плиты в работе И. Н. Векуа [3.5].

\* Согласно элементарной теории, возмущение распространяется с бесконечной скоростью, и мгновенно имеет место бесконечное число отражений от опор, что, конечно, противоречит действительности. Несмотря на это, выводы работы [3.2] в отношении эффективности области применения метода Фурье можно считать обоснованными.



Второй метод — метод двукратного интегрального преобразования уравнений равновесия — был предложен в 1949 г. Г. И. Петрашенем для полупространства (задачи Лэмба) в работе [3.6] и для плоской плиты в работах [3.7, 1.40]. Второй метод стал в последнее время основным.

В работах [3.6, 3.7] Г. И. Петрашень рассматривал волновые процессы, зависящие от двух координат  $x, z$  и времени  $t$ . Было проведено преобразование Лапласа по времени и далее (в зависимости от задачи) для некоторых искоемых величин синус- и для других — косинус-преобразование Фурье по координате  $x$ . Позже Г. И. Петрашень применял этот метод также в случае плиты на упругом основании, в случае слоистых изотропных сред, разделенных параллельными плоскостями, и в других задачах [3.8, 0.8]. В последнее время он нашел применение в статьях [3.9–3.15], а также в других работах, которые будут указаны в § 5 при рассмотрении конкретных задач. В случае сосредоточенной силы (цилиндрических волн) получило применение преобразование Ханкеля по пространственной координате (радиусу).

Принципиально нетрудно обобщить этот метод на случай волнового процесса деформации плиты, зависящей от трех пространственных координат (что сделано, например, в [3.16]), а также на другие объекты (круговая цилиндрическая оболочка, сферическая оболочка). Однако обращение трехкратных контурных интегралов вызывает большие трудности. Поэтому в ближайшее время можно ожидать прикладных результатов только для таких случаев, когда изучается зависимость волнового процесса от двух пространственных координат.

Метод двукратных интегральных преобразований нашел применение и при изучении переходного волнового процесса в стержнях круглого поперечного [3.17 (стр. 239), 3.18–3.20] и прямоугольного сечения [3.21, 3.22].

Следует, однако, отметить, что существующий метод двукратных интегральных преобразований не является универсальным: он применим только при определенных видах граничных условий на цилиндрической поверхности (линии опирания) плиты\*. Ограниченность применимости метода связана с тем, что после преобразования Лапласа по времени приходится подбирать такие интегральные преобразования уравнений равновесия по координате срединной поверхности, при которых на границах плиты требуется только та информация об искоемых величинах, которая задана в виде граничных условий. Применение синус- и косинус-преобразований Фурье (в декартовых координатах) или же известных вариантов преобразования Ханкеля (в цилиндрических координатах) дает возможность рассматривать только определенного вида краевые условия. Рассмотрим полубесконечную ( $0 \leq x \leq \infty$ ) плиту. В случае напряженного состояния, зависящего от декартовых координат  $x, z$  существует два вида «допустимых» краевых условий, которые могут быть выявлены следующим образом:

1. После преобразования Лапласа по времени умножают первое уравнение равновесия (в перемещениях) на  $\cos \lambda^* x$  и второе — на  $\sin \lambda^* x$ , интегрируют по  $x$  от 0 до  $\infty$  и выполняют далее интегрирование по частям\*\*. Появляется система из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащая производные по  $z$ . В правые части этих уравнений входят  $u_z, \partial_x u_x$ . Следовательно, при  $x=0$  могут быть заданы  $u_z, \partial_x u_x$  или же величины, выраженные через них (например,  $u_z$  и  $\sigma_{xx}$ ).

\* Вопрос применимости исследован фактически для случая полубесконечной плиты и полубесконечного стержня.

\*\* Здесь  $\lambda^*$  — параметр преобразования по  $x$ .



2. Поступают аналогично вышеизложенному, но умножают первое уравнение равновесия на  $\sin \lambda^* x$  и второе — на  $\cos \lambda^* x$ . Теперь второе преобразование дает обыкновенные дифференциальные уравнения, в правые части которых входят  $u_x, \partial_x u_z$ . Следовательно, при  $x=0$  могут быть заданы  $u_x, \partial_x u_z$  или же величины, выраженные через них (например,  $u_x, \sigma_{xz}$ ).

Совершенно аналогично обстоит дело при расчете полубесконечного стержня [3.19, 3.22]. В частности, существующая методика не позволяет задавать краевые условия в напряжениях, что явно представляло бы интерес при решении прикладных задач. (Например, авторы работы [3.22] не имели возможности подбирать в теоретических расчетах краевые условия, реализованные ими в экспериментах).

Поскольку в настоящее время не существует методов для анализа в оболочках переходных волновых процессов деформации, зависящих от двух координат срединной поверхности, то представляло бы интерес применение двукратных интегральных преобразований в рамках двумерных теорий оболочек. Отсутствие таких работ объясняется, по-видимому, трудностями обращения.

### *Б. Методы обращения двукратных контурных интегралов*

Нашли применение два основных метода:

1. Разложение волнового процесса по элементарным волнам;
2. Разложение волнового процесса по модам.

В рамках первого метода часто используется идея Каньяра [3.23], заключающаяся в приведении формального решения к виду формулы преобразования, из которой непосредственно следует оригинал. В физическом смысле этот метод приводит к восстановлению процесса отражения элементарных (первоначальных)  $S$ - и  $P$ -волн от поверхностей плиты. Поскольку в ходе процесса отражения быстро увеличивается число элементарных волн, то практически этот метод позволяет изучать волновой процесс в начале движения и в прифронтовых областях. В принципе процесс отражения элементарных волн может быть исследован и непосредственно на основе теории отражения. Однако широкое применение метода интегральных преобразований свидетельствует о целесообразности такого математического формализма, ибо он способствует применению асимптотических методов, которые нашли широкое развитие в работах Г. И. Петрашеня [0.8] и использованы также другими авторами [3.13]. Основная идея здесь в том, что прифронтовые поля отдельных элементарных волн могут быть построены при помощи асимптотики  $s \rightarrow \infty$  ( $s$  — параметр преобразования Лапласа), позволяющей приближенно обратить внутренние контурные интегралы методом перевала (для построения поверхностных волн приходится учесть поправки от участков пути интегрирования, связанных обходом точек разветвления).

При применении метода разложения волнового процесса по модам, удалось точно обратить внутренний интеграл на основе теоремы о вычетах [3.12, 3.15] независимо от того, обращается ли сперва преобразование по времени, или по пространственной координате.\*

\* Выполнение сперва обращения по пространственной координате имеет то преимущество, что нет необходимости фиксировать изменение нагрузки по времени и учет ее полюсов перекладывается в следующий этап обращения.



В результате первого обращения появляется формальное решение в виде бесконечной суммы контурных интегралов, которые ввиду их сложности приходится обращаться приближенными методами. Каждый из этих контурных интегралов определяем вклад одной моды распространения волн.

### *В. Приближенные методы обращения однократных контурных интегралов*

Кроме контурных интегралов, появляющихся в точной теории плит после выполнения первого обращения, в большинстве случаев не поддавались точному обращению в известных функциях также контурные интегралы, полученные при применении приближенных теорий в одномерных задачах расчета плит и оболочек. Исключениями являются лишь некоторые простейшие примеры, как, например, изучение волновых процессов в плитах и стержнях на основе элементарной теории сжатия-растяжения и изгиба [3.24], а также элементарная задача кручения круговой цилиндрической оболочки и цилиндрического стержня. По указанной причине развитие методики и практическая реализация приближенного обращения одномерных контурных интегралов занимает в настоящее время важное место в литературе по переходным волновым процессам деформации плит и оболочек.

В трехмерной теории плит использованы: а) метод разложения оригинала по целым отрицательным степеням параметра преобразования Лапласа, который по исследованиям Г. И. Петрашеня [0.8 сб. III] можно считать родственным или даже разновидностью известного метода асимптотических лучевых рядов [3.25–3.31, 0.8 сб. V] для построения прифронтовых полей; б) метод перевала с учетом вклада седловых точек на мнимой оси плоскости параметра преобразования для получения асимптотических при  $t \rightarrow \infty$  приближений для некоторого числа первых контурных интегралов разложения по модам [3.11, 3.12, 3.15].\*

В теории плит типа Тимошенко В. Флюгге и Э. Заяц [3.32] предложили два варианта метода (а), из которых один предназначен для изучения начала движения, а второй — для изучения напряженного состояния за первым фронтом. В работе [3.32] был применен также метод (б) и предложен метод разложения оригинала по степеням пространственной координаты  $x$  для построения асимптотического, при  $x \rightarrow 0$ , приближения. В теории плит типа Тимошенко также нашел применение [1.49, 3.33] метод численного интегрирования по берегам срезов комплексной плоскости параметра преобразования, который оказался эффективным при малых значениях  $x/h$ ,  $ct/h$ , ибо с их увеличением подынтегральная функция становится быстроосциллирующей. Отметим, что наряду с более традиционным применением преобразования Лапласа по  $t$ , в теории плит типа Тимошенко также использованы синус- и косинус-преобразования Фурье по  $x$  [3.32, 3.34].\*\*

Ряд интересных элементов техники приближенного обращения имеется в работах [3.35–3.37], посвященных переходным волновым процессам в круговых цилиндрических оболочках. Насколько известно авторам, работа [3.36] является единственной в рассматриваемой области, где применен метод приближенного обращения [3.38–3.41], основывающийся

\* Метод (б) был ранее использован в работе [3.19] для получения численных результатов при изучении осесимметричного переходного волнового процесса в полубесконечном цилиндрическом стержне на основе трехмерной теории упругости. Он использован также в работах [3.20–3.22].

\*\* В [3.32] только при применении метода перевала.



на аппроксимации изображения Лапласа в равноотстоящих точках вещественной оси.

**3.3. Другие методы.** В 1955 г. Б. Боли [3.42] предложил в рамках теории плит типа Тимошенко энергетический метод, позже развитый в [3.43], который основывается на аппроксимации зависимости напряженного состояния от координаты  $x$ . Трудности, возникающие при подборе аппроксимирующих функций, ограничили область применимости этого метода началом движения.

Метод характеристик был использован в рамках двумерных теорий в работах [3.37, 3.44–3.46]. Было замечено, что существование двух семейств характеристик (двух фронтов) заметно усложняет задачу.

В. К. Кабулов [3.47] провел численным методом расчеты балок и плит на основе теории типа Тимошенко, используя модифицированные исходные уравнения, названные им уравнениями типа баланса.

В Институте кибернетики АН Эстонской ССР в последнее время применен метод сеток для анализа переходных волновых процессов деформации плит и сферических, цилиндрических и конических оболочек, а также более сложных комбинированных конструкций. Расчеты проведены для плиты и сферической оболочки на основе теории типа Тимошенко, а для других оболочек — на основе безмоментной теории. Наряду с элементарными схемами метода сеток были внедрены усовершенствованные [3.48, 3.49]: с автоматическим изменением шага сетки в зависимости от быстроты изменения функций и выделением частных решений, переносящих разрывы производных, встречающихся в уравнениях движения. Разработана также методика применения трехмерных сеток для анализа начала переходного волнового процесса деформации упругой плиты на основе уравнений теории упругости [3.50].

Для вычисления местораспоряжения и интенсивности фронтов элементарных волн, в теории упругости нашел применение *метод асимптотических лучевых рядов*, или *лучевой метод*. В простых примерах лучевой метод был применен уже в 1932 г. в монографии Ж. Адамара [3.51]. Позже он получил развитие в работах [3.25–3.30], в многочисленных статьях, помещенных в III и V сборниках серии [0.8], в докторской диссертации В. М. Бабица [3.31] и в других исследованиях. С геометрической точки зрения лучевой метод может быть интегрирован как метод изучения волнового процесса в условно выделенной лучевой трубке. С математической точки зрения он приводит к рекуррентным формулам, позволяющим построить лучевые ряды при  $t = t_1$ , если они известны при  $t = 0$ . В простейшем случае элементами лучевого ряда являются  $H(\tau_1)$ ,  $\tau_1 H(\tau_1)$ ,  $\tau_1^2 H(\tau_1)$ , ..., где  $\tau_1$  — безразмерное расстояние от фронта рассматриваемой волны, а  $H_1(\tau_1)$  — функция Хевисайда. В более сложных случаях могут встречаться также логарифмические элементы, связанные бесконечными разрывами. Итак, форма результатов такая же, как в случае обращения двукратных контурных интегралов с применением идеи Каньяра

Следует отметить, что в конкретных задачах удалось учесть только первые члены лучевых рядов: выяснить характер фронтовых разрывов и их интенсивность.



## § 4. Моды

**4.1. Роль мод в теории установившихся и неуставившихся колебаний.** Моды — частные решения уравнений движения — являлись предметом многочисленных исследований. Наиболее подробно изучены моды типа волн, движущихся по срединной поверхности плиты и изменяющихся во времени по синусоидальному закону (реальная частота). Это не случайно, ибо исследование таких мод тесно связано, с одной стороны, с теорией собственных и установившихся вынужденных колебаний, а с другой стороны — с обращением контурных интегралов методом перевала при изучении переходных волновых процессов. При других методах обращения контурных интегралов требуется определенная информация о модах более общего вида, зависящих от комплексного параметра (параметра преобразования Лапласа).

Что касается собственных колебаний, то их формы можно рассматривать как такие линейные комбинации мод, которые изменяются во времени по синусоидальному закону и при определенных дискретных значениях  $\omega = \omega_j$  (собственных частотах) удовлетворяют заданным краевым условиям. Один из путей конструирования форм собственных колебаний как раз и основывается на предварительном исследовании мод как непрерывных функций  $\omega$  [0.12, 4.1–4.3].

В случае установившихся вынужденных колебаний можно построить решение как сумму мод заданной частоты  $\Omega$  [0.3].

При обращении контурных интегралов методом перевала необходимо располагать не только данными (диаграммами) о корнях  $\kappa_j = \kappa_j(\omega)$  характеристического уравнения (в трехмерной теории плит — корнями уравнения Релея-Лэмба), но и данными о первых производных

$\kappa'_j = \frac{d\kappa_j}{d\omega}$  (или об обратных величинах последних — о групповых скоростях  $c_{gpj} = h \frac{d\omega}{d\kappa_j}$ ) и о вторых производных  $\kappa''_j$ . В районах фаз Эйри, где  $\kappa'_j$

обращается в нуль, надо иметь еще данные о третьей производной  $\kappa'''_j$ . При вычислении следующих (уточненных) приближений приходится использовать еще более высокие производные. Поэтому результаты исследования указанных дисперсионных соотношений различных мод представляют интерес с точки зрения переходных волновых процессов и будут ниже коротко освещены.

Отметим также, что многие авторы применяли для оценки точности двумерных теорий сопоставление результатов, полученных для дисперсионных соотношений мод на основе трехмерной и двумерных теорий. При этом из бесконечного числа мод трехмерной теории  $n$  первых сопоставлялись с  $n$  модами рассматриваемой двумерной теории  $n$ -го порядка.

В уточненных теориях типа Тимошенко, Кейна-Миндлина и др. (см. § 1, 2) даже подбирают вспомогательные коэффициенты так, чтобы достигнуть совпадения некоторых из кривых  $\kappa_j = \kappa_j(\omega)$  при  $\omega \rightarrow \infty$ , или используют какие-либо аналогичные приемы «подгонки».

При такой оценке или «подгонке» двумерных теорий молчаливо предполагают достаточную точность решения задачи с учетом  $n$  мод и часто не придают должного значения следующим обстоятельствам: 1) В различных областях плоскости  $x-t$  роль отдельных мод, а также роль их значений в различных областях плоскости  $s$  ( $s$  — параметр преобразования Лапласа) является весьма различной. Например, далеко за фрон-



тами главную роль обычно играет значение первых мод в окрестности точки  $s=0$ , а вблизи фронтов — значение мод при  $|s| \rightarrow \infty$ . 2) Поскольку цель инженерных задач чаще всего состоит в построении полей перемещений или напряжений, то анализ распределения этих величин по толщине объекта имеет такое же значение, как изучение точности аппроксимации зависимости  $\kappa_i = \kappa_i(\omega)$ .

С физической точки зрения каждая мода может быть интерпретирована как сумма отраженных элементарных волн, изменяющаяся с изменением  $x$  [0.3, 0.5, 0.12, 3.25, 4.4]. Это изменение и является источником явления дисперсии. Дисперсия отсутствует лишь при некоторых особенно простых модах (например, одна форма крутильных колебаний плиты в своей плоскости, чистокрутильные колебания круговой цилиндрической оболочки).

**4.2. Моды плиты.** Рассмотрим отдельно моды, соответствующие напряженным состояниям, антисимметричным и симметричным относительно срединной поверхности плиты (такое распадение всегда имеет место [1.24]).

#### *А. Моды антисимметричной деформации*

Эти моды распадаются на две группы [1.24], связанные соответственно с корнями  $\kappa_i$  следующих уравнений:

$$\cos \beta = 0, \quad (4.1)$$

$$(\kappa^2 - \frac{1}{2}s^2)^2 \sin \alpha \cos \beta - \kappa^2 \alpha \beta \sin \beta \cos \alpha = 0, \quad (4.2)$$

$$\alpha^2 = \kappa^2 - \frac{1-2\nu}{2-2\nu} s^2, \quad \beta^2 = \kappa^2 - s^2, \quad \kappa^2 = r^2 + m^2. \quad (4.3)$$

Здесь  $s$  — параметр преобразования Лапласа, кроме того принято, что напряженное состояние изменяется по координатам срединной поверхности  $x, y$  по экспоненциальному закону

$$\exp \left( r \frac{x}{h} + m \frac{y}{h} \right).$$

Преобразование Лапласа считается выполненным по безразмерному времени  $\tau_1 = tc_2 h^{-1}$ . Введем также понятие безразмерной частоты  $\Omega = \omega h c_2^{-1}$ .

В 1889 г. Релей впервые [4.5] представил уравнения (4.1), (4.2) для случая  $s = i\Omega$ ,  $m = 0$  и дал формулы, определяющие напряженное состояние плиты через корни этих уравнений. Рассматривая случай  $\omega \rightarrow 0$ , Релей [4.5] разлагал в (4.2) тригонометрические функции в степенные ряды и установил, что в первом приближении появляется результат, совпадающий с характеристическим уравнением элементарной теории Кирхгофа. Кроме того, он выписал и более точное уравнение. (Это направление позже развито в работах [1.7–1.11, 1.14]). Релей показал также [4.5], что при  $\omega \rightarrow \infty$  один (первый) из корней уравнения (4.2) приближается к предельному значению  $\kappa_R$ , полученному им ранее [4.6] при исследовании волн на поверхности полупространства. Релей отметил также возможность обобщения его результатов на случай  $m \neq 0$ .

В конце 1889 г. Лэмб изложил описанные результаты Релея в обзорном докладе [4.7], посвященном проблемам приведения трехмерной задачи плиты к двумерной.



В 1917 г. Лэмб подробно исследовал [4.8] первый корень уравнения (4.2) и выявил также ряд свойств следующих корней (в частности, одну серию точек разветвления корней — моды Лямэ [0.12, 4.9]).

После длительного перерыва, в начале 50-х годов возобновилось интенсивное исследование уравнений (4.2). Однако до сих пор почти весь имеющийся фактический материал относится исключительно к частному случаю  $s = i\Omega$ .

Л. Гудмэн [4.10] и Р. Аггаруал [4.11] получили уравнение (4.2), исследуя центросимметричное напряженное состояние плиты. Л. Гудмэн [4.10] опубликовал диаграммы четырех первых мнимых корней. А. Шох [4.12] составил диаграмму фазовых скоростей  $c_{\Phi j} = \frac{\omega}{\kappa_j} h$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ). Диаграмма А. Шоха переиздана в [0.5]; Г. Перси [4.13] построил (при различных коэффициентах Пуассона) диаграммы  $\frac{1}{c_{\Phi j}}$  ( $j = 1, 2, \dots, 9$ ). Р. Лайон [4.14] исследовал чистовещественные ветви корней уравнения (4.2). М. Оноэ [4.15], Р. Миндлин [4.16, 4.17], Р. Миндлин и М. Оноэ [4.18] исследовали различные свойства мнимых и вещественных ветвей, а также моды при нулевых значениях  $\kappa$ .

При построении мнимых и вещественных ветвей с большим индексом нашла широкое применение [0.12, 4.16] так называемая вспомогательная сетка, предложенная, по-видимому, впервые в 1951 г. А. Холденом [4.19] при изучении уравнения симметричных мод Р. Миндлином [4.20] при исследовании мод кристалльных плит. Вспомогательная сетка состоит из кривых  $\alpha = k\pi$ ,  $\beta = l\pi$  ( $k, l = 1, 2, 3, \dots$ ).

И. Толстой и Е. Уздин [3.25] вычислили графики первых групповых скоростей  $c_{грj}$  и фазовых скоростей  $c_{\Phi j}$  как функции от длины синусоидальных волн. Их диаграмма помещена позже в [0.6]. В 1957 г. И. Толстой и Е. Уздин [4.21] опубликовали диаграммы  $c_{грj}$  ( $j = 1, 2, 3, 4, 6, 11, 50$ ) и установили, что с ростом  $j$  диаграммы  $c_{грj}$  становятся быстроосциллирующими. Они показали, что максимальная групповая скорость имеет тенденцию расти с увеличением  $j$  и, например, при  $j = 50$  этот максимум уже весьма близок к скорости распространения волн расширения.

При  $\omega \rightarrow \infty$  величины  $c_{\Phi 1}$ ,  $c_{гр1}$  асимптотически приближаются к  $c_R$  — к фазовой скорости распространения волн Релея, а  $c_{\Phi j}$ ,  $c_{грj}$  ( $j \neq 1$ ) — к скорости распространения волн сдвига.

Применительно к процессам переходного типа из диаграммы групповых скоростей следует, что наиболее быстро удаляются от источника волновые группы с конечными, но сравнительно большими частотами, соответствующими максимумам (фазам Эйри) диаграмм групповых скоростей.

В [4.21] были приведены численные данные о диапазонах  $\omega$ , где  $c_{\Phi}$ ,  $c_{гр}$  противоположны по знаку [4.22]. Эти диапазоны неудачно стали называть участками «отрицательных» групповых скоростей. Поскольку понятие групповой скорости связано с распространением энергии [4.23–4.25], то естественно определить его как положительную величину. Если провести аналитическое продолжение корней через точки разветвления, то участки «положительных» и «отрицательных» групповых скоростей оказываются относящимися к различным корням [2.8].

В 1960 г. Р. Миндлин дал обзор [0.12] результатов исследования мод. Он уделил большое внимание разъяснению физической природы мод как сумм элементарных волн. Образование мод в результате отражения от боковых поверхностей волн расширения ( $P$ ) и вертикально поляри-



зованных волн сдвига ( $S$ ) ранее было изучено в работах [0.5, 3.9, 3.25, 3.28, 4.26]. Р. Миндлин поместил в [0.12] также обширный графический материал по исследованию мнимых и вещественных ветвей корней уравнения (4.2) и подробно описал их свойства.

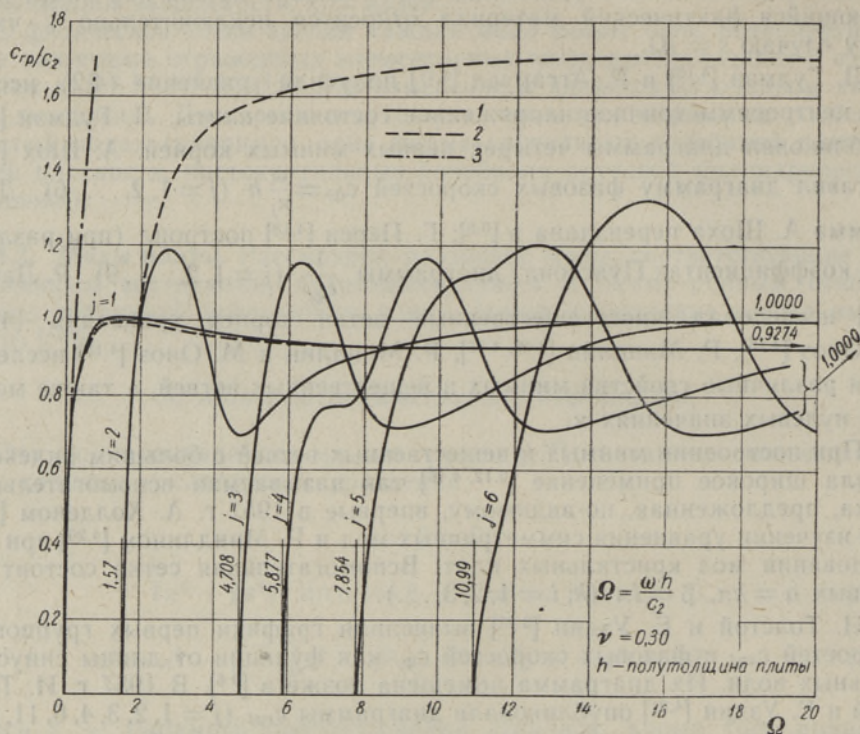


Рис. 1. Диаграмма групповых скоростей антисимметричных мод плиты: 1 — трехмерная теория; 2 — теория типа Тимошенко ( $\kappa^2 = 0,860$ ); 3 — теория Кирхгоффа. (Из работы [2.8]).

На рис. 1 приведены диаграммы групповых скоростей для первых шести мод уравнения (4.2).

Численные данные подтверждают теоретический результат В. Г. Гоголадзе [4.28], согласно которому при конечной частоте  $\omega$  имеется лишь конечное число мнимых и вещественных ветвей корней уравнения (4.2), кроме которых существует еще бесконечное число комплексных ветвей. Существование комплексных ветвей было отмечено в [4.18], диаграмма первых ветвей была дана Дж. Шервудом в [4.29], а диаграмма первых трех пар комплексных ветвей — в [2.8]. В работе [2.8] рассмотрен и ряд других вопросов, в частности различные методы аппроксимации корней уравнения (4.2).

С корнями уравнения (4.1) связаны сравнительно простые моды сдвига [1.24]. Диаграммы первых фазовых и групповых скоростей представлены в [0.6]. В [0.6, 0.12] рассматривалась физическая природа этих мод как сумма горизонтально поляризованных элементарных волн сдвига ( $SH$ -волн). Эти моды связаны с волнами Лява [4.30, 4.31] при нулевой жесткости основания и крутильными колебаниями плиты в своей плоскости.

Сопоставление первых корней трехмерной теории с корнями двумерных теорий проводилось в работах [0.12, 1.50, 2.3, 2.5, 2.8, 4.32] и многих дру-



гих. Некоторые результаты этих исследований приведены на рис. 2, взятом из работы [2.8]. Первый корень теории типа Тимошенко (при  $\nu = 0,3$ ;  $\kappa^2 = 0,860$ ) настолько хорошо совпадает с первым корнем трехмерной теории, что в масштабе рис. 2 его диаграмму невозможно было отличить от кривой трехмерной теории. Аппроксимации второго корня применимы только при сравнительно небольших значениях  $\omega$ . Следует отметить, что пока нет таких двумерных теорий, которые хорошо аппроксимировали бы следующие моды. Имеющиеся уравнения 6-го и 8-го порядка метода степенных рядов уточняют аппроксимацию первой моды, но дают бедную, а в некоторых диапазонах  $\omega$  (зависящих от  $\nu$ ) даже качественно неправильную аппроксимацию следующих мод [2.8].

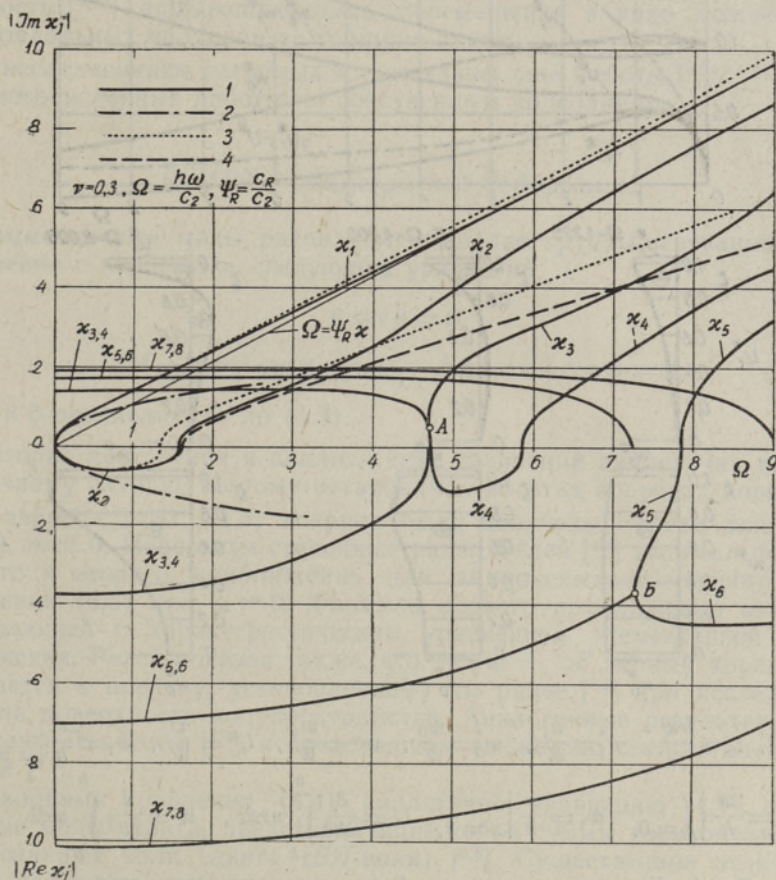


Рис. 2. Диаграмма корней  $x_j$ : 1 — трехмерная теория (уравнение Релея-Лэмба); 2 — теория Кирхгофа; 3 — метод степенных рядов (уравнение 4-го порядка); 4 — теория типа Тимошенко ( $\kappa^2 = 0,860$ );  $h$  — полутолщина плиты. (Из работы [2.8]).

Из распространенных вариантов двумерной теории наилучшую аппроксимацию групповых скоростей обеспечивает теория типа Тимошенко, что, по-видимому, объясняется ее энергетической основой. На рис. 1 показаны кривые теории Тимошенко при  $\nu = 0,3$ ,  $\kappa^2 = 0,860$  ( $\kappa^2$  вычислен по (2.3), так что при  $\omega \rightarrow \infty$  достигается точное совпадение первой групповой скорости теории Тимошенко с трехмерной теорией). Из рис. 1 видно, что диаграмма первой групповой скорости хорошо аппроксими-



руется при всех значениях  $\omega$ . Наибольшее отклонение имеет место в районе фазы Эйри — максимальных значений  $c_{гр1}$ . Однако групповая скорость второй моды  $c_{гр2}$  хорошо аппроксимируется лишь в узком диапазоне частот.

Характеристическое уравнение, соответствующее второму уравнению (2.2) теории типа Тимошенко, приближает первый корень уравнения (4.1) [1.24].

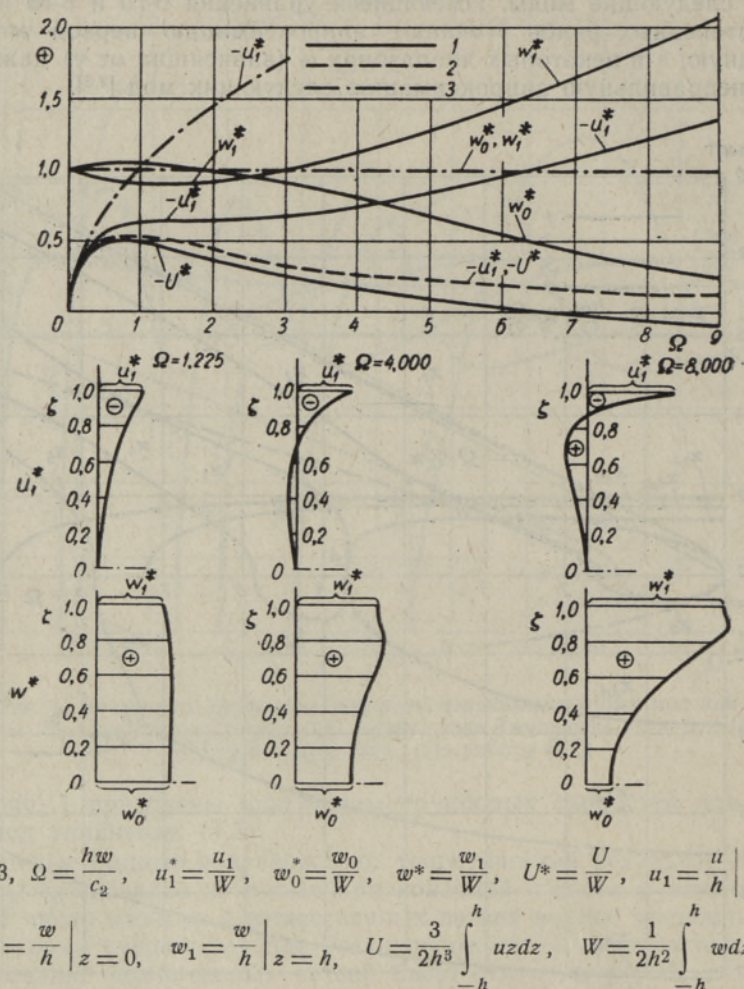


Рис. 3. Диаграммы перемещений антисимметричной моды плиты: 1 — трехмерная теория; 2 — теория типа Тимошенко ( $\kappa^2 = 0,860$ ); 3 — теория Кирхгоффа;  $u$  — тангенциальное,  $w$  — нормальное перемещение;  $h$  полутолщина плиты. (Из работы [4.33]).

Распределение перемещений и напряжений по толщине плиты исследовано сравнительно слабее, чем дисперсионные соотношения. Некоторая информация по первым трем модам имеется в [4.33]. Рис. 3, заимствованный из этой работы, показывает, как при первой моде с увеличением  $\Omega = \frac{\omega h}{c_2}$  почти линейное распределение перемещений по толщине постепенно переходит в распределение, типичное для поверхностных волн Релея.



По [4.33] на первой моде погрешность различных гипотез двумерных теорий с увеличением  $\Omega$  растет по-разному. Например, в пределах 20%-ной погрешности гипотеза теории Кирхгофа  $u_1 = -z \frac{\partial u_3}{\partial x}$  применима до  $\Omega \leq 0,2$ , гипотеза теории типа Тимошенко о линейном распределении тангенциальных перемещений — до  $\Omega \leq 0,7$ , гипотеза теории Рейсснера о линейном распределении напряжений — до  $\Omega \leq 1,0$  и гипотеза  $u_3(x, y, z; t) \sim u_3(x, y; t)$  — до  $\Omega \leq 4,0$ . В пределах той же погрешности теория типа Тимошенко позволяет определить изгибающий момент  $M$  при  $\Omega \leq 7$ , а поперечную силу  $Q$  — до весьма большой частоты. При второй моде поля перемещений и напряжений аппроксимируются еще хуже. Однако для мод  $j \geq 2$  при больших  $\omega$  существует возможность [4.33] аппроксимировать перемещения в виде целого числа синусоидальных полуволн по толщине плиты.

С исследованием изгибных мод связаны еще работы [4.34–4.38], а также многочисленные работы по собственным колебаниям.

### Б. Моды симметричной деформации

Симметричные моды распадаются на две группы, связанные соответственно с корнями  $\chi_j$  следующих уравнений:

$$\beta \sin \beta = 0, \quad (4.4)$$

$$(\chi^2 - \frac{1}{2}s^2)^2 \sin \beta \cos \alpha - \chi^2 \alpha \beta \sin \alpha \cos \beta = 0, \quad (4.5)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  определяются по (4.3).

История построения и анализа этих уравнений аналогична антисимметричному случаю, поэтому остановимся на этих вопросах короче.

Уравнения (4.4), (4.5) впервые были получены Релеем для случая  $s = i\Omega$ ,  $m = 0$ . Используя степенные ряды, Релей [4.5] выписал формулы первого и второго приближения для аппроксимации первого корня уравнения (4.5) при  $\omega \rightarrow 0$ . Формула первого приближения оказалась совпадающей с характеристическим уравнением элементарной теории растяжения. Релей показал также, что при  $\omega \rightarrow \infty$  первый корень приближается к пределу, установленному им ранее [4.6] при исследовании волн на поверхности полупространства. Аналогичные результаты были изложены Лэмбом в [4.7], исследовавшим также ряд свойств следующих корней [4.8].

С корнями уравнения (4.4) аналогично уравнению (4.1) связаны простые моды сдвига, представляющие собой суммы горизонтально поляризованных волн сдвига ( $SH$ -волн) [0.6]. Существенное отличие заключается в том, что уравнение (4.4) определяет одну моду, не подвергающуюся дисперсии.

Качественные свойства корней уравнения (4.5) во многом аналогичны свойствам корней уравнения (4.2). Наиболее важное различие состоит в том, что для (4.5) существует лишь одно решение  $\chi_1^2 = \chi_1^2(s)$ , имеющее при  $s = 0$  нулевое значение. При этом поведение этого корня и его производных резко отличается от первого корня уравнения (4.2). Для иллюстрации сказанного на рис. 4, взятом из работы [4.27], дана диаграмма групповых скоростей симметричных мод.

Поскольку групповая скорость первой симметричной моды при  $\omega = 0$  совпадает со скоростью распространения волн элементарной теории плоской деформации



$$\text{при } \omega = 0: c_{\text{гр}1} = c_*, c_* = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}, \quad (4.6)$$

то в переходных волновых процессах обычно играют существенную роль группы длинных волн, движущихся со скоростью порядка  $c_*$ . Аналогичный факт известен [4.39] из точной теории кругоцилиндрического стержня

$$\text{при } \omega = 0: c_{\text{гр}1} = c_0, c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.7)$$

и делает симметричный случай деформации принципиально отличным от антисимметричного.

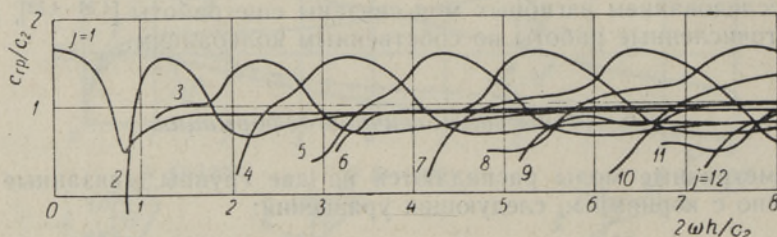


Рис. 4. Диаграмма групповых скоростей симметричных мод плиты;  $h$  — полутолщина плиты. (Из работы [4.27]).

Остановимся теперь на численном исследовании мод, связанных уравнением (4.5). После работы Лэмба [4.8] Р. Морс [4.40] был одним из первых исследователей этого уравнения. Он вычислил диаграммы фазовых скоростей двух первых мод при различных значениях коэффициента Пуассона  $\nu$ . Диаграмма Р. Морса переиздана М. Редвудом [0.3]. Л. Гудмэн [4.10] и Р. Аггаруал [4.11, 4.41, 4.42] получили уравнение (4.5) при исследовании мод центросимметричной деформации плит. Л. Гудмэн [4.10] дал диаграмму четырех первых мнимых ветвей корней; обширная численная информация, в том числе многочисленные диаграммы деформации плиты, дана в [4.11, 4.41, 4.42]. На уже отмеченной диаграмме А. Шоха [4.12] приведены также кривые для шести первых мнимых ветвей корней уравнения (4.5).

А. Холден [4.19] предложил вспомогательную сетку, которая здесь играет примерно такую же роль, как при описанном случае антисимметричных мод.

В работах [0.12, 3.25, 4.3, 4.10, 4.13–4.18, 4.21, 4.28, 4.29], уже отмеченных при рассмотрении антисимметричных мод, были исследованы аналогичные аспекты симметричных мод. В частности, в [0.12, 4.10] даны диаграммы корней, в [4.13] — диаграммы  $1/c_{\text{гр}}$  при различных  $\nu$ , в [4.14] — диаграммы вещественных ветвей корней и в [3.25, 4.21] — многочисленные диаграммы групповых скоростей. Симметричные моды рассматриваются также в работах [1.70, 2.9, 2.11, 4.43–4.47].

При конструировании двумерных теорий широко использовался метод подбора вспомогательных коэффициентов для подгонки корней приближенных теорий к корням трехмерной теории. В [2.9, 4.44] этот способ был применен при построении уравнения шестого порядка и в [1.70, 2.11] при построении уравнения десятого порядка. Уравнение, полученное в [1.70], хорошо аппроксимирует не только первый мнимый корень, но и четыре



следующих корня, образующих при малых  $\omega$  две комплексные пары (здесь речь идет о пяти корнях, поскольку остальные пять отличаются от них лишь по знаку).

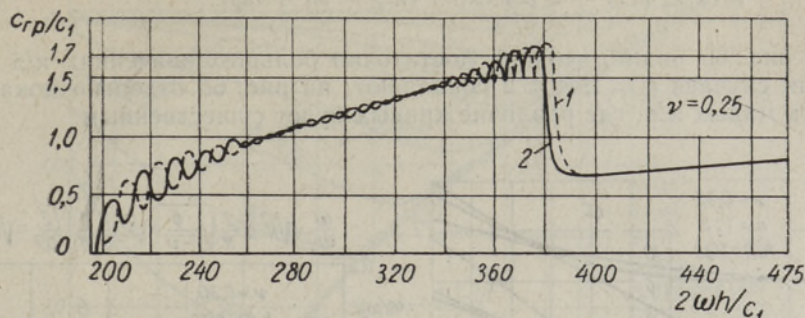


Рис. 5. Диаграмма групповых скоростей 50-й симметричной (кривая 2) и антисимметричной (кривая 1) мод плиты;  $h$  — полутолщина плиты. (Из работы [4.21]).

Теория, развитая в [1.70], была применена в [2.11] для конструирования форм собственных колебаний круглой плиты. При этом было установлено, что с комплексными ветвями связаны приконтурные колебания, которые наблюдались экспериментально в работе Е. Шо [4.47]. Для прямоугольной плиты аналогичное явление было исследовано в [4.3] непосредственно на основе первых комплексных ветвей корней трехмерной теории.

Заканчивая обзор по модам плиты, отметим, что почти полное отсутствие данных при комплексных  $s$  затрудняет решение задач переходного типа. О модах при комплексных  $s$  можно лишь констатировать, что в окрестности точки  $s = 0$  первые моды хорошо аппроксимируются двумерными теориями. (Например, теория типа Тимошенко обеспечивает хорошую аппроксимацию первых двух антисимметричных мод; метод степенных рядов — первой симметричной и первых двух антисимметричных мод). Кроме того, имеются некоторые данные о корнях уравнений (4.2), (4.5) при больших значениях  $s$  (см. § 5, п. 2 Б).

**4.3. Моды цилиндрических оболочек.** Характеристическое уравнение по точной трехмерной теории при осесимметричных деформациях цилиндрической оболочки было впервые дано Дж. Гхошом в 1923 г. [4.43]; исследование мод движения при помощи этого уравнения осуществлено недавно. Первая работа выполнена Р. Фейем в 1952 г. [4.49], однако она содержит ошибки [1.58]. Лишь в 1956 г. в работе Дж. Германа и И. Мирского [1.58] приводится правильная фазовая кривая для первой моды осесимметричного движения. Далее первые моды на основе точной теории интенсивно исследованы в работах И. Гринспона [4.50–4.54] и Д. Газиса [4.55–4.57]. В работе [4.54] приведены фазовые кривые для первой моды при  $n = 1, 2, 3$  ( $n$  — число циклической симметрии поперечных волн) и при различных относительных толщинах оболочки. В работе [4.51] были исследованы также следующие моды и распределение перемещений и напряжений по толщине оболочки на первой моде при  $n = 0, 1, 2$ . В [4.55–4.57] для десяти первых мод определены мнимые корни как функции от частоты при  $n = 1, 2$  и при  $h/R = 2, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{30}$  ( $R$  — радиус кривизны срединной поверхности,  $h$  — толщина оболочки).



На рис. 6 представлены для иллюстрации две диаграммы корней, полученные в [4.56] на основе трехмерной теории при

$$u_i(x, z, \varphi; t) = u_i(z) \exp i \left( x \frac{x}{h} + \omega t + n\varphi \right). \quad (4.8)$$

Из рис. 6а видно, что при достаточно больших значениях  $x/\pi$  кривые для случаев  $n=1, n=2$  совпадают; на рис. 6б отдельно показана область малых  $x/\pi$ , где различие кривых будет существенным.

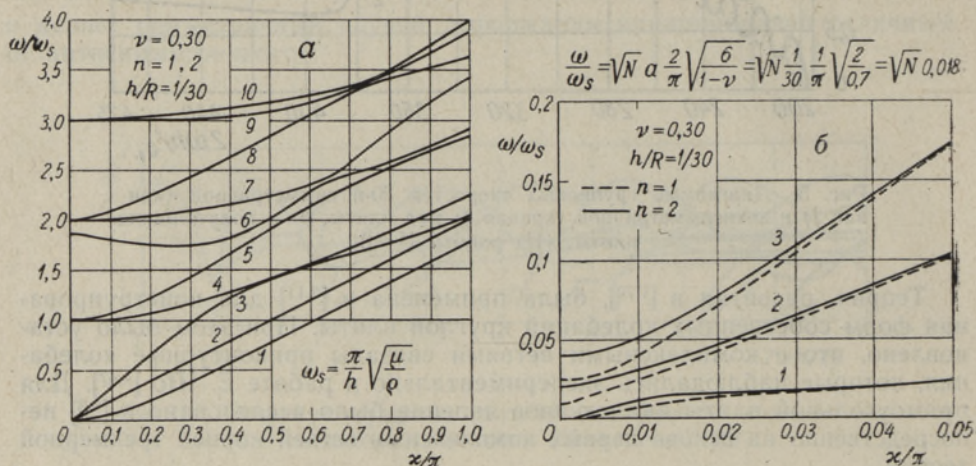


Рис. 6. Диаграммы корней первых циклосимметричных ( $n=1, 2$ ) мод замкнутой круговой цилиндрической оболочки (по трехмерной теории);  $h$  — толщина оболочки. (Из работы [4.56]).

Корни характеристических уравнений безмоментной теории и теории Кирхгоффа-Лява исследованы в работах [4.58–4.60]. В [4.60] приведены диаграммы вещественных, мнимых и комплексных корней характеристического уравнения теории Кирхгоффа-Лява при  $0 < n \leq 20$  для широкого диапазона частот

$$0 < N \leq a^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.9)$$

$$N = \frac{(1 - \nu^2)R^2 \rho \omega^2}{E}, \quad a = \frac{h}{\sqrt{12} R} \quad (4.10)$$

(здесь  $h$  — толщина оболочки).

Численные результаты работы [4.60] в сочетании с результатами качественного анализа [4.61] представляют определенный интерес с точки зрения метода расчленения напряженных состояний. В частности, в работах [4.60, 4.61] было установлено, что при  $N \ll 1$  две пары корней (корни одной пары отличаются лишь по знаку) могут быть приближенно определены из уравнений безмоментной или полубезмоментной теории (в зависимости от значения  $n, a$ ), а остальные две пары корней почти совпадают с таковыми в статической теории простых краевых эффектов. В работах [4.60, 4.61] также приведены приближенные выражения корней при  $N \gg 1$ . При  $N \sim 1$  поведение корней наиболее сложно, ибо при  $N=1$  имеет место ветвление решений, что вызывает существенные трудности при расчленении напряженных состояний (см. § 6).



На рис. 7а, б, в приведены диаграммы, заимствованные из работы [4.60].

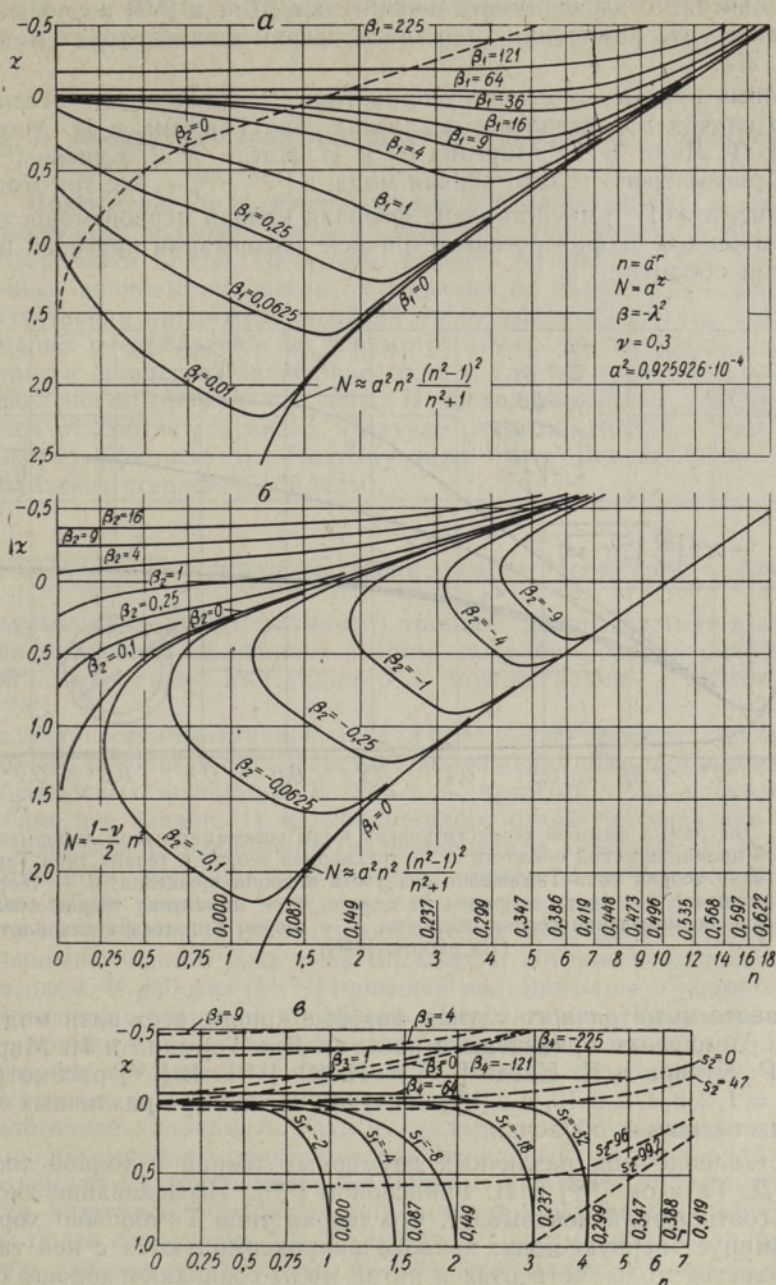


Рис. 7. Диаграммы квадратов корней характеристического уравнения теории Кирхгофа-Лява для круговой цилиндрической оболочки: на в — комплексные квадраты корней  $\beta_3, \beta_4 = s_1 \pm is_2$ . (Из работы [4.60]).

Имеется также ряд работ, посвященных анализу корней характеристических уравнений уточненных теорий.

М. Джангер, Ф. Розато [4.62] и П. Смит [4.63] исследовали фазовые кривые, исходя из уравнений, полученных Р. Кеннардом [1.14]. В [4.62] изу-



чены фазовые кривые первых двух мод в осесимметричном случае и дано сравнение с экспериментальными данными; в [4.63] изучены фазовые кривые и отношения амплитуд перемещений трех мод при  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Фазовые кривые на основе теории типа Тимошенко для осесимметричного случая представлены в работах Дж. Германа и И. Мирского [1.58, 1.64], Т. Лина и Г. Моргана [1.57], П. Нагди и Р. Купера [1.85]. В [1.58, 1.64] рассмотрена только первая мода, в [1.57, 1.85] — все три моды.

На рис. 8 из [1.58] представлена фазовая кривая первой моды точной и приближенных теорий осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки.

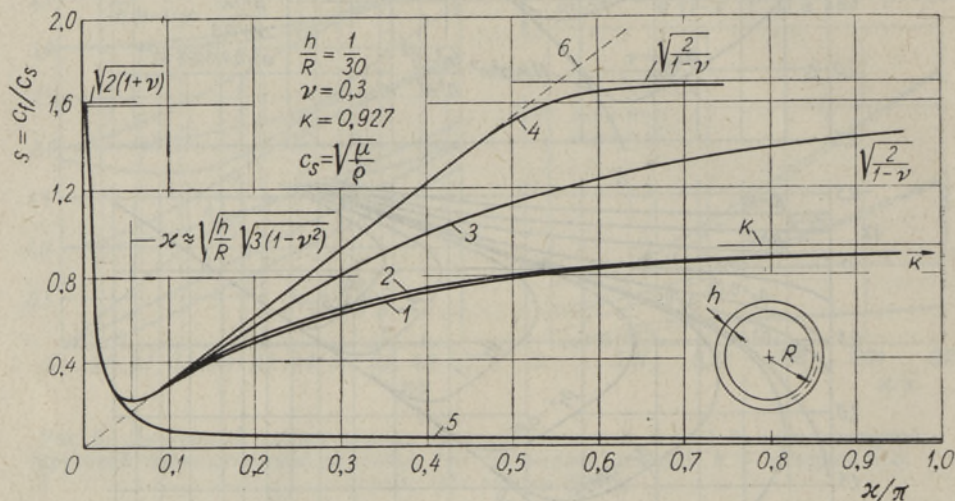


Рис. 8. Диаграмма фазовой скорости первой моды осесимметричной деформации круговой цилиндрической оболочки: 1 — трехмерная теория и теория типа Тимошенко; 2 — теория типа Тимошенко без учета инерции вращения; 3 — теория типа Тимошенко без учета поправки от сдвига; 4 — моментная теория оболочек; 5 — безмоментная теория оболочек; 6 — теория Кирхгофа для плит. (Из работы [1.58]).

Для неосесимметричного случая фазовые кривые всех пяти мод теории типа Тимошенко приведены в работах Дж. Германа и И. Мирского [1.59], Р. Купера и П. Нагди [1.86] и И. Ю [1.61]. В [1.59] рассмотрены случаи  $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10$ , а в [1.61] — случаи  $n = 2, 5$  при различных относительных толщинах оболочки.

Сопоставление мод различных двумерных теорий и точной теории сделано Д. Газисом [4.56] и И. Гринспоном [4.52]. Исследование дисперсионных соотношений показывает, что теория типа Тимошенко хорошо аппроксимирует первую моду; неплохо аппроксимируются с ней также вторая и третья моды; четвертая и пятая моды совпадают хорошо с соответствующими модами точной теории только при длинных волнах. Хотя частоты при довольно коротких волнах определяются сравнительно точно при помощи модели Тимошенко, распределение перемещений и напряжений по толщине оболочки сильно отличаются от точной теории.

Групповые скорости изучены только на базе теории типа Тимошенко в работе И. Ю [1.61].

Простые частные случаи движения цилиндрических оболочек: чисто



радиальное движение — исследовано в работах [4.64, 4.65]; радиально-сдвиговое — в работе [4.66]; кручение — в работах [4.67, 4.68].

С рассматриваемыми проблемами связаны также работы [4.69–4.71].

## § 5. Конкретные задачи о переходных волновых процессах

**5.1. Применение приближенных теорий к расчету плит.** Изучены задачи, в которых волновой процесс зависит от одной координаты срединной поверхности плиты. Их можно разбить на две группы: 1) осесимметричные волновые процессы, зависящие от радиуса  $r$  и времени  $t$ , где возмущение приложено в одной точке срединной поверхности или равномерно распределено по периметру отверстия малого радиуса  $r_0$ ; 2) волновые процессы, зависящие от  $x$ ,  $t$ , где возмущение равномерно распределено по прямой  $x = \text{const}$ . В последнем случае уравнения отличаются от соответствующих в случае стержня (балки) лишь по некоторым коэффициентам.\* Поэтому ниже будет отмечен и ряд работ, относящихся к стержням (балкам).

### *А. Применение элементарной теории сжатия-растяжения и кручения*

В случае продольного волнового процесса задача состоит в интегрировании уравнения колебания струны, подробно рассматриваемого в учебной литературе. Ряд примеров можно найти в монографиях [0.2, 0.7, 3.24].

В случае осесимметричной задачи волновой процесс описывается уравнением, которое в пространстве изображения Лапласа имеет решение в бесселевых функциях. В 1948 г. А. Кромм [5.1, 5.2] рассматривал следующие две задачи: 1) на краю малого отверстия внезапно прилагается нормальное, равномерно распределенное давление; 2) краю малого отверстия внезапно сообщается скорость заданной (неизменной) величины. Для решения этих задач было применено преобразование Лапласа по времени. В процессе обращения было получено интегральное уравнение первого рода типа Вольтерра, которое решалось численным методом. В работах [5.1, 5.2] приведен ряд диаграмм и подробно рассмотрен вопрос о разрывах на фронте. (Результаты А. Кромма, конечно, следует принимать с существенными оговорками, поскольку по точной теории фронт движется со скоростью  $c_1$ , а не со скоростью  $c_*$  (4.6), как это следует из элементарной теории.)

Аналогичной задачам А. Кромма является задача о волновом процессе при штамповке отверстия в предварительно напряженной плите, рассмотренная Ю. Микловичем [5.3]. Однако принятая им методика вычисления интеграла обращения при помощи подходящей деформации контура более стандартна.\* Х. Сельберг [5.4] рассматривал задачу, аналогичную задачам А. Кромма, на основе уравнений плоской деформации.

Близка к исследованиям А. Кромма работа [5.5] Ж. Гудьера и В. Джасмана, где кроме нормальной нагрузки рассматривался и случай нагрузки крутящего типа.

\* Например, продольные волны распространяются со скоростью  $c_*$  вместо  $c_0$  в случае стержня [см. формулы (4.6), (4.7)].

\* В работе [5.3] дана диаграмма для кольцевых напряжений  $\sigma_{\theta\theta}$ , полученная численным интегрированием по мнимой оси (с обходом полюса в точке  $s = 0$ ).



В работе [5.6] рассматривался переходный волновой процесс, возникший в круглой плите при внезапном удалении нагрузки, равномерно распределенной по периметру плиты. Задача была изучена методом разложения по собственным функциям.

Более точные модели симметричных деформаций плит до сих пор применены только при изучении собственных колебаний. Следует отметить, что начатое Релеем [4.58] и Лявом [5.7] уточнение теории стержней кругового поперечного сечения дало к настоящему времени ряд моделей, которые использованы при анализе продольных переходных волновых процессов в работах [4.39, 5.8–5.11].

### *Б. Применение элементарной теории изгиба*

На основе элементарной теории изгиба решены многочисленные задачи расчета плит и балок на заданную импульсную нагрузку [3.24, 5.12–5.22], а также некоторые задачи удара [5.23, 5.24]. При применении операционного исчисления в задачах расчета на импульсную нагрузку, как правило, удавалось точно выполнить обращение контурных интегралов (в изученных и табулированных функциях).

Относительно этих решений отметим: 1) поскольку уравнение теории Кирхгоффа параболическое, то его решения не имеют волнового характера, — возмущение распространяется с бесконечной скоростью. Это, конечно, противоречит физическим соображениям и говорит о том, что полученные решения имеют ограниченную область применимости. Указанное явление вызывает также формальные затруднения при изучении волнового процесса в объектах конечных размеров: нет возможности применить классическую формулировку задачи отражения волн от краев; 2) в случае бесконечного или полубесконечного объекта под действием импульса типа Хевисайда теория Кирхгоффа дает удовлетворительные результаты достаточно далеко от источника и за фронтом волны сдвига; 3) в случае объекта и импульса конечной длины можно ожидать (особенно при «плавном» импульсе и с учетом затухания) практически приемлемые результаты, если продолжительность импульса велика по сравнению с временем, требуемым для прохождения упругой волной пути, равного характерному размеру (длине) плиты.

### *В. Применение теории типа Тимошенко*

Я. С. Уфлянд был первым, применившим [1.49] теорию типа Тимошенко к анализу переходных волновых процессов, вызванных сосредоточенной импульсной нагрузкой в бесконечной плите и балке. Он использовал преобразование Лапласа. Поскольку полученные интегралы Меллина (в отличие от теории Кирхгоффа) не поддались обращению в замкнутом виде, то Я. С. Уфлянд предложил приводить их к суммам определенных интегралов по берегам срезов плоскости  $s$  ( $s$  — параметр преобразования Лапласа), обеспечивающих однозначность подынтегральных функций. На основе этих интегралов в [1.49] были получены некоторые численные данные.

Позже различные аспекты применения теории плит и балок типа Тимошенко рассматривались в многочисленных работах [2.4, 3.32–3.34, 3.42–3.46, 5.25–5.37], в том числе задача расчета бесконечной плиты под действием сосредоточенной силы — в работах [5.29, 5.33, 5.35, 5.37].



В работах [2.4, 5.26] был применен метод разложения по собственным функциям. Р. Андерсон [5.26] рассматривал балку под действием сосредоточенной нагрузки, а М. В. Дубинкин [2.4] — свободно опертую квадратную плиту под действием мгновенного импульса, распределенного по всей поверхности плиты. В работе [5.29] было использовано неоднородное дифференциальное уравнение движения и получено решение задачи расчета плиты на сосредоточенную нагрузку при помощи предельного перехода от распределенной нагрузки.

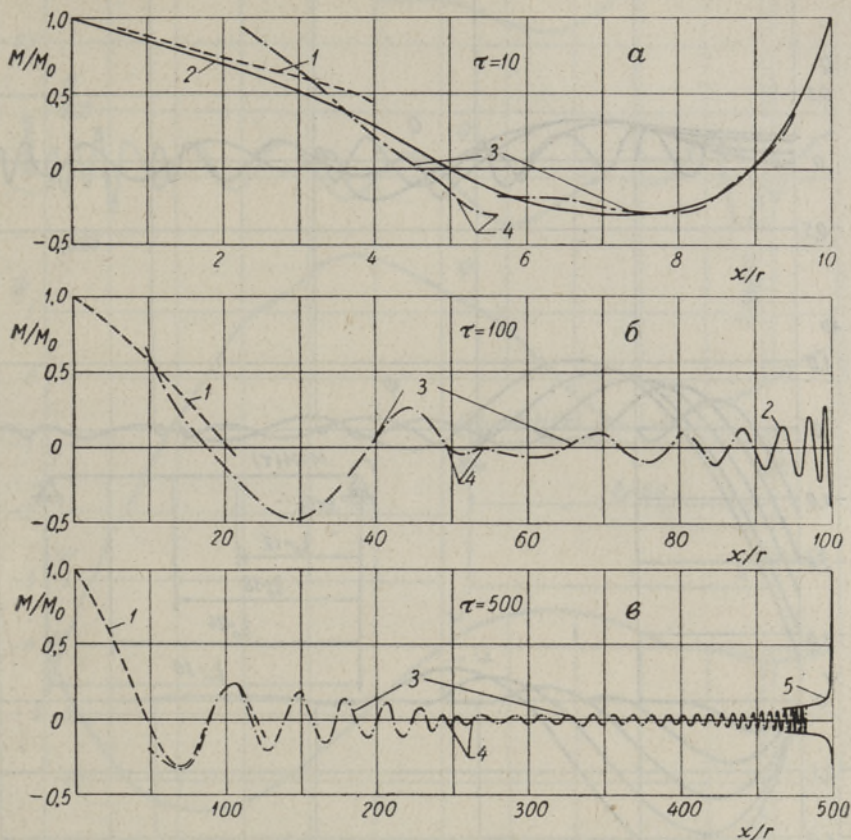


Рис. 9. Диаграмма изгибающего момента  $M$  по теории типа Тимошенко при  $\tau=10$ ,  $\tau=100$  и  $\tau=500$  для полубесконечной балки, нагруженной моментом  $M_0$ , внезапно приложенным к ее концу:  $\tau = c_n t/r$ ,  $r$  — радиус инерции поперечного сечения,  $c_n$  — скорость распространения первого фронта в теории типа Тимошенко; 1 — элементарная теория балок; 2 — «точное» решение (результаты численного интегрирования по берегам срезов комплексной плоскости); 3 — метод стационарной фазы; 4 — фаза Эри; 5 — огибающая. (Из работы [3.32]).

В работах [3.32–3.34, 5.25, 5.27, 5.31–5.33, 5.35, 5.37] были решены конкретные задачи при помощи операционного исчисления. Неточности, допущенные в первых работах [1.49, 5.25] при применении преобразования Лапласа, были исправлены в работах [5.27, 5.31]. В основном использовалось преобразование Лапласа [3.32, 3.33, 5.25, 5.27, 5.31, 5.33, 5.35, 5.37], но нашло применение и преобразование по координате [3.32, 3.34, 5.32]. В частности, преобразование Фурье по координате применялось в работах [3.32, 5.32] при построении формальных решений в виде контурных интегралов, которые были обращены методом перевала.



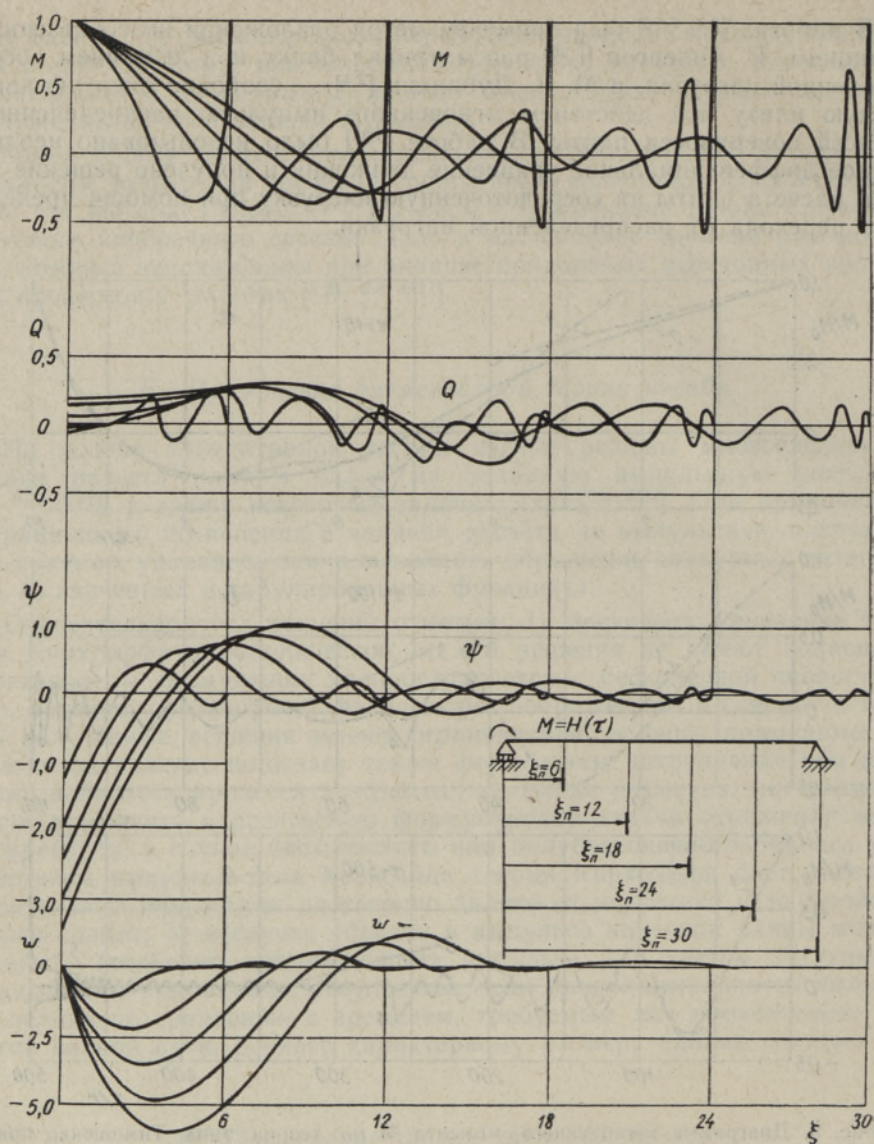


Рис. 10. Диаграмма  $M$ ,  $Q$ ,  $\psi$ ,  $w$  переходного процесса деформации свободно опертой плиты-полосы (по теории типа Тимошенко), нагруженной краевым моментом  $M=H(\tau)$ . Показаны пять моментов времени до отражения волны изгиба от противоположного края. (Из работы [3.48]).

Численная информация получена приближенными методами обращения (см. § 3 п. 2). Методом интегрирования по берегам срезов плоскости  $s$  получен ряд диаграмм в работе [3.33]. Другие (асимптотические) методы широко использованы в работе В. Флюгге и Э. Заяца [3.32], которая отличается также наглядными диаграммами (для изгибающего момента), составленными для полубесконечной балки, нагруженной в конце внезапно приложенным изгибающим моментом. Для иллюстрации на рис. 9 приведены некоторые из этих диаграмм. Многочисленные диаграммы представлены Ю. Микловицем [5.37] для бесконечной плиты под действием внезапно приложенной сосредоточенной силы.



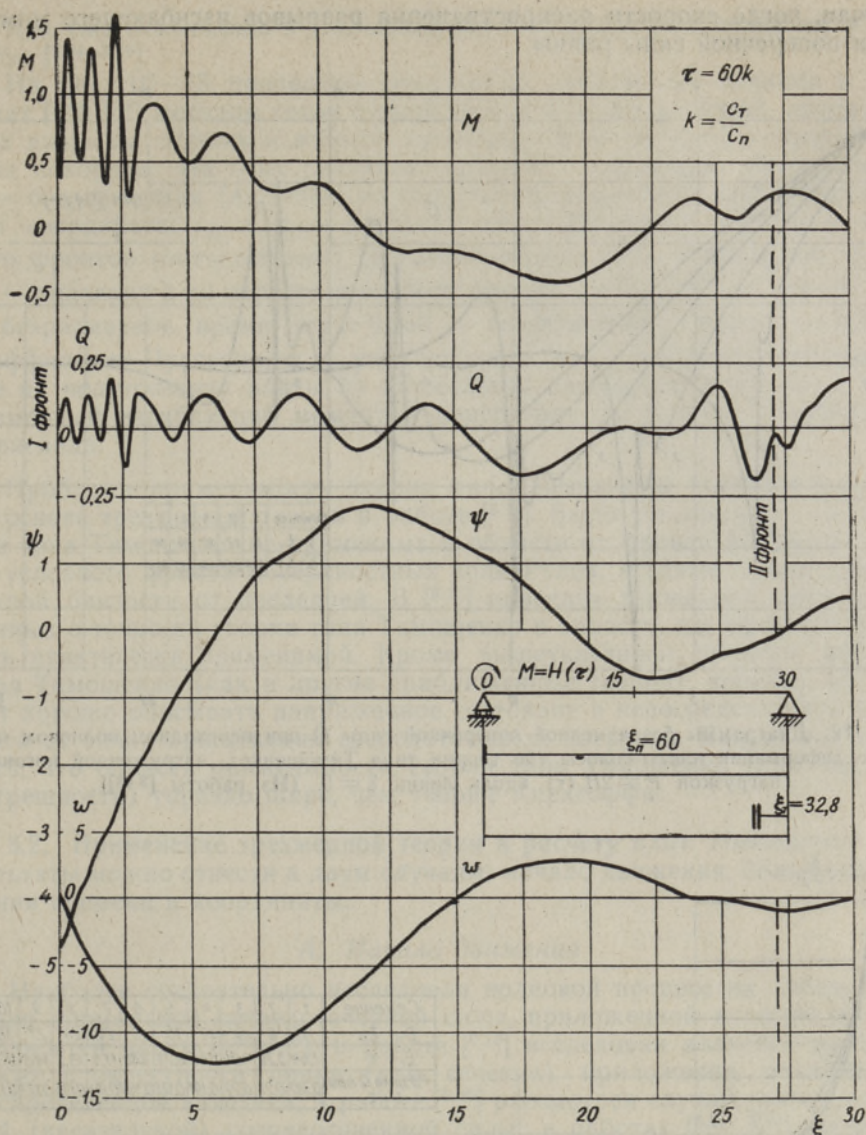


Рис. 11. Диаграммы  $M$ ,  $Q$ ,  $\psi$ ,  $w$  переходного волнового процесса деформации свободно опертой плиты-полосы (по теории типа Тимошенко), нагруженной краевым моментом  $M = H(\tau)$ . Показан момент времени, когда волна изгиба, отраженная от края  $\xi = 30$ , достигла края  $\xi = 0$ .  
(Из работы [3.48]).

В работе [5.37] приведены также некоторые рассуждения о границах области применимости теории типа Тимошенко.

Проблема разрывов на фронтах в зависимости от приложенной нагрузки рассматривалась в работах [3.42–3.45]. В работах [3.42, 3.43] энергетическим методом был получен ряд диаграмм для начала движения балки (зависимость от  $x$  была аппроксимирована).

Все вышеотмеченные численные результаты относятся к бесконечным или полубесконечным объектам. В работе [5.28] была исследована балка конечной длины, однако для довольно отвлеченного от практики



случая, когда скорости распространения разрывов изгибающего момента и поперечной силы равны.

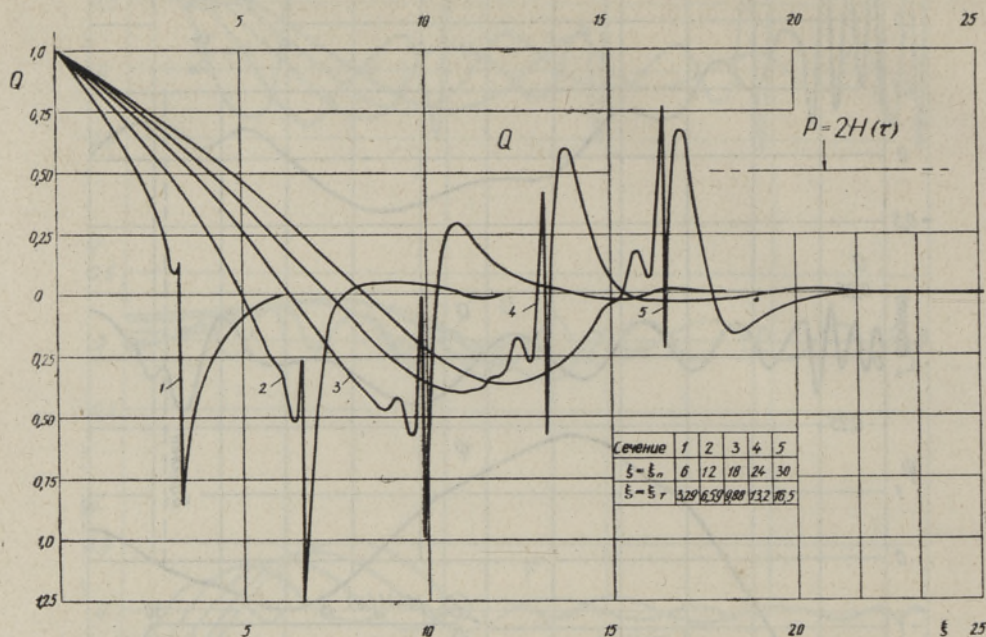


Рис. 12. Диаграммы безразмерной поперечной силы  $Q$  при переходном волновом процессе деформации плиты-полосы (по теории типа Тимошенко), нагруженной погонной нагрузкой  $P = 2H(\tau)$  вдоль линии  $\xi = 0$ . (Из работы [3.48]).

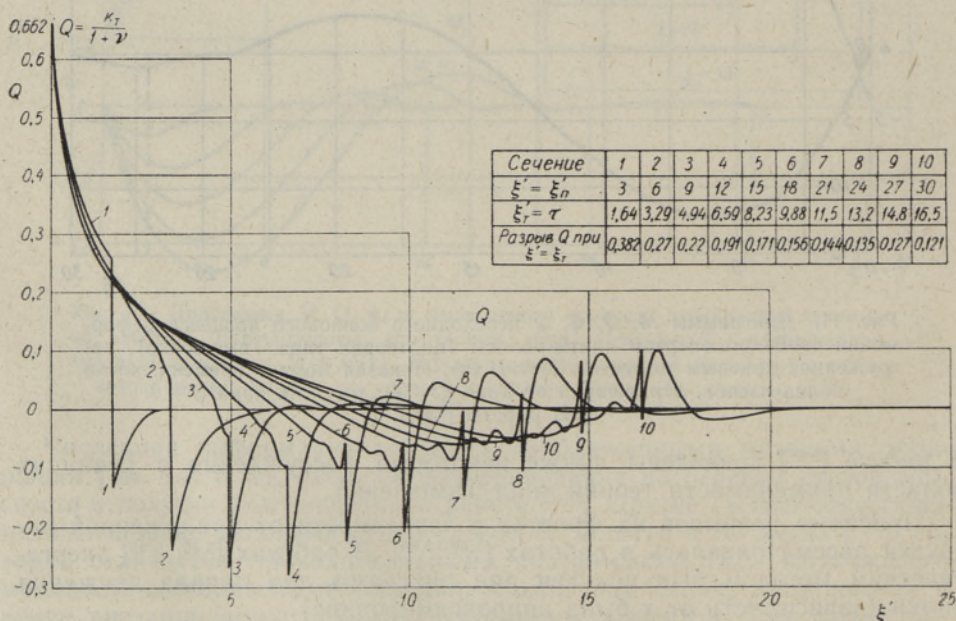


Рис. 13. Диаграммы безразмерной поперечной силы  $Q$  при переходном волновом процессе деформации плиты (по теории типа Тимошенко), нагруженной силой  $P = H(\tau)$ , распределенной по малому кругу радиуса  $\xi_0$ ;  $\xi = \xi - \xi_0$ . (Из работы [3.49]).



Как уже отмечалось в § 3, метод характеристик был применен в работах [3.44–3.46].

На рис. 10–13 приведены результаты, полученные недавно в работах [3.48, 3.49] методом сеток с выделением частных решений, переносящих разрывы первых и вторых производных нормального прогиба и угла поворота. На этих рисунках приняты следующие обозначения:  $\xi$  — безразмерная (деленная на полутолщину плиты  $h$ ) пространственная координата,  $c_n$  и  $c_T$  — скорости распространения первого и второго фронтов соответственно (согласно теории типа Тимошенко),  $\xi_n$  и  $\xi_T$  — значения  $\xi$  до первого и второго фронта соответственно,  $\tau = th^{-1} c_T$  — безразмерное время,  $\kappa_T = 0,860$  — коэффициент сдвига,  $\nu = 0,3$  — коэффициент Пуассона,  $\psi$  — угол поворота,  $w$  — безразмерное (деленное на полутолщину плиты  $h$ ) нормальное перемещение,  $M$ ,  $Q$  — безразмерный изгибающий момент и поперечная сила,  $H(\tau)$  — функция Хевисайда.

Проблема применимости теории типа Тимошенко рассматривалась на основе трехмерной теории в работе [3.15]. Было установлено, что теория типа Тимошенко не применима в области от фронта волны сжатия до условного фронта поверхностных волн Релея, а также в непосредственной близости от последней. В [3.15] приведен также ряд численных данных о точности теории типа Тимошенко в области, где ее можно считать практически применимой. Кроме вышеуказанной области, теория типа Тимошенко (как и другие приближенные теории), конечно, не может хорошо описывать напряженное состояние в непосредственной близости от точки приложения сосредоточенной нагрузки. Важно подчеркнуть, что область применимости теории типа Тимошенко (при той же погрешности) гораздо шире, чем теории Кирхгоффа.

**5.2. Применение трехмерной теории к расчету плит.** Имеющиеся результаты можно отнести к двум случаям: начало движения, большие значения времени и координаты.

#### А. Начало движения

Наиболее обстоятельно исследован волновой процесс на линии действия нормальной сосредоточенной силы, приложенной к одной из поверхностей плиты [5.38–5.45]; в работе [3.13] исследован волновой процесс также в окрестности линии (или сечения) приложения равномерно распределенной нагрузки; в работе [5.46] рассмотрен случай тангенциальной (касательной) сосредоточенной силы; в работах [5.47, 5.48] исследован случай нагрузки, распределенной по кругу; в работах [1.40, 3.16] рассмотрена произвольная нормальная нагрузка; в работе [3.5] изучен случай сосредоточенного внутреннего источника.

За исключением работ [1.40, 3.16], использующих формальные решения в виде двукратных контурных интегралов, главным образом, для качественного анализа применимости приближенных теорий, все вышеуказанные работы посвящены построению процесса распространения и отражения элементарных  $P$ - и  $S$ -волн. В большинстве случаев схема решения следующая: вначале составляется формальное решение в виде двукратных контурных интегралов, которые затем обращаются методом Каньяра; для применения метода Каньяра подынтегральные функции (изображения двукратного преобразования) разлагаются в подходящие ряды экспоненциальных функций. После выполнения обращения оказывается, что каждому члену таких рядов соответствует одна элементарная волна.



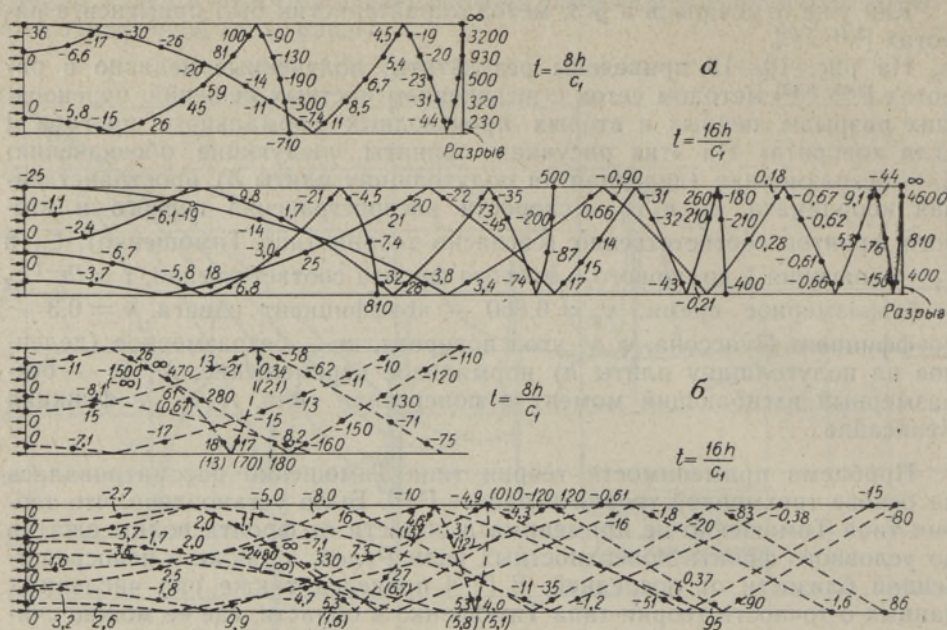


Рис. 14. Фронты элементарных волн в начале движения полубесконечной плиты толщиной  $2h$ , нагруженной импульсом  $\frac{\partial u}{\partial t} = c_1 H(t)$ , приложенным к ее концу. Амплитуды на фронтах умножены на  $1000 c_1^{-2} \sqrt{\frac{h}{c_1}}$ . В скобках даны амплитуды двусторонних фронтов волн сдвига: а — амплитуды на фронтах волн сжатия; б — амплитуды на фронтах волн сдвига. (Из работы [3.13]).

Отметим более подробно изученные задачи. А. Менчер [5.38] изучал смещение в эпицентре при точечном источнике произвольных волн, кусочнонепрерывно зависящих от времени. Л. Кнопофф [5.39] и Л. Кнопофф и Р. Гильберг [5.40] изучали волновой процесс при сосредоточенной нормальной нагрузке, приложенной к одной из поверхностей, и дали решение для эпицентра и на противоположной плоскости плиты. К. Броберг [5.41] дал решение для вертикальных перемещений, а Н. Дейвидс [5.42] и А. Пайтел и Н. Дейвидс [5.43] — для нормальных напряжений на линии действия нормальной силы. Аналогичная задача в случае нагрузки, распределенной по кругу, была рассмотрена в [5.48], где метод типа Каньяра дал решение в виде интегралов, которые были вычислены методом перевала. Недавно Р. Розенфельд и Ю. Микловиц [3.13] изучали следующие задачи: 1) плита нагружена нормальными напряжениями по краю, 2) краю дана нормальная скорость, 3) плита нагружена на одной поверхности нормальной нагрузкой, равномерно распределенной по прямой. В двух первых задачах плита рассматривается как полубесконечная, а в третьей — как бесконечная. При решении задачи по вышеуказанной стандартной схеме (с применением метода Каньяра) появились решения в виде интегралов, которые были вычислены методом перевала. Исследуя волновой процесс до нескольких толщин от места приложения нагрузки, Р. Розенфельд и Ю. Микловиц [3.13] определили месторасположение и интенсивность фронтов элементарных волн (см. рис. 14).

Из работы [3.13] следует, что: а) двумерные теории неприменимы в начале движения; б) исследование начала движения сложно, причем



результаты (см. рис. 14) очень чувствительны к малым изменениям нагрузки.

Хотя численные результаты для рассматриваемых задач были получены недавно, следует отметить, что ряд коренных вопросов методики был проработан Г. И. Петрашенем еще в 1957 г. [0.8 сб. 1].

К. И. Огурцов [3.10] рассматривал в постановке, аналогичной вышеописанной, несколько своеобразную задачу откола материала при действии сосредоточенного импульса; при этом была критически проанализирована акустическая теория откола.

Отметим также работу Х. Перси [4.13], посвященную случаю периодической нагрузки заданной частоты.

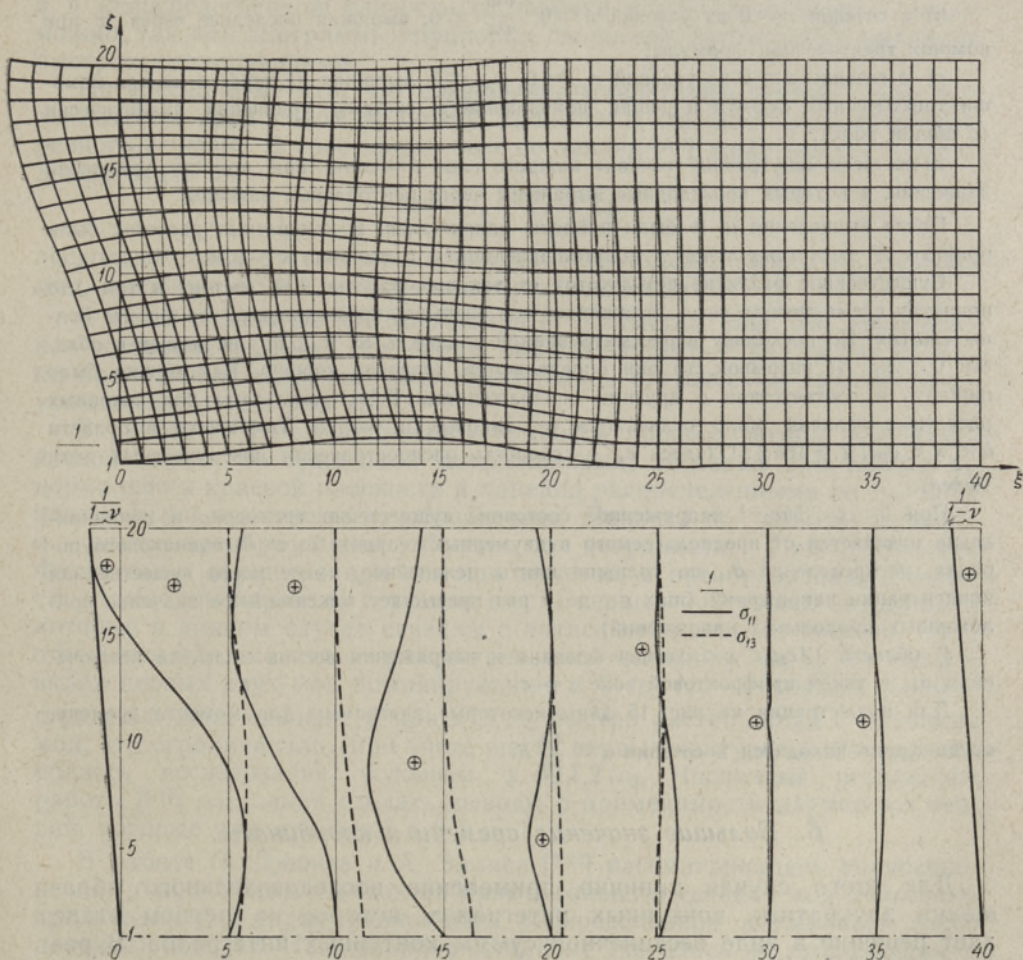


Рис. 15. Начало движения плиты-полосы при краевых условиях  $\sigma_{11}^{\text{действ}}(0, \xi; t) = \frac{Eh\zeta}{1-\nu^2} N(t)$ ,  $w(0, \xi; t) = 0$ . Даны диаграммы, полученные в [3.50] методом трехмерных сеток для верхней половины плиты-полосы в момент времени, когда первый фронт находится в сечении  $\xi = \frac{x}{h} = \frac{40}{19}$ .

В верхней части рисунка показано искажение сетки (перемещения), а в нижней — диаграммы безразмерных напряжений  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\text{действ}} E^{-1}(1+\nu)$ .



После сдачи рукописи в редакцию в Институте кибернетики АН ЭССР были проведены расчеты методом трехмерных сеток [3.50]. По продольной координате  $x$  и нормальной координате  $z$  были выбраны одинаковые шаги, а по времени (для величины  $tc_2$ ) — шаг в два раза короче. Рассматривалось начало движения плиты, нагруженной в сечении  $x=0$  продольными напряжениями  $\sigma_{xx}=AzH(t)$  (здесь  $A=\text{const}$ ). Расчеты были проведены по слоям времени  $t=\text{const}$  для верхней половины плиты. Продольные перемещения  $u$  и нормальные перемещения  $w$  были определены следующим образом:

а) в сечении  $x=0$  — из краевых условий  $w=0$ ,  $\sigma_{xx}=AzH(t)$ , выражая второе из них через  $u$  при помощи правой трехточечной конечно-разностной формулы;

б) в сечении  $x=tc_1$ , по условиям  $u=w=0$ , и в сечении  $x=tc_1-l_x$  (здесь  $l_x$  шаг по координате  $x$ ) аналогично (а) из условий  $\sigma_{xx}(tc_1, z; t)=AzH(t)$ ,  $\sigma_{zx}(tc_1, z; t)=0$ ;

в) в сечении  $z=0$  из условий  $u=0$ ,  $\frac{\partial w}{\partial z}=0$ , выражая последнее через  $w$  при помощи трехточечной формулы;

г) в сечении  $z=h$  из условий  $\sigma_{zz}=0$ ,  $\sigma_{zx}=0$ , выражая их через  $u$ ,  $w$  при помощи трехточечных формул и решая появляющиеся системы уравнений аналитически (в общем виде);

д) во всех «внутренних точках» каждого слоя  $t=\text{const}$  при помощи уравнений движения, в которых производные выражены через центральные разницы.

После вычисления  $u$ ,  $w$  были найдены напряжения. В конкретных расчетах были приняты 20 расчетных точек в полутолщине плиты и выбрано  $\nu=0,30$ .

Существенное различие результатов от таковых работы [3.13] состоит в том, что принятая схема метода сеток сглаживает все разрывы, кроме разрыва на фронте волны сжатия. Но поскольку в рассматриваемой задаче  $u$ ,  $w$ ,  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{zx}$  не имеют в области  $0 < x < c_1 t$  разрывов, то они определяются довольно хорошо. Как можно было ожидать в соответствии с другими соображениями [3.15], результаты для основных расчетных величин мало отличаются от таковых в теории Тимошенко в области  $h \lesssim x \lesssim c_R t$ ,  $t \geq 10hc_2^{-1}$  (здесь  $c_R$  — скорость распространения поверхностных волн Релея).

При  $0 < t < 5hc_2^{-1}$  напряженное состояние существенно трехмерно и принципиально отличается от предполагаемого в двумерных теориях:  $u$ ,  $w$  — одинакового порядка, распределение  $\sigma_{11}$  по толщине плиты нелинейное, имеет место существенная концентрация напряжений (max  $\sigma_{11}$  до 5 раз превышает максимальное значение приложенных продольных напряжений).

В области  $1,1c_2 t < x < c_1 t$  перемещения и напряжения весьма малы, за исключением  $\sigma_{11}$  в узкой прифронтальной зоне  $x \sim c_1 t$ .

Для иллюстрации на рис. 15 даны некоторые диаграммы для момента времени, когда фронт находится в сечении  $x = \frac{40}{19} h$ .

### Б. Большие значения времени и координаты

Для этого случая типично применение последовательного обращения двукратных контурных интегралов, которое на первом этапе дает решение в виде бесконечной суммы контурных интегралов. В работах [3.11, 3.12, 3.15] был получен ряд численных данных в результате приближенного обращения некоторого числа первых интегралов методом перевала.

Ю. Миклович [3.11, 3.12] исследовал осесимметричный волновой процесс, возбужденный в бесконечной плите действием двух сосредоточенных сил, приложенных к свободным поверхностям плиты и направленных друг к другу. Были применены преобразование Лапласа по времени и преобразование Ханкеля по координате. Первое обращение выполнялось при помощи вычетов, второе — методом перевала (с точностью



трех первых контурных интегралов). В данном случае возбуждаются только моды, симметричные относительно срединной поверхности. При использовании метода перевала был использован малочастотный участок диаграммы групповых скоростей первых трех симметричных мод, где максимальное значение групповой скорости соответствует первой моде в точке  $\omega = 0$  и равен величине  $c_*$  (4.6). В работе [3.12] линия  $r = c_* t$  называется «фронтом» и указывается, что вблизи «фронта» доминируют малочастотные (длинные) волны первой моды. Фактически фронт перемещается со скоростью  $c_1$ , и в области  $c_1 t \geq r > c_* t$  (т. е. впереди «фронта» в смысле работы [3.12]) движутся высокочастотные волновые группы более высоких мод. Следует отметить, что построение волнового процесса в этом диапазоне методом перевала затруднительно и в непосредственной близости от фронта  $r = c_1 t$  практически невозможно, так как диаграммы групповых скоростей высоких мод являются быстроосциллирующими.

Интересно отметить, что совершенно аналогично обстоит дело при переходном продольном волновом процессе в стержне кругового поперечного сечения. В свое время был поставлен [0.2] даже вопрос о парадоксе, будто бы

$$\max c_{\text{гр}} = c_0 < c_1,$$

поскольку тогда отсутствовали данные о групповых скоростях высоких мод, имеющих более высокие значения максимума [3.25].

В связи с работой Ю. Микловица [3.12] отметим еще, что напряженное состояние не имеет тенденции быстро затухать с удалением от точки приложения нагрузки, хотя последняя в статическом смысле самоуравновешена (см. рис. 16).

В работе [3.15] рассматривался волновой процесс изгиба полубесконечной плиты, возбужденной напряжениями, внезапно приложенными нормально к краевой плоскости и линейно распределенными по толщине плиты. Были применены преобразование Лапласа по времени и синус-и косинус-преобразования Фурье по координате. Преобразование Фурье было обращено при помощи вычетов, а преобразование Лапласа — методом перевала с учетом шести первых контурных интегралов, которые в данном случае связаны с антисимметричными модами. Роль отдельных мод зависит от рассматриваемой величины, но, грубо говоря, вклад первых двух мод доминирует при  $x \leq tc_2$  ( $c_2$  — скорость распространения волн сдвига), а при  $x > tc_2$  быстро растет вклад следующих мод, что ограничивало (при учете шести первых контурных интегралов) область исследования условием  $x \leq 1,2 tc_2$ . Численные результаты работы [3.15] позволили сделать выводы о применимости двумерных теорий, которые уже отмечены в § 5 п. 1.

В работе О. Джонса и А. Эллиса [3.22] рассматривалась полубесконечная балка тонкого высокого прямоугольного сечения под действием приложенной к торцу равномерно распределенной нормальной (продольной) нагрузки. Напряженное состояние считалось не изменяющимся по толщине. Задача отличается от соответствующей задачи расчета полубесконечной плиты только тем, что вместо плоской деформации рассматривается плоское напряженное состояние. Приближенное решение было получено в [3.22] аналогично работам [3.11, 3.15]. Работа [3.22] содержит диаграммы корней  $\chi_i(\omega)$  и их производных, которые были построены на основе уравнения, отличающегося (в результате замены состояния плоской деформации плоским напряженным состоянием) от уравнения Релея-Лэмба (4.5) некоторыми коэффициентами. Теоретически полученные результаты сопоставлены в работе [5.49] с экспери-



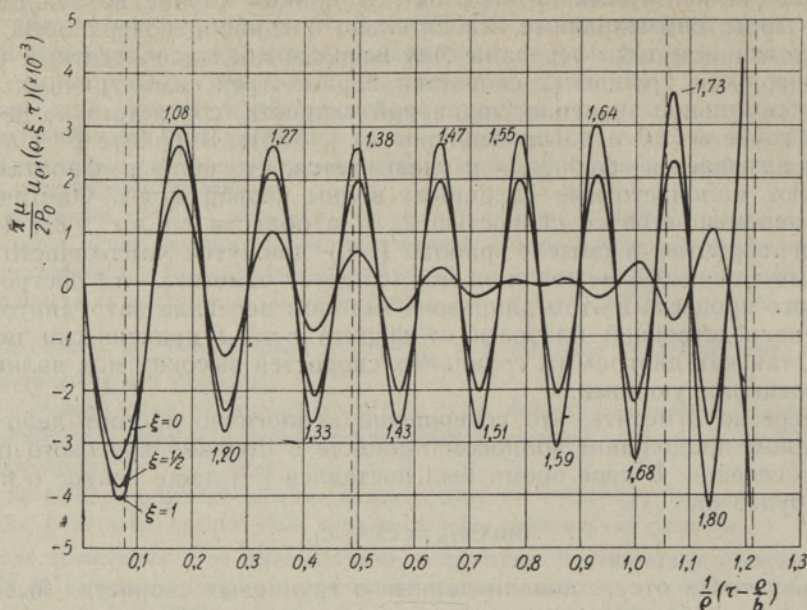


Рис. 16. Радиальное перемещение  $u_r$  в бесконечной плите на станциях  $q = \frac{r}{h} = 20$ ,  $\xi = \frac{z}{h} = 0, 1/2, 1$  при двух сосредоточенных и направленных друг к другу нормальных силах  $P = P_0 H(t)$ , действующих в точках  $q = 0$ ,  $\xi = \pm 1$ . Здесь  $h$  — полутолщина плиты;  $r$  — радиальная координата;  $z$  — нормальная координата;

$$b = \sqrt{\frac{2}{1-\nu}}; \tau = \frac{tc_2}{h}. \text{ (Из работы [3.12]).}$$

ментальными. Хотя в теоретических расчетах предполагалось, что на конце балки отсутствуют тангенциальные перемещения, а при эксперименте почти отсутствовали тангенциальные напряжения, О. Джонс и А. Эллис отмечали [5.49] хорошее совпадение результатов. Это, по-видимому, говорит о второстепенности влияния второго краевого условия.\*

Что касается разрывов на фронте волны сжатия и волнового процесса поблизости от него при больших значениях времени и координаты, то конкретные данные для плит и оболочек в литературе почти отсутствуют. Однако многочисленные исследования в теоретической сейсмологии [0.8, 3.26–3.31] подготовили методику для случая, когда волновой процесс зависит от одной координаты срединной поверхности (см. § 3 п. 2).

С точки зрения анализа вклада отдельных мод в быстроизменяющиеся прифронтовые напряженные состояния и оценки точности энергетических двумерных теорий, аппроксимирующих вклад первых мод, заслуживает внимания метод, промежуточный между двумя основными, использованными в литературе, указанной в § 3. Именно можно поступить следующим образом: после точного обращения преобразования по координате по вычетам (метод разложения по модам) вычисля-

\* В теории были приняты условия, не реализуемые в эксперименте, поскольку отсутствует методика решения (см. § 3 п. 2) для случая, когда оба крайевые условия заданы в напряжениях.



ется каждый из бесконечного числа однократных контурных интегралов приближением изображений при  $|s| \rightarrow \infty$ . При выполнении сказанного необходимы соответствующие приближенные формулы для корней уравнения Релея-Лэмба. Например, при антисимметричной деформации прифронтовые, быстроизменяющиеся напряженные состояния могут быть построены при помощи следующих приближенных выражений корней.

а) За фронтом волны сжатия используется группа корней  $\kappa_j = \kappa_n$ , которая в полуплоскости  $\text{Re } s \geq a_j > 0$  ( $j = 2, 4, 6, \dots; n = 1, 2, 3, \dots$ ) имеет при  $|s| \rightarrow \infty$  разложение вида

$$\kappa_n \sim -ks - \frac{\pi^2 \pi^2}{2ks} \left[ 1 - \frac{2(1-2\nu)\sqrt{2-2\nu}}{\nu^2} \frac{\text{tg } iz}{is} \right] + O\left(\frac{1}{s^3}\right), \quad (5.1)$$

где

$$z = \frac{s}{\sqrt{2-2\nu}}, \quad k = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2-2\nu}}. \quad (5.2)$$

Выражение (5.1) позволяет привести изображение к виду, допускающему обращение по стандартным формулам.

б) В районе фронта волны сдвига используется группа корней  $\kappa_j = \kappa_m$  ( $j = 3, 5, 7, \dots; m = 1, 2, 3$ ), имеющих разложение

$$\kappa_m \sim -s - \frac{(m-\frac{1}{2})^2 \pi^2}{2s} \left[ 1 - \frac{8}{s\sqrt{2-2\nu}} \right] + O\left(\frac{1}{s^3}\right). \quad (5.3)$$

При применении формулы (5.3) [2.8] контур интегрирования может быть выбран по мнимой оси плоскости  $s$ .

в) Кроме указанных, существует еще один отдельный корень ( $\kappa_1$ ), который не допускает разложение по отрицательным степеням  $s$ , связан первой модой и определяет поверхностные волны Релея. На мнимой оси  $s = i\omega$  плоскости  $s$  он может быть аппроксимирован выражением вида

$$\kappa_1 \sim -i\omega [r + Be^{-2\sqrt{r^2-1}\omega} - Be^{-2\sqrt{r^2-k^2}\omega} + \dots], \quad (5.4)$$

где

$$B = \frac{2}{\frac{r}{r^2-k^2} + \frac{r}{r^2-1} - \frac{4r}{r^2-\frac{1}{2}}}, \quad r = \frac{c_2}{c_R}, \quad (5.5)$$

$c_R$  — скорость распространения поверхностных волн Релея.\*

По асимптотике аналогичные группы корней существуют также в случае симметричной деформации плиты. Метод может быть легко обобщен также на случай осе- и циклосимметричных волновых процессов деформации круговой цилиндрической оболочки.

Обращение контурных интегралов с применением приближенных выражений типа (5.1), (5.3) дает в районе волны сжатия и сдвига ори-

\* В работе [5.50], опубликованной после оформления рукописи данной статьи, был применен такой подход для анализа переходного волнового процесса изгиба полубесконечной плиты в районе фронта волны сдвига и условного фронта поверхностных волн Релея. Источником колебаний в работе [5.50] является внезапно приложенная поперечная сила (рассматривается несколько вариантов распределения заданных напряжений сдвига). Кроме того, в работе [5.50] приведены ранее известные [3.15] результаты, полученные методом перевала.



гиналы в виде суммы основного напряженного состояния и поверхностных эффектов. Основное напряженное состояние появляется на основных фронтах в виде ряда Фурье — каждый контурный интеграл дает один член ряда.

**5.3. Оболочки.** В оболочках переходные волновые процессы исследованы мало и только на основе двумерных теорий. Имеющиеся в литературе результаты относятся к круговой цилиндрической и сферической оболочкам.

На базе безмоментной теории Дж. Пайтон [5.51] решил динамическую задачу о напряженном состоянии круговой цилиндрической оболочки, нагруженной сосредоточенным импульсом, распределенным импульсом или движущейся нагрузкой; Х. Берковиц [5.52] исследовал волны напряжения в полубесконечной цилиндрической оболочке, возникающие при соударении движущейся оболочки с абсолютно жесткой плоской преградой. Решение безмоментных уравнений было в [5.52] получено при помощи интегрального преобразования Лапласа с применением метода перевала во втором приближении.

На базе теории типа Тимошенко в работе Н. Алумяз [3.35] рассматривался переходный волновой процесс в полубесконечной круговой цилиндрической оболочке, вызванный действием тангенциальной краевой нагрузки, изменяющейся во времени по синусоидальному закону. Исследовалась возможность расчленения напряженного состояния на безмоментное состояние и краевые эффекты. В работе [3.36] с той же главной целью рассматривалась задача об определении осевых напряжений в полубесконечной круговой цилиндрической оболочке, вызванных действием внезапно приложенной краевой нагрузки, синусоидально изменяющейся по дуговой координате. В работах [3.35, 3.36] было применено преобразование Лапласа с приближенным обращением контурных интегралов методом перевала (со сравнительно подробным анализом). В [3.36], кроме того, обращение осуществлялось методом аппроксимации изображения на вещественной оси плоскости параметра преобразования Лапласа (см. § 3 п. 2 В).

В работах [3.35, 3.36] было установлено, что при достаточно медленно изменяющейся тангенциальной нагрузке, приложенной к неасимптотическому краю, тангенциальные факторы (например усилия) могут быть приближенно определены по безмоментной или полубезмоментной теории. При этом обсужден вопрос о необходимости перехода от безмоментной теории к полубезмоментной.

Начало движения пологой сферической оболочки под действием динамической сосредоточенной нормальной силы рассматривалось М. Медиком в [5.53] на базе теории Кирхгоффа-Лява с применением интегральных преобразований Лапласа и Ханкеля. Поскольку тангенциальная инерция не учитывалась, область применения этого решения, по-видимому, сравнительно невелика. На базе теории типа Тимошенко осесимметричная задача сферической оболочки рассматривалась в [3.49]: были исследованы фронтовые разрывы и применен усовершенствованный вариант метода сеток (см. § 3.3).

**5.4. Родственные задачи.** Отметим еще некоторые работы, которые непосредственно не относятся к рассматриваемой тематике, но могут представлять методический интерес.

В ряде работ рассмотрено воздействие ударной волны на плиту [5.54, 5.55], цилиндрическую оболочку [5.56–5.62] и сферическую оболочку [5.63, 5.64]. Ряд задач построения решений автомоделированного типа исследован в работах [5.65–5.83].



Интересно отметить, что Р. Скалак [5.65] сформулировал одну из первых задач о переходном волновом процессе деформации круговой цилиндрической оболочки. Он исследовал волны деформации в трубопроводе при внезапном открытии крана. Задача была сформулирована как контактная — с учетом волновых явлений в жидкости. Однако приближенным обращением двукратных контурных интегралов фактически была найдена лишь автомоделированная часть решения.

В работе А. Тюманока [3.37] исследовано начало движения полубесконечной круговой цилиндрической оболочки под атакой волны равномерного нормального давления, движущейся с постоянной скоростью вдоль оси оболочки. Используется безмоментная теория. Заслуживает внимания примененный здесь способ группового обхода особых точек, использованный для обоснования приближенных формул обращения. В этой же работе проведены и численные исследования на основе метода характеристик.

Недавно опубликована работа [5.84] о применении уточненной теории шестого порядка к анализу переходного волнового процесса в полубесконечном цилиндрическом стержне.

## § 6. Выводы, проблемы, перспективы

**6.1. Основные проблемы теории динамики плит и оболочек.** По мнению авторов, к основным проблемам следует отнести:

**А.** Выявление видов возможных элементарных динамических напряженных состояний и построение приближенных уравнений (моделей) для их описания с известной погрешностью.

**Б.** Разработка методов расчленения динамического напряженного состояния на элементарные при решении конкретных задач, т. е. в зависимости от нагрузки, свойств объекта и требуемой информации (исследуемые величины, рассматриваемые диапазоны изменения координат  $x^1, x^2, t$ ).

**В.** Развитие существующих и разработка новых методов интегрирования приближенных уравнений элементарных напряженных состояний.

Говоря о проблеме **А**, следует отметить, что существуют такие напряженные состояния (например, начало движения оболочки в районе сосредоточенной нормальной быстроменяющейся нагрузки), которые принципиально трехмерны и не могут быть описаны упрощенными уравнениями теории упругости. В связи с этим в проблеме **Б** может занимать важное место выявление роли таких напряженных состояний в конкретных задачах.

Внедрение новой вычислительной техники, по-видимому, позволит в будущем изучать переходные волновые процессы в оболочках, минуя указанные проблемы, — непосредственно на основе уравнений трехмерной теории упругости. Уже сейчас существуют предпосылки для такого анализа начала движения простейших объектов (плита, круговая цилиндрическая оболочка) методом конечных разностей.\*

Однако этот подход пока следует предвидеть для случаев, не поддающихся упрощению. Нет никаких оснований говорить о «естественной смерти» (!) динамики оболочек, только лишь начинающей свое развитие.

\* После оформления рукописи в Институте кибернетики АН ЭССР реализовано решение таких задач методом трехмерных сеток.



Названные выше проблемы **А**, **Б** и **В** — не простые. Следует напомнить, что в статике они полностью решены лишь для простейших объектов в рамках теории Кирхгоффа-Лява. В динамике ими придется заниматься на основе трехмерной теории упругости, хотя на первых порах заслуживает большого внимания их исследование также в пределах приближенных теорий.

**6.2. Состояние исследования проблемы А.** Можно отметить следующее:

1. Анализ возможных элементарных динамических напряженных состояний оболочек почти отсутствует в трехмерной теории упругости и имеет существенные пробелы даже в теории Кирхгоффа-Лява и типа Тимошенко. Однако уже накоплен ряд весьма интересных фактов.

а. В статике установился асимптотический при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\varepsilon$  — относительная толщина оболочки) метод выявления элементарных напряженных состояний (см. § 1). При обобщении его для установившихся колебаний оболочек (в рамках двумерных теорий) появляются диапазоны частот  $\omega$ , в которых напряженное состояние не удается расчленить на элементарные напряженные состояния, известные из статике (безмоментное и полубезмоментное состояние, простые краевые эффекты, напряженное состояние с большим показателем изменчивости). Это связано с наличием точек ветвления решений системы уравнений, где краевые эффекты вырождаются, а число безмоментных форм колебаний уменьшается. В частности, такой диапазон частот установлен [6.1, 6.2] при изучении осесимметричных собственных колебаний конической оболочки. В случае круговой цилиндрической оболочки он охватывает окрестность частоты [4.60, 4.61]

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{(1 - \nu^2)\rho R^2}}. \quad (6.1)$$

При обобщении упомянутого асимптотического метода на случай переходных волновых процессов естественно попытаться использовать его применительно к системе уравнений, полученной в результате преобразования Лапласа по времени, чтобы упростить обращение контурных интегралов. Ясно, что при этом возникают те же (и, возможно, не только те же) трудности, которые уже замечены в теории установившихся колебаний.

б. Исследованием переходных процессов изгиба плит на основе трехмерной теории установлено, что, кроме элементарных динамических напряженных состояний, аппроксимируемых двумерными теориями Кирхгоффа и типа Тимошенко, существуют еще принципиально новые, доминирующие во всем диапазоне от фронта волны сжатия до условного фронта поверхностных волн Релея, в окрестности последнего и вблизи точек приложения нагрузки. Пока разработаны расчетные модели для их построения в головных частях волны сжатия и волны сдвига.

Не описываемые элементарной теорией динамические напряженные состояния обнаружены также при исследовании продольных волн в плитах и стержнях. (В виде уточненных теорий предложены модели их аппроксимаций в районе фронта волны сжатия.)

Нет сомнений в том, что такие «новые» напряженные состояния будут установлены и в оболочках.

в. Кроме асимптотики  $\varepsilon \rightarrow 0$ , в теории переходных волновых процессов нашли плодотворное применение и другие асимптотические методы



выявления элементарных (описываемых приближенными уравнениями) напряженных состояний. Здесь в первую очередь следует отметить метод перевала ( $t \rightarrow \infty$ ) и прифронтную асимптотику ( $s \rightarrow \infty$ ,  $s$  — параметр преобразования Лапласа) или метод асимптотических лучевых рядов. Однако, с другой стороны, эти методы могут быть отнесены к способам приближенного интегрирования уравнений (см. § 6 п. 4).

2. Разработано большое количество формальных методов приведения трехмерной задачи к двумерной при напряженных состояниях, достаточно медленно изменяющихся по толщине плиты или оболочки. Комбинированием этих методов, выбором новых аппроксимирующих функций, увеличением количества сохраняемых членов и другими способами могут быть получены еще многочисленные варианты приближенных теорий. Однако это направление исследований никак нельзя считать актуальным, пока не найдены строгие способы оценки точности и границ применимости предлагаемых теорий.

Вопросы точности и применимости вряд ли могут быть исследованы сами по себе, без изучения основных проблем А, Б, а, возможно, частично и В, которые в настоящее время мало исследованы даже в рамках простейших теорий. Поэтому было бы целесообразно перенести центр тяжести исследований с составления уравнений на их анализ и применение.

Кроме проблемы оценки точности и применимости, в двумерных теориях существует еще ряд других не вполне ясных вопросов, из которых отметим следующие:

а. Вопрос о значении дополнительных интегралов (волн), появляющихся при повышении порядка дифференциальных уравнений: являются ли они добавочным продуктом или же принципиально расширяют область аппроксимации трехмерной теории? По имеющимся данным, ответ зависит от метода приведения, порядка уравнений и т. д.

б. Какого порядка модели наилучшие с точки зрения вопроса (а)? Существуют ли модели более высокого порядка, чем теория типа Тимошенко, при которых обосновано использование всех интегралов?

в. Важен ли гиперболический тип системы уравнений модели, если он призван приближенно описывать определенного вида напряженное состояние? (На первый взгляд этот вопрос кажется неразумным, но при изучении волновых процессов гиперболический тип уравнений способствует наглядности, особенно при рассмотрении отражения волн от опор.)

г. Как следует подбирать обоснованные краевые условия для уравнений, полученных методом степенных рядов?

д. Почему теория типа Тимошенко очень хорошо аппроксимирует диаграмму первой моды  $\chi_1(\omega)$  при любых частотах, хотя распределение перемещений и напряжений по толщине объекта аппроксимируется хорошо лишь при сравнительно небольших частотах? Имеет ли это явление какую-либо энергетическую основу?

3. Заслуживало бы внимания применение методов функционального анализа к изучению проблем замены заданного оператора упрощенным, являющейся основным математическим содержанием вывода приближенных моделей. (Это направление очень слабо развито и в статике.)

**6.3. Состояние исследования проблемы Б.** Если в статике оболочек существует ряд установленных «рецептов» расчленения напряженного состояния и применимости уравнений элементарных напряженных со-



стояний (хотя существуют и нерешенные проблемы), то в динамике можно в настоящее время назвать лишь некоторые результаты весьма частного характера:

1. При изучении (на основе трехмерной теории) волновых процессов деформации плиты и круговой цилиндрической оболочки, зависящих от одной координаты срединной поверхности, прифронтовые части головных волн сжатия и сдвига можно приближенно описать асимптотическими (лучевыми) рядами, которые могут быть построены путем разложения изображения Лапласа по целым отрицательным степеням параметра преобразования.

2. При изучении переходных волновых процессов изгибной деформации плиты достаточно далеко от источника (по-видимому, несколько толщин) при достаточно больших значениях  $t$  теория типа Тимошенко применима за условным фронтом поверхностных волн Релея (от окрестности этого фронта до фронта волны сжатия она не применима); область применимости теории Кирхгоффа несколько уже; в области их применимости доминирует вклад первой моды точной теории.

3. В переходных волновых процессах продольной деформации стержней при достаточно больших значениях времени  $t$  в области  $x < c_0 t + H$  ( $c_0$  — скорость распространения волн в элементарной теории плоского напряженного состояния,  $H$  — величина порядка толщины или диаметра объекта) доминирует вклад первой моды, который в малочастотной части аппроксимируется элементарной теорией продольных волн.\*

4. При плавной распределенной тангенциальной краевой нагрузке, приложенной к неасимптотическому краю, в круговой цилиндрической оболочке (а, быть может, и в произвольных оболочках вращения, не имеющих особых точек) вне зоны простого краевого эффекта доминирует напряженное состояние с малым показателем изменчивости, которое при некоторых оговорках может быть аппроксимировано безмоментной или же полубезмоментной теорией [3.35, 3.36].

**6.4. Состояние исследования проблемы В.** На основе трехмерной теории доведены до численных результатов некоторые задачи для бесконечной и полубесконечной плиты; на основе приближенных теорий — ряд задач для плиты и отдельные примеры расчета круговых, цилиндрических, сферических и конических оболочек. Во всех исследованных задачах волновой процесс зависит от одной координаты срединной поверхности.

Относительно методов решения отметим следующее:

1. До сих пор основным методом решения является метод интегральных преобразований.

2. При изучении переходных волновых процессов в плитах на основе трехмерной теории упругости пользуются методом двукратных интегральных преобразований, который применим при краевых условиях определенного вида. Представляла бы большой интерес разработка метода для других видов краевых условий.

3. За исключением некоторых простейших случаев, методом интегральных преобразований получены решения в виде контурных интегралов, которые не удалось обратить точно. В связи с этим использован ряд приближенных методов обращения.

\* Аналогично обстоит дело в случае деформации плиты в своей плоскости; следует лишь заменить  $c_0$  на величину  $c^*$  (4.6).



а. В прифронтальной части головной волны сжатия в трехмерной теории и первой волны в теории типа Тимошенко при расчете плиты применено разложение изображения Лапласа по отрицательным степеням параметра преобразования. Как уже отмечалось, этот способ применим и в случае круговых цилиндрических оболочек и, по-видимому, допускает обобщения и для других видов оболочек.

б. Различные варианты метода перевала нашли применение при построении асимптотических при  $t \rightarrow \infty$  решений с учетом вклада седловых точек на мнимой оси комплексной плоскости параметра преобразования. В случае дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методику можно считать разработанной, но представляет интерес проблема применимости результатов в случае конечных значений  $t$ . Особое внимание заслуживает обобщение этого метода на случай дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, что, кстати, требует обобщения таких классических понятий, как, скажем, групповая скорость.

в. В рамках теории Тимошенко (а также уточненных теорий продольной деформации стержней) применен метод численного интегрирования по берегам срезом комплексной плоскости параметра преобразования Лапласа. Метод оказывается эффективным при малых (соизмеримых с толщиной или диаметром объекта) значениях  $x$  и  $c_1 t$ . При увеличении  $x$ ,  $c_1 t$  возникают вычислительные трудности, связанные с быстрой осцилляцией интегрируемых функций. По своей идее к этому методу близок способ разложения оригинала по степеням безразмерной пространственной координаты, который применим при малых значениях последней.

г. Заслуживает большого внимания поиск новых методов обращения, особенно таких, которые при аналитической подготовке малого объема удобны для программирования. В связи с этим уместно напомнить о методах обращения, основанных на аппроксимации изображения Лапласа в равноотстоящих точках на вещественной оси или на параллельных ей прямых. Один пример применения такого метода уже имеется [3,36].

Определенные перспективы имеет также численное интегрирование по контуру, отыскиваемому электронной вычислительной машиной через седловые точки мнимой оси на основе условия неизменности мнимой части изображения. Таким путем, по-видимому, удастся оценить область практической применимости стандартных формул метода перевала и расширить ее.

4. При решении конкретных задач до сих пор сравнительно мало применены энергетические методы и методы конечных разностей. Однако развитие вычислительной техники, с одной стороны, и развитие теории стабильности и погрешностей расчетных схем, с другой, делают методы конечных разностей особенно перспективными. Поскольку существование двух систем характеристик (имеются в виду двумерные теории) усложняет применение метода характеристик, то, возможно, более подходящим становится метод сеток. При его применении в простейших задачах, сформулированных на основе двумерных теорий, существует возможность заранее выяснить аналитическими методами характер разрывов на фронтах, что, в свою очередь, дает возможность для использования более точных расчетных схем. Вычислительная погрешность может быть уменьшена с применением автоматически изменяемого шага.



### 6.5. Некоторые проблемы общего характера.

а. Выше рассматривалась теория распространения волн в идеально упругих плитах и оболочках (т. е. без учета внутреннего поглощения энергии), имеющих идеальные опоры. Хотя имеется ряд экспериментальных работ, подтверждающих практическую применимость такой теории, представляет большой интерес выяснение роли этих допущений. Существующее в настоящее время небольшое количество работ, посвященных этим проблемам в случае плиты, позволяет лишь выразить мнение, что эти факторы в первую очередь «сглаживают» резкие фронтовые разрывы и «пики».

б. В связи с проблемой (а) возникает более общий вопрос: какими должны быть (в будущем) уравнения распространения волн в твердых телах? Привлечение уравнения теплопроводности, равно как и некоторые другие известные приемы [6.3—6.7], превращают систему уравнений в параболическую, что противоречит факту конечной скорости распространения возмущения.

в. При математическом моделировании физических краевых условий и действительной нагрузки возникают серьезные трудности, особенно при применении трехмерной или уточненных двумерных теорий. Помимо других сторон этой проблемы представляет интерес дальнейшее исследование возможностей использования принципа Сен-Венана в динамической теории упругости и изучение влияния деформации конструкции, окаймляющей оболочку.

Наконец, представляет большой интерес установление обоснованной области применимости геометрически линейной теории с одновременным выявлением возможных упрощений для области применения нелинейной теории. Существует перспектива, что в областях плоскости время-координата, где линейная теория неприменима, достаточно использовать нелинейную теорию типа Тимошенко.

### ЛИТЕРАТУРА

- 0.1. Davies R. M., Stress waves in solids, Appl. Mech. Revs., 6, No. 1, 1—3 (1953).
- 0.2. Кольский Г., Волны напряжения в твердых телах, Изд. иностр. лит., М., 1955, 192 стр.
- 0.3. Redwood M., Mechanical waveguides. The propagation of acoustic and ultrasonic waves in fluids and solids with boundaries, Pergamon Press, Oxford—London—New York—Paris, 1960, 250 pp.
- 0.4. Петрашень Г. И., Работы по распространению упругих волн, Вестн. ЛГУ, № 22, 119—139, 1955.
- 0.5. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах, Изд. АН СССР, М., 1957, 502 стр.
- 0.6. Ewing W. M., Jardetzky W. S., Press F., Elastic waves in layered media. Mc Graw-Hill Co., New York, 1957, 380 pp.
- 0.7. Новацкий В., Динамика сооружений, Гос. изд-во лит. по строит. архит. и стройматериалам, М., 1963, 375 стр.
- 0.8. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн (под руковод. и ред. Г. И. Петрашняя): сб. I, Гостехиздат, 1957; сб. II, 1959; сб. III, 1959; сб. IV, 1960; сб. V, 1961, Изд. ЛГУ.
- 0.9. Abramson H. N., Plass H. J., Ripperger E. A., Stress wave propagation in rods and beams, Advances in Appl. Mech., 5, 111—194 (1958).
- 0.10. Miklowitz J., Recent developments in elastic wave propagation, Appl. Mech. Revs., 13, No. 12, 865—878 (1960).
- 0.11. Miklowitz J., Transient wave propagation in elastic rods and plates, J. Geophys. Res., 68, No. 4, 1190—1192 (1964).
- 0.12. Mindlin R. D., Waves and vibrations in isotropic, elastic plates, Structural Mech., Proc. 1st Symp. on Naval Struct. Mech., Pergamon Press, 1960, 199—232.



\*

- 1.1. Кильчевский Н. А., Основы аналитической механики оболочек, Изд. АН УССР, Киев, 1963, 354 стр.
- 1.2. Cauchy A. L., Sur l'Equilibre et le Mouvement d'une Plaque Solide, Exercices de Mathématique, 3, 328—355 (1828).
- 1.3. Poisson S. D., Memoire sur l'Equilibre et le Mouvement des Corps Elastiques, Memoires de l'Academie des Sciences, Ser. 2, 8, 357—570 (1829).
- 1.4. Krauss F., Über die Grundgleichungen der Elastitätstheorie schwachdeformierten Schalen, Math. Annalen, 101, H. 1, 61—92 (1929).
- 1.5. Кильчевский Н. А., Обобщение современной теории оболочек, ПММ, 2, вып. 4, 427—438 (1939).
- 1.6. Кильчевский Н. А., Основные уравнения равновесия упругих оболочек и некоторые методы интегрирования, Сб. тр. Инст. матем. АН УССР, ч. 1, № 4, 84—149 (1940); ч. II, № 5, 74—97 (1940); ч. III, № 6, 51—102 (1940).
- 1.7. Селезов И. Т., Дослідження поперечних коливань пластини, Прикл. мех., 6, вып. 3, 319—327 (1960).
- 1.8. Селезов И. Т., Про поперечні коливання пластини, ДАН УССР, № 9, 1190—1193 (1960).
- 1.9. Селезов И. Т., Про гіпотези, які лежать в основі уточнених рівнянь поперечних коливань пластин, і деякі особливості цих рівнянь, Прикл. мех., 7, вып. 5, 538—546 (1961).
- 1.10. Селезов И. Т., Исследование распространения упругих волн в плитах и оболочках, Тр. конф. по теории пластин и оболочек, Казань, 1961, 347—352.
- 1.11. Селезов И. Т., Изучение волновых процессов в цилиндрической оболочке на основании обобщенной теории, Прикл. мех., 9, вып. 5, 486—495 (1963).
- 1.12. Новожилов В. В., Финкельштейн Р., О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек, ПММ, 7, вып. 5, 323—330 (1943).
- 1.13. Epstein P. S., On the theory of elastic vibrations in plates and shells, J. Math. and Phys., 21, No. 3, 198—209 (1942).
- 1.14. Kennard E. H., The new approach to shell theory: circular cylinders, J. Appl. Mech., 20, No. 1, 33—40 (1953).
- 1.15. Kennard E. H., Cylindrical shells: energy, equilibrium, addenda and erratum, J. Appl. Mech., 22, No. 1, 111—116 (1955).
- 1.16. Kennard E. H., Approximate energy and equilibrium equations for cylindrical shells, J. Appl. Mech., 23, No. 4, 645—646 (1956).
- 1.17. Kennard E. H., A fresh test of the Epstein equations for cylinders, J. Appl. Mech., 25, No. 4, 553—555 (1958).
- 1.18. Нигул У. К., Линейные уравнения динамики упругой круговой цилиндрической оболочки, свободные от гипотез, Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 176, 1—68 (1960).
- 1.19. Нигул У. К., Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек, ПММ, 26, вып. 5, 923—930 (1962).
- 1.20. Лурье А. И., К теории толстых плит, ПММ, 6, № 2—3, 151—168 (1942).
- 1.21. Лурье А. И., Пространственные задачи теории упругости, Гостехиздат, М., 1955, 491 стр.
- 1.22. Власов В. З., Метод начальных функций в задачах теории упругости, Изв. АН СССР. ОТН, вып. 7, 49—69 (1955).
- 1.23. Власов В. З., Леонтьев Н. Н., Балки, плиты и оболочки на упругом основании, Физматгиз, М., 1960, 491 стр.
- 1.24. Нигул У. К., О применении символического метода А. И. Лурье в трехмерной теории динамики упругих плит, Изв. АН ЭССР. Сер. физ. мат. и техн. наук, № 2, 146—155 (1963).
- 1.25. Гольденвейзер А. Л., Теория упругих тонких оболочек, Гостехиздат, М., 1953, 544 стр.
- 1.26. Friedrichs K. O., The edge effect in the bending of plates, H. Reissner Anniv. Vol. Contr. Appl. Mech., J. W. Edwards, Ann Arbor, Mich., 1949.
- 1.27. Friedrichs K. O., Kirchhoff's boundary conditions and the edge effect for elastic plates, Proc. Symp. Appl. Math., 3, Elasticity, 117—124 (1950).
- 1.28. Friedrichs K. O., Dressler R. F., A boundary-layer theory for elastic bending of plates. Abstract, Proc. 8th, Intern. Cong. on Mech., Istanbul, 1952.
- 1.29. Friedrichs K. O., Dressler R. F., A boundary-layer theory for elastic plates, Comm. Pure and Appl. Math., 14, No. 1, 1—33 (1961).
- 1.30. Гольденвейзер А. Л., Построение приближенной теории изгиба пластины методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости, ПММ, 26, вып. 4, 668—686 (1962).
- 1.31. Johnson M. W., Reissner E., On the foundations of the theory of thin elastic shells, J. Math. and Phys., 37, No. 4, 371—392 (1959).



- 1.32. Reiss E. L., A theory for the small rotationally symmetric deformation of cylindrical shells, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **13**, No. 3, 531—550 (1960).
- 1.33. Johnson M. W., A boundary layer theory for unsymmetric deformations of circular cylindrical elastic shells, *J. Math. Phys.*, **42**, No. 3, 167—188 (1963).
- 1.34. Green A. E., On the linear theory of thin elastic shells, *Proc. of the Royal Society, Ser. A*, **266**, No. 1325, 143—160 (1962).
- 1.35. Green A. E., Boundary-layer equations in the linear theory of thin elastic shells, *Proc. of the Royal Society, Ser. A*, **269**, No. 1339, 481—491 (1962).
- 1.36. Koiter W. T., A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells, *Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells (Delft, 1959)*, 1960, pp. 12—33.
- 1.37. Гольденвейзер А. Л., Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости, *ПММ*, **27**, вып. 4, 593—608 (1963).
- 1.38. Reissner E., On the derivation of the theory of thin elastic shells, *J. Math. and Phys.*, **42**, No. 4, 263—277 (1963).
- 1.39. Креггс Дж. Продольные волны в упругом стержне, *Механика*, Сб. перев., № 6 (82), 1963, 157—164.
- 1.40. Петрашень Г. И., К теории колебаний тонких пластин, *Уч. зап. ЛГУ*, № 149, Динамические задачи теории упругости, ч. 1, 172—249 (1951).
- 1.41. Петрашень Г. И., Молотков Л. А., О некоторых проблемах динамической теории упругости в случае сред, содержащих тонкие слои, *Вестн. ЛГУ*, № 22, 137—156, 1958.
- 1.42. Молотков Л. А., Об инженерных уравнениях колебаний пластин, имеющих слоистую структуру, *Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн*, Сб. 5, 1961, 303—313.
- 1.43. Нигул У. К., Асимптотическая теория статики и динамики упругих круговых цилиндрических оболочек и анализ точности различных вариантов теории Кирхгоффа-Лява, *Всес. конф. по теории оболочек и пластин (1962 г.)*, Ереван, 1964, 738—742.
- 1.44. Нигул У. К., О применении символического метода А. И. Лурье к анализу напряженных состояний и двумерных теорий упругих плит, *ПММ*, **27**, вып. 3, 583—588 (1963).
- 1.45. Нигул У. К., О приближенном учете краевых эффектов типа Сен-Венана в краевых задачах статики плит, *ПММ*, **28**, вып. 1, 131—134 (1964).
- 1.46. Муштари Х. М., Об области применимости приближенной теории оболочек Кирхгоффа-Лява, *ПММ*, **11**, вып. 5, 517—520 (1947).
- 1.47. Lord Rayleigh, On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter, *Proc. London Math. Soc.*, **20**, 225 (1889).
- 1.48. Timoshenko S. P., On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars, *Phil. Mag.*, **41**, 744—746 (1921).
- 1.49. Уфлянд Я. С., Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин, *ПММ*, **12**, вып. 3, 287—300 (1948).
- 1.50. Mindlin R. D., Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, *J. Appl. Mech.*, **18**, No. 1, 31—38 (1951).
- 1.51. Reissner E., On axis-symmetrical vibrations of circular plates of uniform thickness, including the effect of transverse shear deformation and rotatory inertia, *J. Acoust. Soc. Am.*, **26**, No. 2, 252—253 (1954).
- 1.52. Volterra E., Influenza del taglio nella dinamica e nella statica delle piastre sottili, *Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.*, **29**, No. 1—2, 23—37 (1960).
- 1.53. Volterra E., Influenza del taglio nella dinamica e nella statica delle piastre sottili, *Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur.*, **28**, No. 6, 794—801 (1960).
- 1.54. Volterra E., Second approximation of method of internal constraints and its applications, *Internat. J. Mech. Sci.*, **3**, No. 1—2, 47—67 (1961).
- 1.55. Volterra E., Method of internal constraints and its application, *Proc. Amer. Soc. Civ. Engrs.*, **87**, EM 4, 103—127 (1961).
- 1.56. Narasimhamurthy P., The effect of transverse shear deformation and rotary inertia in wave propagation and vibration of thin elastic plates, *Proc. 3rd Congr. Theor. Appl. Mech.*, Bangalore, India; *Indian Soc. Theor. Appl. Mech.*, Indian Inst. Technol. Kharagpur, 1957, 351—360.
- 1.57. Lin T. C., Morgan G. W., A study of axisymmetric vibrations of cylindrical shells as affected by rotatory inertia and transverse shear, *J. Appl. Mech.*, **23**, No. 2, 255—261 (1956).
- 1.58. Herrmann G., Mirsky I., Three-dimensional and shell-theory analysis of axially symmetric motions of cylinders, *J. Appl. Mech.*, **23**, No. 4, 563—568 (1956).



- 1.59. Mirsky I., Herrmann G., Nonaxially symmetric motions of cylindrical shells, J. Acoust. Soc. Am., 29, No. 10, 1116—1123 (1957); 31, No. 2, 250 (1959).
- 1.60. Yu Y. Y., Dynamic equations of Donnell type for cylindrical shells with application to vibration problems, 9th Congress Inter. Mechan. Appl., Univ. Bruxelles, 7, 1957, 261—278.
- 1.61. Yu Y. Y., Vibrations of thin cylindrical shells analyzed by means of Donnell-type equations, J. Aero-Space Sci., 25, No. 11, 699—715 (1958).
- 1.62. Yu Y. Y., On the Donnell equations and Donnell-type equations of thin cylindrical shells, Proc. Third U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 1958, 479—487.
- 1.63. Volterra E., Alcune recenti applicazioni del metodo dell'elasticita vincolata a problemi della dinamica, Giorn. Genio Civile, 96, No. 7—8, 464—498 (1958).
- 1.64. Mirsky J., Herrmann G., Axially symmetric motions of thick cylindrical shells, J. Appl. Mech., 25, No. 1, 97—102 (1958).
- 1.65. Mirsky J., Vibration of orthotropic, thick, cylindrical shells, J. Acoust. Soc. Am., 36, No. 1, 43—53 (1964).
- 1.66. Муштари Х. М., Терегулов И. Г., К теории оболочек средней толщины, ДАН, 128, № 6, 1144—1147 (1959).
- 1.67. Векуа И. Н., Об одном методе расчета призматических оболочек, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 21, 191—259 (1955).
- 1.68. Cicala P., Elastic theory of thin shells, Giorn. Genio Civile, 97, No. 4, 238—245, 245—256 (1959); 97, No. 6, 429—449 (1959); 97, No. 9, 714—723 (1959).
- 1.69. Cicala P., Sulla teoria elastica della parete sottile cilindrica, Giorn. Genio Civile, 98, No. 12, 929—931, 937—945 (1960).
- 1.70. Mindlin R. D., Medick M. A., Extensional vibrations of elastic plates, J. Appl. Mech., 26, No. 4, 561—569 (1959).
- 1.71. Trefftz E., Ableitung der Schalenbiegungsgleichungen mit dem Castiglianoschen Prinzip, Z. angew. Math. und Mech., 15, H. 2, 101—108 (1935).
- 1.72. Reissner E., On the theory of bending of elastic plates, J. Math. and Phys., 23 (1944).
- 1.73. Reissner E., The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., 12, No. 1, 69—77 (1945).
- 1.74. Reissner E., On bending of elastic plates, Quart. Appl. Math., 5, No. 1, 55—68 (1947).
- 1.75. Green A., Zerna W., The equilibrium of thin elastic shells, Quart. J. Mech. Appl. Math., 3, P. 1, 9—22 (1950).
- 1.76. Reissner E., Stress strain relations in the theory of thin elastic shells, J. Math. Phys., 31, No. 1, 109—119 (1952).
- 1.77. Reissner E., On some problems in shell theory, Structural Mech., Proc. 1st Symp. on Naval Struct. Mech., 1960, 74—114.
- 1.78. Понятовский В. В., К теории пластин средней толщины, ПММ, 26, № 2, 335—341 (1962).
- 1.79. Гольденвейзер А. Л., О теории изгиба пластинок Рейсснера, Изв. АН СССР. ОТН, № 4, 102—109 (1958).
- 1.80. Айнола Л. Я., Об уточненных теориях пластинок типа Рейсснера, Теория оболочек и пластин, Всес. конф. по теории оболочек и пластин (1962 г.), Ереван, 1964, 171—177.
- 1.81. Амбарцумян С. А., Теория анизотропных оболочек, Физматгиз, М., 1961, 384 стр.
- 1.82. Rüdiger P., Zur Theorie elastischer Schalen, Ingr.-Arch., 28, 281—288 (1959).
- 1.83. Zerna W., Mathematisch strenge Theorie elastischer Schalen, Z. angew. Math. und Mech., 42, H. 7/8, 333—342 (1962).
- 1.84. Naghdi P. M., On the theory of thin elastic shells, Quart. Appl. Math., 14, No. 4, 369—380 (1957).
- 1.85. Naghdi P. M., Cooper R. M., Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotatory inertia, J. Acoust. Soc. Am., 28, No. 1, 58—63 (1956).
- 1.86. Cooper R. M., Naghdi P. M., Propagation of nonaxially symmetric waves in elastic cylindrical shells, J. Acoust. Soc. Am., 29, No. 12, 1365—1373 (1957).
- 1.87. Kalnins A., On vibration of shallow spherical shells, J. Acoust. Soc. Am., 33, No. 8, 1102—1107 (1961).
- 1.88. Айнола Л. Я., О расчетных моделях упругих пластинок для динамических задач, Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, № 1, 31—37 (1963).
- 1.89. Терегулов И. Г., К построению уточненных теорий пластин и оболочек, ПММ, 26, вып. 2, 346—350 (1962).
- 1.90. Yu Y. Y., Generalized Hamilton's principle and variational equation of motion in nonlinear elasticity theory with application to plate theory, J. Acoust. Soc. Am., 36, No. 1, 111—122 (1964).



- 1.91. Kromm A., Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik, *Ingr.-Arch.*, **21**, Н. 4, 266—286 (1953).
  - 1.92. Ericksen J. L., Truesdell C., Exact theory of stress and strain in rods and shells, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **1**, No. 4, 295—323 (1958).
  - 1.93. Кильчевский Н. А., Интегро-дифференциальные и интегральные уравнения равновесия тонких упругих оболочек, *ПММ*, **23**, вып. 1, 124—133 (1959).
  - 1.94. Кабулов В. К., Некоторые вопросы построения теории упругих и упруго-пластических колебаний оболочек, *Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук*, № 5, 42—67 (1959).
  - 1.95. Morgenstern D., Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitätstheorie, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **4**, No. 2, 145—152 (1959).
  - 1.96. Morgenstern D., Bernoullische Hypothesen bei Balken und Plattentheorie, *Z. angew. Math. und Mech.*, **39**, Н. 9/10, 420—422 (1959).
  - 1.97. Morgenstern D., Mathematische Begründung der Scheibentheorie (zweidimensionale Elastizitätstheorie), *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **3**, 91—96 (1959).
  - 1.98. Кабулов В. К., К выводу дифференциальных уравнений колебаний цилиндрических оболочек, *Изв. АН УзССР. Сер. техн. наук*, № 3, 21—28 (1960).
  - 1.99. Babuška I., Prager M., Reissnerian algorithms in the theory of elasticity, *Bull. Acad. polon. sci. Ser. techn.*, **8**, No. 8, 411—417 (1960).
  - 1.100. Boal J. L., Reissner E., Three-dimensional theory of elastic plates with transverse inextensibility, *J. Math. and Phys.*, **39**, No. 3, 161—181 (1960).
  - 1.101. Кильчевский Н. А., Приближенные методы исследования равновесия и колебаний оболочек как дискретно-континуальных систем, *Тр. конф. по теории пластин и оболочек*, Казань, 1961, 170—176.
  - 1.102. Tiffen R., Burniston E. E., Note on the basic assumption of elastic plate theories, *Mathematika*, **9**, No. 2, 127—132 (1962).
  - 1.103. Ансентян О. К., Воровоч И. И., Напряженное состояние плиты малой толщины, *ПММ*, **27**, вып. 6, 1057—1074 (1963).
  - 1.104. Хачатурян Т. Т., К теории изгиба и сжатия толстых плит, *Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук*, **16**, № 6, 41—61 (1963).
  - 1.105. Zimmer K., Ein Beitrag zur verbesserten Plattentheorie, *Wiss. Z. T. U. Dresden*, **12**, No. 5, 1375—1388 (1963).
  - 1.106. Маня В., Об одной теории тонких упругих плоских пластин без гипотезы Лове-Кирхгоффа, *Rev. Roum. Sci. Techn. Sci. Mec. Appl.*, **9**, No. 2, 415—444 (1964).
  - 1.107. Шереметьев М. П., Пелех Б. Л., К построению уточненной теории пластин, *Инж. ж.*, **4**, вып. 3, 504—509 (1964).
  - 1.108. Budiansky B., Sanders J. L. Jr., On the "best" first-order linear shell theory, *Progress in Applied Mechanics*, New York, 1963, 129—140.
  - 1.109. Reissner E., On the form of variationally derived shell equations, *J. Appl. Mech.*, **31**, No. 2, 233—238 (1964).
  - 1.110. Naghdi P. M., Foundations of elastic shell theory, *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 4, Amsterdam, 1963.
- \*
- 2.1. Kirchhoff G., Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, *J. reine und angew. Math.*, **40**, 51—88 (1850).
  - 2.2. Kirchhoff G., Vorlesungen über mathematische Physik, Bd. 1, *Mechanik*, 1876.
  - 2.3. Buchwald V. T., Low frequency flexural vibrations in elastic plates, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **12**, P. 4, 454—463 (1959).
  - 2.4. Дубинкин М. В., Колебания плит с учетом инерции вращения и сдвига, *Изв. АН СССР. ОН*, № 12, 131—135 (1958).
  - 2.5. Москаленко В. Н., К применению уточненных теорий изгиба пластинок в задаче о собственных колебаниях, *Инж. ж.*, **1**, вып. 3, 93—101 (1961).
  - 2.6. Якушев Н. З., К теории колебаний плит средней толщины. Нелинейная теория пластин и оболочек, *Изд. Казанск. ун-та*, 1962, 51—60.
  - 2.7. Рыбаков С. А., Татраковский Б. Д., О колебаниях тонких пластин, *Акуст. ж.*, **9**, № 1, 66—71 (1963).
  - 2.8. Нигул У. К., О корнях уравнения Лэмба для деформации плиты, антисимметричной относительно срединной поверхности. *Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук*, № 3, 284—293 (1963).
  - 2.9. Kane T. R., Mindlin R. D., High-frequency extensional vibrations of plates, *J. Appl. Mech.*, **23**, No. 2, 277—283 (1956).
  - 2.10. Volterra E., Zachmanoglou E. C., On longitudinal waves in an elastic plate, *Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.*, EM 1, 1896, 33—49 (1956).
  - 2.11. Gazis D. C., Mindlin R. D., Extensional vibrations and waves in a circular disk and a semi-infinite plate, *J. Appl. Mech.*, **27**, No. 3, 541—547 (1960).
  - 2.12. Flügge W., *Statik und Dynamik der Schalen*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.



- 2.13. Naghdi P. M., Berry J. G., On the equations of motion of cylindrical shells, *J. Appl. Mech.*, **21**, No. 2, 160—166 (1954).
- 2.14. Рояк Д. А., О едином приближенном характеристическом уравнении круговой цилиндрической оболочки, *Изв. АН СССР. ОН, Мех. и маш.*, вып. 5 (1961).
- 2.15. Houghton D. S., Johns D. J. A., A comparison of the characteristic equations in the theory of circular cylindrical shells, *Aeronaut. Quart.*, **12**, No. 3, 228—236 (1961).
- 2.16. Naghdi P. M., Cooper R. M., Propagation of elastic waves in cylindrical shells including effects of transverse shear and rotatory inertia, *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, No. 1, 58—63 (1956).
- 2.17. Love A. E. H., The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell, *Philos. Transact. Roy Soc., Ser. A*, **179** (1888).
- 2.18. Naghdi P. M., Kalnins A., On vibrations of elastic spherical shells, *J. Appl. Mech.*, **29**, No. 1, 65—72 (1962).
- 2.19. Federhofer K., Zur Berechnung der Eigenschwingungen der Kugelschale, *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien, Math. naturw. Klasse*, **146**, 2A, 57—69, 505—514 (1937).
- 2.20. Kalnins A., Naghdi P. M., Propagation of axisymmetric waves in an unlimited elastic shell, *J. Appl. Mech.*, **27**, No. 4, 690—695 (1960).
- 2.21. Kalnins A., Naghdi P. M., Axisymmetric vibrations of shallow elastic spherical shells, *J. Acoust. Soc. Am.*, **32**, No. 3, 19, 342—347 (1960).
- 2.22. Prasad C., On vibration of spherical shells, *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**, No. 3, 489—494 (1964).

\*

- 3.1. Нигул У. К., Колебание кругоцилиндрической упругой оболочки, вызванное действием сосредоточенного импульса, *Тр. Таллинск. политехн. ин-та*, № 171, 1—20 (1960).
- 3.2. Jones R. P. N., The wave method for solving flexural vibration problems, *J. Appl. Mech.*, **21**, No. 1, 75—80 (1954).
- 3.3. Smirnov V., Sobolev S., Sur une methode nouvelle dans le problème plan des vibrations élastique. *Тр. Сейсм. ин-та АН СССР*, № 20 (1932).
- 3.4. Смирнов В. И., Соболев С. Л., О применении нового метода к изучению упругих колебаний в пространстве при наличии осевой симметрии, *Тр. Сейсм. ин-та АН СССР*, № 29 (1933).
- 3.5. Векуа И. Н., К вопросу распространения упругих волн в бесконечном слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями. *Тр. Тбилисс. Геофизич. ин-та*, **2**, 23—50 (1937).
- 3.6. Петрашень Г., О задаче Лэмба в случае упругого полупространства, *ДАН СССР*, **64**, № 5, 649—652 (1949).
- 3.7. Петрашень Г. И., Двумерная задача Лэмба для бесконечного упругого слоя, ограниченного параллельными плоскостями, *ДАН СССР*, т. 64, № 6, 783—786 (1949).
- 3.8. Петрашень Г. И., Распространение упругих волн в слоистоизотропных средах, разделенных параллельными плоскостями, *Уч. зап. ЛГУ* № 162, Динамические задачи теории упругости, ч. 2 (1952).
- 3.9. Tiffen R., Dilatational and distortional vibrations of semiinfinite solids and plates, *Mathematika*, **3**, 153—163 (1956).
- 3.10. Огурцов К. И., Волны напряжения в упругой плите, *ПММ*, **24**, № 3, 438—446 (1960).
- 3.11. Miklowitz J., Transient compressional waves in an infinite elastic layer overlying a rigid half space, *Space Technology Labs. Rep. STL-TR-60-0000-19285* (Los Angeles, Calif.), Sept. 30, 1960.
- 3.12. Miklowitz J., Transient compressional waves in an elastic plate or elastic layer overlying a rigid half space, *J. Appl. Mech.*, **29**, No. 1, 53—60 (1962).
- 3.13. Rosenfeld R. L., Miklowitz J., Wave fronts in elastic rods and plates, *Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, **1**, 293—303 (1962).
- 3.14. Lloyd J. R., Miklowitz J., On the use of double integral transforms in the study of dispersive elastic wave propagation, *Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, **1**, 255—267 (1962).
- 3.15. Нигул У. К., Применение трехмерной теории упругости к анализу волнового процесса изгиба полубесконечной плиты при кратковременно действующей краевой нагрузке, *ПММ*, **17**, № 6, 583—588 (1963).
- 3.16. Fulton J., Sneddon J. N., The dynamical stresses produced in a thick plate by the action of surface forces, *Proc. of the Glasgow Math. Association*, **3**, P. IV, 153—163 (1958).
- 3.17. Петрашень Г. И., Методы исследования волновых процессов в средах, содержащих сферические или цилиндрические границы раздела. *Уч. зап. ЛГУ*, № 170, Динамические задачи упругости, ч. 3, 96—210 (1953).



- 3.18. Skalak R., Longitudinal impact of a semiinfinite circular elastic bar, *J. Appl. Mech.*, **24**, No. 1, 59—64 (1957).
- 3.19. Folk R., Fox G., Shook C. A., Curtis C. W., Elastic strain produced by sudden application of pressure to one end of a cylindrical bar, I. Theory, *J. Acoust. Soc. Am.*, **30**, No. 6, 552—563 (1958).
- 3.20. De Vault G. P., Curtis C. W., Elastic cylinder with free lateral surface and mixed time-dependent conditions, *J. Acoust. Soc. Am.*, **34**, No. 4, 421—432 (1962).
- 3.21. Jones O. E., Ellis A. T., A theoretical study of longitudinal strain pulse propagation in wide rectangular bars, *Calif. Inst. Tech. Hydrodyn. Lab. Rep.* E-108, 14, 1961, 33 pp.
- 3.22. Jones O. E., Ellis A. T., Longitudinal strain pulse propagation in wide rectangular bars, Part I; Theoretical considerations, *J. Appl. Mech.*, **30**, No. 1, 51—60 (1963).
- 3.23. Cagniard L., Reflexion et refraction des ondes seismiques progressives, Gauthier-Villars, Paris, 1939.
- 3.24. Лурье А. И., Операционное исчисление, Гостехиздат, М.-Л., 1951.
- 3.25. Tolstoy I. and Usdin E., Dispersive properties of stratified elastic and liquid media: a ray theory, *Geophysics*, **18**, 844—870 (1953).
- 3.26. Бабич В. М., Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов, *ДАН СССР*, **110**, № 3, 355—357 (1956).
- 3.27. Бабич В. М., Алексеев А. С., О лучевом методе вычисления интенсивности волновых фронтов, *Изв. АН СССР. Сер. геофиз.*, № 1, 17—31 (1958).
- 3.28. Tolstoy I., Modes, rays, and travel times, *J. Geophys. Res.*, **64**, No. 7, 815—821 (1959).
- 3.29. Karal F. C., Keller J. B., Elastic wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media, *J. Acoust. Soc. Am.*, **31**, 694—705 (1959).
- 3.30. Chopra S. D., Ray theories in elastic waves, *Math. Student*, **28**, No. 3—4, 161—175 (1962).
- 3.31. Бабич В. М., Геометро-оптические методы в теории нестационарных волн и фундаментальные решения гиперболических уравнений, Докторская диссертация, Новосибирск, 1961, 201 стр.
- 3.32. Flügge W., Zajac E. E., Bending impact waves in beams, *Ingr.-Arch.*, **28**, 59—70 (1959).
- 3.33. Boley B. A., Chao C. C., Some solutions of the Timoshenko beam equations, *J. Appl. Mech.*, **22**, No. 4, 579—586 (1955).
- 3.34. Boley B. A., On the use of sine transforms in Timoshenko beam impact problems, *J. Appl. Mech.*, **24**, No. 1, 152—153 (1957).
- 3.35. Алумяэ Н., О применимости метода расчленения напряженного состояния при решении осесимметрических задач динамики замкнутой цилиндрической оболочки, *Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук*, № 3, 171—181 (1961).
- 3.36. Алумяэ Н., Поверус Л., Переходный процесс упругой деформации в замкнутой кругоцилиндрической оболочке при неосесимметрической краевой нагрузке, *Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук*, № 1, 13—23 (1963).
- 3.37. Тюманок А., Об осесимметричном неустановившемся движении безмоментной круговой цилиндрической оболочки под действием движущейся нагрузки, *Изв. АН СССР. Мех. и Машиностр.*, № 4, 47—53 (1964).
- 3.38. Salzer H. E., Orthogonal polynomials arising in the numerical evaluation of inverse Laplace transforms, *Math. Tables and Other Aids Comput.*, **9** (1955).
- 3.39. Salzer H. E., Equally-weighted quadrature formulas for inversion integrals, *Math. Tables and Other Aids Comput.*, **11**, 59 (1957).
- 3.40. Shirlcliffe C. I., Stephenson D. G., A computer oriented adaption of Salzer's method for inverting Laplace transforms, *J. Math. Phys.*, **40**, No. 2 (1961).
- 3.41. Papoulis A., A new method of inversion of the Laplace transformation, *Quart. Appl. Math.*, **14**, No. 4 (1957).
- 3.42. Boley B. A., An approximate theory of lateral impact on beams, *J. Appl. Mech.*, **22**, No. 1, 69—76 (1955).
- 3.43. Boley B. A., Chao C. C., Timoshenko beams under dynamic load, *J. Appl. Mech.*, **25**, No. 1, 31—36 (1958).
- 3.44. Jahsman W. E., Propagation of abrupt circular wave fronts in elastic sheets and plates, *Proc. Third U. S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, 1958, 195—202.
- 3.45. Plass H. J., Some solutions of the Timoshenko beam equation for short pulsetype loading, *J. Appl. Mech.*, **25**, No. 3, 379—385 (1958).
- 3.46. Kuo Shan S., Bending waves in free-free beams, *Proc. 4th Midwest. Conf. Solid Mech. Austin, Texas*, S. 1, s. a. 457—467 (1959).



- 3.47. Кабулов В. К., Интегральные уравнения типа баланса и их применение к динамическому расчету стержней и балок, Изд. АН УзССР, 1961.
- 3.48. Векслер Н. Д., Мянниль А. И., Нигул У. К., Применение метода сеток в теории типа Тимошенко для исследования переходных волновых процессов деформации плит конечных размеров, Прикл. мех. (В печати).
- 3.49. Векслер Н. Д., Мянниль А. И., Нигул У. К., Из опыта применения усовершенствованного варианта метода сеток к анализу переходных волновых процессов в плитах и оболочках, Докл. на V Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. (В печати).
- 3.50. Нигул У. К., Переходные волновые процессы деформации в упругих плитах конечных размеров, Докл. на V Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. (В печати).
- 3.51. Hadamard J., Le problème de Cauchy, Paris, 1932.

\*

- 4.1. Aggarwal R. R., Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk, III, J. Acoust. Soc. Am., 25, No. 3, 533—535 (1953).
- 4.2. Aggarwal R. R., Shaw E. A., Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk, J. Acoust. Soc. Am., 26, No. 3, 341—342 (1954).
- 4.3. Onoe M., Contour vibrations of thin rectangular plates, J. Acoust. Soc. Am., 30, No. 12, 1159—1162 (1958).
- 4.4. Harrison M., The propagation of elastic waves in a plate, Report No. 872; the David W. Taylor Model Basin, 1954.
- 4.5. Lord Rayleigh, On the free vibrations of an infinite plate of homogeneous isotropic elastic matter, Proc. Lond. Math. Soc., 20, 225—234, read April 11th, 1889 (vol. 1888/1889, publ. 1889).
- 4.6. Lord Rayleigh, On waves propagated along the surface of an elastic solid, Proc. Lond. Math. Soc., 17, 4—11, read Nov. 12th, 1885 (vol. 1885/1886, publ. 1887).
- 4.7. Lamb H., On the flexure of an elastic plate (Appendix), Proc. Lond. Math. Soc., 21, 70—90, read Dec. 12th, 1889 (vol. 1889/1890, publ. 1891).
- 4.8. Lamb H., On waves in an elastic plate, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 93, 114 (1917).
- 4.9. Lamé G., Leçons sur la théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solides, Ed. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1866.
- 4.10. Goodman L. E., Circular-crested vibrations of an elastic solid bounded by two parallel planes, Proc. 1st U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 65—73 (1952).
- 4.11. Aggarwal R. R., Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk, II, J. Acoust. Soc. Am., 24, No. 6, 663 (1952).
- 4.12. Schoch A., Der Schalldurchgang durch Platten, Acustica, 2, No. 1 (1952).
- 4.13. Pursey H., The launching and propagation of elastic waves in plates, Quart. J. Mech. Appl. Math., 10, No. 1, 45—62 (1957).
- 4.14. Lyon R. H., Response of an elastic plate to localized driving forces, J. Acoust. Soc. Am., 27, No. 2, 259—265 (1955).
- 4.15. Onoe M., A study of the branches of the velocity-dispersion equations of elastic plates and rods, Report, Joint Committee on Ultrasonics of the Institute of Electrical Communication Engineers and the Acoustical Society of Japan, 1955.
- 4.16. Mindlin R. D., An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates, Monograph, U. S. Army Signal Corps. Engr. Labs., Ft. Monmouth, N. Y., Signal Corps Contract, DA—36—039, Se—56 772, 1955.
- 4.17. Mindlin R. D., Vibrations of an infinite elastic plate at its cut-off frequencies, Proc. Third U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 225—226 (1958).
- 4.18. Mindlin R. D., Onoe M., Mathematical theory of vibrations of elastic plates, Proc. 11th Annual Symp. Freq. Control, U. S. Army Sign. Corps. Engr. Labs., Ft. Monmouth, N. Y., 17—40 (1957).
- 4.19. Holden A. N., Longitudinal modes of elastic waves in isotropic cylinders and slabs, Bell System Tech. J., 30, No. 4, P. 1, 956 (1951).
- 4.20. Mindlin R. D., Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates, J. Appl. Phys., 22, 316 (1951).
- 4.21. Tolstoy I., Usdin E., Wave propagation in elastic plates: low and high mode dispersion, J. Acoust. Soc. Am., 29, No. 1, 37—42 (1957).
- 4.22. Lamb H., A paper concerning Cp and Cg of opposite signs, Proc. Lond. Math. Soc., Sec. II, 1, 473 (1904).
- 4.23. Biot M. A., General theorems on the equivalence of group velocity and energy transport, Phys. Rev., 105, 1129—1137 (1957).
- 4.24. Budden K. G., The wave-guide mode theory of wave propagation, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Logos Press, London, 1962, 325 pp.
- 4.25. Crandall S. H., Negative group velocities in continuous structures, J. Appl. Mech., 24, No. 4, 622—623 (1957).



- 4.26. Goodier J. N., Bishop R. E. D., A note on critical reflections of elastic waves at free surfaces, *J. Appl. Phys.*, **23**, 124 (1952).
- 4.27. Grigsby T. N., Tajchman E. J., Properties of Lamb waves relevant to the ultrasonic inspection of thin plates, *IRE Trans. Ultrasonics Engng.*, **8**, No. 1, 26—33 (1961).
- 4.28. Гоголадзе В. Г., Дисперсия волн Релея в слое, *Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР*, No 119, 27—38 (1947).
- 4.29. Sherwood J. W., Propagation in an infinite elastic plate, *J. Acoust. Soc. Am.*, **30**, No. 10, 979—984 (1958).
- 4.30. Озеров Д. К., Теоретико-экспериментальное исследование волн Лява, I, Теория. Сб. *Вопр. динамики теории распространения сейсмических волн*, II, Изд. ЛГУ, 1959, 58—78.
- 4.31. Hudson J. A., The total internal reflection of SH waves, *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.*, **6**, No. 4, 509—531 (1962).
- 4.32. Mindlin R. D., Deresiewicz H., Thickness-shear and flexural vibrations of a circular disk, *J. Appl. Phys.*, **25**, No. 10, 1329—1332 (1954).
- 4.33. Мянниль А., Нигул У., О напряженных состояниях упругой плиты при распространении синусоидальных волн изгиба, *Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук*, No 3, 273—283 (1963).
- 4.34. Mindlin R. D., Schacknow A., Deresiewicz H., Flexural vibrations of rectangular plates, *J. Appl. Mech.*, **23**, No. 3, 430—436 (1956).
- 4.35. Kynch G. J., The fundamental modes of vibration of uniform beams for medium wavelengths, *Brit. J. Appl. Phys.*, **8**, No. 1, 64—73 (1957).
- 4.36. Lange N., Accuracy of the Bernoulli theory of bending for rods and the theory of plates, *Sixteenth Meeting of the Acoust. Soc. Am.*, 1960.
- 4.37. Коненков Ю. К., О нормальных волнах при изгибных колебаниях пластин, *Акуст. ж.*, **6**, No 1, 57—64 (1960).
- 4.38. Коненков Ю. К., К расчету фазовых скоростей нормальных волн при изгибных колебаниях упругой полосы, *Акустич. ж.*, **8**, No 2, 241—242 (1962).
- 4.39. Davies K. M., A critical study of the Hopkinson pressure bar, *Philos. Trans. Royal Soc. London, Ser. A*, **240**, 374—451 (1946—1948).
- 4.40. Morse R. W., Dispersion of compressional waves in isotropic rods of rectangular cross section, *J. Acoust. Soc. Am.*, **20**, No. 6, 833—838 (1948).
- 4.41. Aggarwal R. R., Axially symmetric vibrations of a finite isotropic disk, I, *J. Acoust. Soc. Am.*, **24**, No. 5, 463—468 (1952).
- 4.42. Aggarwal R. R., Axially symmetric vibration of a finite isotropic disk, *J. Acoust. Soc. Am.*, **26**, No. 2, 341—342 (1954).
- 4.43. Adachi R., On a plane wave propagated in an elastic plate with infinite breadth, *Kumamoto J. Sci.*, **A2**, No. 2, 184—195 (1955).
- 4.44. Volterra E., On the dispersion of waves in elastic bars, *9th Congr. Intern. Mécan. Appl.*, Actes, t. 7, 1957, 285—292.
- 4.45. Moseley D. S., Contribution to the theory of radial extensional vibrations in thin disks, *J. Acoust. Soc. Am.*, **32**, No. 8, 991—994 (1960).
- 4.46. Diercks K. J., McCormack K., James D. B., Phase velocity of plane longitudinal waves in infinite plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, **34**, No. 12 (1957).
- 4.47. Shaw E. A. G., On the resonant vibrations of thick barium titanate disks, *J. Acoust. Soc. Am.*, **28**, No. 1, 38—50 (1956).
- 4.48. Chosh J., Longitudinal vibrations of a hollow cylinder, *Bull. Calc. Math. Soc.*, **14**, 31—40 (1923—24).
- 4.49. Fay R. D., Waves in liquid-filled cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, **24**, No. 3, 459—462 (1952).
- 4.50. Greenspon J. E., Flexural vibrations of a thick-walled circular cylinder, *Proc. of the Third U. S. Nat. Congr. of Appl. Mech.*, 163—173 (1958).
- 4.51. Greenspon J. E., Vibrations of thick cylindrical shells, *J. Acoust. Soc. Am.*, **31**, No. 12, 1682—1683 (1959).
- 4.52. Greenspon J. E., Vibrations of a thick-walled cylindrical shell. Comparison of the exact theory with approximate theories, *J. Acoust. Soc. Am.*, **32**, No. 5, 571—578 (1960).
- 4.53. Greenspon J. E., Axially symmetric vibrations of a thick cylindrical shell in an acoustic medium, *J. Acoust. Soc. Am.*, **32**, No. 8, 1017—1025 (1960).
- 4.54. Greenspon J. E., Flexural vibrations of a thick-walled circular cylinder according to the exact theory of elasticity, *J. Aero Space Sci.*, **27**, No. 1, 37—40 (1960).
- 4.55. Gazis D. C., Exact analysis of the plane-strain vibrations of thick-walled hollow cylinders, *J. Acoust. Soc. Am.*, **30**, No. 8, 786—794 (1958).
- 4.56. Gazis D. C., Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow cylinders, P. I: Analytical foundation; P. II: Numerical results, *J. Acoust. Soc. Am.*, **31**, No. 5, 568—578 (1959).



- 4.57. Gazis D. C., Comments on "Vibrations of thick cylindrical shells", J. Acoust. Soc. Am., 32, No. 5, 611—613 (1960).
- 4.58. Lord Rayleigh, The theory of sound, N. Y., 1945.
- 4.59. Baron M. L., Bleich H. H., Tables for frequencies and modes of free vibration of infinitely long thin cylindrical shells, J. Appl. Mech., 21, No. 2, 178—184 (1954); Discuss: 22, No. 1, 135—136 (1955).
- 4.60. Нигул У. К., Некоторые результаты исследования уравнений собственных колебаний упругой кругоцилиндрической оболочки, Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 171, 19—36 (1960).
- 4.61. Нигул У. К., Об общих формах колебания круговой замкнутой цилиндрической оболочки, Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 147, 65—83 (1958).
- 4.62. Junger M. C., Rosato F. J., The propagation of elastic waves in thin-walled cylindrical shells, J. Acoust. Soc. Am., 26, No. 5, 709—713 (1954).
- 4.63. Smith P. W., Phase velocities and displacement characteristics of free waves in a thin cylindrical shell, J. Acoust. Soc. Am., 27, No. 6, 1065—1072 (1955).
- 4.64. McFadden J. A., Radial vibrations of thick-walled hollow cylinders, J. Acoust. Soc. Am., 26, No. 5, 714—715 (1954).
- 4.65. Herrmann G., On the dynamic behavior of shells, 9th Congr. Intern. Mécan. Appl., Actes, t. 7, 1957, 293—299.
- 4.66. Baltrukonis J. H., Gottenberg W. G., Thickness-shear vibrations of circular bars, J. Acoust. Soc. Am., 31, No. 6, 734—739 (1959).
- 4.67. Ghosh J., Torsional vibrations of a circular tube, Bull. Calc. Math. Soc., 13, 217—220 (1922/23).
- 4.68. Clark S. K., Torsional wave propagation in hollow cylindrical bars, J. Acoust. Soc. Am., 28, No. 6, 1163—1165 (1956).
- 4.69. Smith P. W. Jr., Vibrations of cylindrical shells, J. Acoust. Soc. Am., 30, No. 1, 83—84 (1958).
- 4.70. Smith P. W. Jr., Minimum axial phase velocity in shells, J. Acoust. Soc. Am., 30, No. 2, 140—141 (1958).
- 4.71. Volterra E., Discussion of the paper by Mirsky, J., Herrmann, G. "Axially symmetric motions of thick cylindrical shells", J. Appl. Mech., 25, No. 4, 629—631 (1958).

\*

- 5.1. Kromm A., Zur Ausbreitung von Stosswellen in Kreislochscheiben, Z. angew. Math. und Mech., 28, No. 4, 104—114 (1948).
- 5.2. Kromm A., Zur Ausbreitung von Stosswellen in Kreislochscheiben, Z. angew. Math. und Mech., 28, No. 10, 297—303 (1948).
- 5.3. Miklowitz J., Plane-stress unloading waves emanating from a suddenly punched hole in a stretched elastic plate, J. Appl. Mech., 27, No. 1, 165—171 (1960).
- 5.4. Selberg H. L., Transient compression waves from spherical and cylindrical cavities, Arkiv för Fysik, 5, 97—108 (1952).
- 5.5. Goodier J. N., Jahsman W. E., Propagation of a sudden rotary disturbance in an elastic plate in plane stress, J. Appl. Mech., 23, No. 2, 284—286 (1956).
- 5.6. Nowak M. J., The simplest extensional vibrations of a circular disk, J. Appl. Mech., 29, No. 2, 437—438 (1962).
- 5.7. Love A. E. H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, Ed. 4th, Cambridge, 1934.
- 5.8. Miklowitz J., Travelling compressional waves in an elastic rod according to the more exact one-dimensional theory, Proc. Second U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 179—186 (1955).
- 5.9. Miklowitz J., The propagation of compressional waves in a dispersive elastic rod, P. 1: Results from the theory, J. Appl. Mech., 24, No. 2, 231—239 (1957).
- 5.10. Miklowitz J., On the use of approximate theories of an elastic rod in problems of longitudinal impact, Proc. Third U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., 215—224 (1958).
- 5.11. Kaul R. K., On the propagation of pressure pulses in circular elastic rods, Z. angew. Math. und Phys., 14, No. 6, 704—713 (1963).
- 5.12. Чернаков П. В., Применение интегралов уравнения теплопроводности к решению задач о колебаниях стержней и пластин, Учен. зап. Куйбышевск. Гос. пед. и учит. ин-та, вып. 11, 11—27 (1951).
- 5.13. Eringen A., Transverse impact on beams and plates with arbitrary edge conditions, Illinois, Institute of Technology, 1952, 78 pp.
- 5.14. Mori D., Lateral impact on an infinite plate, Proc. 4th Japan. Nat. Congr. Appl. Mech. (1954), Tokyo, 361—364 (1955).
- 5.15. Greenspon J., Stresses and deflections in flat rectangular plates under dynamic lateral loads based on linear theory, Internat. Shipbuild. Progr., 3, No. 18, 63—76 (1956).



- 5.16. Mori D., Lateral impact on bars and plates, *Proc. Soc. Exptl. Stress Anal.*, **15**, No. 1, 171—178 (1957).
- 5.17. Соколов Ф. А., Колебания свободной пластинки на упругом основании под действием динамической нагрузки, *Изв. АН СССР, ОН, № 6*, 114—117 (1958).
- 5.18. Гильман Л. С., Теоретическое и экспериментальное исследование напряжений в плитах при действии кратковременных нагрузок, *Строит. механ. и расчет сооруж.*, № 4, 15—22 (1960).
- 5.19. Мазинг Р. И., Влияние формы импульсов на прогибы круглой пластинки, *Изв. АН СССР, ОН, Мех. и машиностр.*, № 6, 143—146 (1960).
- 5.20. Skudrzyk E. J., Kautz B. R., Greene D. C., Vibration of, and bending-wave propagation in plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, **33**, No. 1, 36—45 (1961).
- 5.21. Medick M. A., On classical plate-theory and wave propagation, *J. Appl. Mech.*, **28**, No. 2, 223—228 (1961).
- 5.22. Frischbier R., Die auf einem Kreisabschnitt plötzlich belastete Kreisplatte, *Wiss. Z. Martin Luther-Univ. Hallewilttemberg. Math. naturwiss. Reihe*, **10**, No. 5, 861—873 (1961).
- 5.23. Eringen A. C., Transverse impact on beams and plates, *J. Appl. Mech.*, **20**, No. 4, 461 (1953).
- 5.24. Goldschmidt W., *Impact*, Edward Arnold Ltd., London, 1960, 379 pp.
- 5.25. Dengler M. A., Goland M., Transverse impact of long beams including rotatory inertia and shear effects, *Proc. 1th U. S. Nat. Cong. Appl. Mech.*, 179—186 (1952).
- 5.26. Anderson R. A., Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory, *J. Appl. Mech.*, **20**, No. 4, 504—511 (1953).
- 5.27. Miklowitz J., Flexural wave solutions of coupled equations representing the more exact theory of bending, *J. Appl. Mech.*, **20**, No. 4, 511—514 (1953).
- 5.28. Leonard R., Budiansky B., On traveling waves in beams, *Nat. Advis. Comm. Aeronaut. Repts*, No. 1173, 1—27 (1954).
- 5.29. Lubkin J. L., Propagation of elastic impact stresses. OMR Progress Rep. No. 5, *Coutr. Nom.* — 704 (00), Midwest Re. Inst., Kansas City, Missouri, 1954.
- 5.30. Anderson R. A., Wave groups in the flexural motion of beams predicted by the Timoshenko theory, *J. Appl. Mech.*, **21**, No. 4, 388—394 (1954).
- 5.31. Goland M., Wickersham P. D., Dengler M. A., Propagation of elastic impact in beams in bending, *J. Appl. Mech.*, **22**, No. 1, 1—7 (1955).
- 5.32. Jones R. P. N., Transient flexural stresses in an infinite beam, *Quart. J. Mech., Appl. Math.*, **8**, No. 3, 373—384 (1955).
- 5.33. Dengler M. A., Transversale Wellen in Stäben und Platten unter stossförmiger Belastung, *Öst. Ingr.-Arch.*, **10**, No. 1, 39—66 (1956).
- 5.34. Olsson R. G., Transverse waves in rods and plates under impact load, *Öst. Ingr.-Arch.*, **12**, No. 1/2, 93—95 (1958).
- 5.35. Дубинкин М. В., О распространении волн в бесконечных плитах, *ПММ*, **23**, вып. 5, 984—987 (1959).
- 5.36. Bleich H. H., Shaw R., Dominance of shear stresses in early stages of impulsive motion of beams, *J. Appl. Mech.*, **27**, No. 1, 132—138 (1960).
- 5.37. Miklowitz J., Flexural stress waves in an infinite elastic plate due to a suddenly applied concentrated transverse load, *J. Appl. Mech.*, **27**, No. 4, 681—689 (1960).
- 5.38. Mencher A. G., Epicentral displacement caused by elastic wave in an infinite slab, *J. Appl. Phys.*, **24**, No. 9, 1240—1246 (1953).
- 5.39. Knopoff L., Surface motions of a thick plate, *J. Appl. Phys.*, **29**, No. 4, 661—670 (1958).
- 5.40. Knopoff L., Gilbert F., First motion methods in theoretical seismology, *J. Acoust. Soc. Am.*, **31**, No. 9, 1161—1168 (1959).
- 5.41. Broberg K. B., A problem on stress waves in an infinite elastic plate, *Trans. Roy. Inst. Tech., Stockholm, Rep. No. 139*, 1959.
- 5.42. Davids N., Transient analysis of stress-wave penetration in plates, *J. Appl. Mech.*, **26**, No. 4, 651—660 (1959).
- 5.43. Pytel A., Davids N., Further transient analysis of stress wave propagation in plates, *Proc. 4th Midwest. Conf. Solid Mech. Austin, Texas, S. 1, s.-a. 358—381* (1959).
- 5.44. Broberg R. B., Transient analysis of stress-wave penetration in plates, *J. Appl. Mech.*, **27**, No. 2, 366—367 (1960).
- 5.45. Davids N., Some problems of transient analysis of waves in plates, *Inter. Symp. Stress. Wave Prop. Interc. Publ.*, N. Y., 1960.
- 5.46. Pytel A., Davids N., Transient analysis of shear impact, *J. Appl. Mech.*, **29**, No. 1, 33—39 (1962).
- 5.47. Thiruvengkatachar V. R., Recent research in stress waves in India, *Intern. Symp. Stress Wave Prop., Interc. Publ.*, N. Y., 1960.



- 5.48. Thiruvengkatachar V. R., Stress-wave propagation induced in an infinite slab by an impulse over a circular area on one face, *1 Proc. Nat. Inst. Sci. India*, A 26, No. 2, 31—47 (1960).
- 5.49. Ellis O. E., Jones A. T., Longitudinal strain pulse propagation in wide rectangular bars, P. 2: Experimental observations and comparisons with theory, *J. Appl. Mech.*, 30, No. 1, 61—69 (1963).
- 5.50. Jones R. P. N., Transverse impact waves in a bar under conditions of plane strain elasticity, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 17, P. 4, 401—419 (1964).
- 5.51. Payton R. G., Dynamic membrane stresses in a circular elastic shell, *J. Appl. Mech.*, 28, No. 3, 417—420 (1961).
- 5.52. Berkowitz H. M., Longitudinal impact of a semi-infinite elastic cylindrical shell, *J. Appl. Mech.*, 30, No. 3, 347—354 (1963).
- 5.53. Medick M. A., On the initial response of a spherical shell to a concentrated force, *J. Appl. Mech.*, 29, No. 4, 689—695 (1962).
- 5.54. Laudloff H. F., Marshall E. J., Transient stresses in airfoils under blast loading, *J. Aeronaut. Sci.*, 22, No. 7, 508—510 (1955).
- 5.55. Ungar E., Response of plates to moving shocks, *Aero-Space Engng.*, 20, No. 3, 16—17 (1961).
- 5.56. Mindlin R. D., Bleich H. H., Response of an elastic cylindrical shell to a transverse step shock wave, *J. Appl. Mech.*, 20, No. 2, 189—195 (1953).
- 5.57. Baron M. L., The response of a cylindrical shell to a transverse shock wave, *Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 201—212 (1954).
- 5.58. Haywood J. H., Response of an elastic cylindrical shell to a pressure pulse, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, 11, No. 2, 129—141 (1958).
- 5.59. Payton R. G., Transient interaction of an acoustic wave with a circular cylindrical elastic shell, *J. Acoust. Soc. Am.*, 32, No. 6, 722—729 (1960).
- 5.60. Baron M. L., Parnes R., Diffraction of a pressure wave by a cylindrical shell in an elastic medium, *Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1, 63—75 (1962).
- 5.61. Peralter L. A., Raynor S., Initial response of a fluid-filled, elastic, circular, cylindrical shell to a shock wave in acoustic medium, *J. Acoust. Soc. Am.*, 36, No. 3, 476—488 (1964).
- 5.62. Huth J. H., Cole J. D., Elastic-stress waves produced by pressure loads on a spherical shell, *J. Appl. Mech.*, 22, No. 4, 473—478 (1955).
- 5.63. Mann-Nachbar P., The interaction of an acoustic wave and an elastic spherical shell, *Quart. Appl. Math.*, 15, No. 1, 83—93 (1957).
- 5.64. Baker W. E., Allen F. J., The response of elastic spherical shells to spherically symmetric internal blast loading, *Proc. 3rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 79—87 (1958).
- 5.65. Skalak R., An extension of the theory of water hammer, *Trans. ASME*, 78, 105—116 (1956).
- 5.66. Тимошенко С. П., Колебания в инженерном деле. Физматгиз, М., 1959.
- 5.67. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К., Макушин В. М., Малинин Н. Н., Феодосеев В. И., Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении, М., 1952.
- 5.68. Carrier G. E., Response of a submerged cylindrical shell to an axially propagating acoustic wave, *Brown. Univ.*, 1953, 14 pp.
- 5.69. Kenney J. T., Steady-state vibrations of beam on elastic foundation for moving load, *J. Appl. Mech.*, 21, No. 4, 359 (1954).
- 5.70. Eringer A. C., Response of an elastic disk to impact and moving loads, *J. Mech. Appl. Math.*, 8, No. 4, 385—393 (1955).
- 5.71. Naruoka M., Hiroi J., Dynamic influence of rectangular plates under the force of moving loads, *Proc. 5th Japan Nat. Congr. Appl. Mech.*, Tokyo, 411—414 (1956).
- 5.72. Герасимов И. С., Об асимптотическом интегрировании дифференциального уравнения одной автомодельной динамической задачи, *ДАН СССР*, 126, № 4, 727—729 (1959).
- 5.73. Герасимов И. С., Об одной автомодельной динамической задаче для конической оболочки, *ДАН СССР*, 125, № 5, 989—991 (1959).
- 5.74. Ang Dang Dink, Transient motion of a line load on the surface of an elastic half-space, *Quart. Appl. Math.*, 18, No. 3, 251—256 (1960).
- 5.75. Присекин В. Л., Устойчивость цилиндрической оболочки под действием движущейся нагрузки, *Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр.*, № 5, 1961.
- 5.76. Morley L. S. D., Stresses produced in an infinite elastic plate by the application of loads travelling with uniform velocity along the bounding surface, *Aero. Res. Coun. Lond. Rep. Mem.*, 3266, 1961, 20 pp.
- 5.77. Brogan W., Radial vibrations of a thin cylindrical shell, *J. Acoust. Soc. Am.*, 33, No. 12, 1778—1781 (1961).
- 5.78. Герасимов И. С., Действие подвижной нагрузки на коническую оболочку, *Изв. высш. учеб. зав., Матем.*, № 4, 33—37 (1962).



- 5.79. Morley L. S. D., Elastic plate with loads travelling at uniform velocity along the bounding surfaces, *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **15**, No. 5, 193—213 (1962).
- 5.80. Mann-Nachbar P., On the role of bending in the dynamic response of thin shells to moving discontinuous loads, *J. Aero-Space Sci.*, **29**, No. 6, 648—657 (1962).
- 5.81. Reismann H., Dynamic response of an elastic plate strip to a moving line load, *AIAA*, **1**, No. 2, 354 (1963).
- 5.82. Bhuta P. G., Transient response of a thin elastic cylindrical shell to a moving shock wave, *J. Acoust. Soc. Am.*, **35**, No. 1, 25—30 (1963).
- 5.83. Jahanshahi A., Force singularities of shallow cylindrical shells, *J. Appl. Mech.*, **30**, No. 3, 342—346 (1963).
- 5.84. Kaul R. K., McCoy J. J., Propagation of axisymmetric waves in a circular semiinfinite elastic rod, *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**, No. 4, 653—660 (1964).

\*

- 6.1. Алумяэ Н., О фундаментальной системе интегралов уравнения малых осесимметрических установившихся колебаний упругой конической оболочки вращения, *Изв. АН ЭССР. Сер. техн. и физ.-мат. наук*, № 1, 3—15 (1960).
- 6.2. Вейгель И., Мянниль А., Орг Э., Малые установившиеся осесимметрические колебания конической оболочки вращения, *Изв. АН ЭССР. Сер. техн. и физ.-мат. наук*, № 1, 16—25 (1960).
- 6.3. Chang C. S., Energy dissipation in longitudinal vibration, *Proc. 3rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1958.
- 6.4. Lockett J. F., Longitudinal elastic waves in cylinders and tubes — including thermoelastic effects, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **11**, 153—159 (1959).
- 6.5. Newman M. K., Viscous damping in flexural vibrations of bars, *J. Appl. Mech.*, **17**, No. 3, 367—376 (1959).
- 6.6. Snowdon J. C., Transverse vibration of internally damped beams with rotatory inertia and shear, *J. Acoust. Soc. Am.*, **35**, No. 11, 1897 (1963).
- 6.7. Tasi J., Herrmann G., Thermoelastic dissipation in high-frequency vibrations of crystal plates, *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**, No. 1, 100—110 (1964).

*Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР*

*Поступила в редакцию  
29/VIII 1964*

*L. AINOLA, U. NIGULA*

### PINGELAINED ELASTSETES PLAATIDES JA KOORIKUTES

Artiklis antakse ülevaade uurimustest, mis lineaarse elastsusteooria baasil käsitlevad pingelainete levikut plaatides ja koorikutes. I osa on pühendatud plaatide ja koorikute ligikaudsete teooriate väljatöötamise meetoditele ja rakendamise tulemustele. II osa käsitleb lainete leviku protsesside teoreetilise uurimise meetodikat ja tulemusi ning sisaldab ülevaate kaasaegsetest probleemidest ja nende uurimise mõningatest perspektiividest.



L. AINOLA, U. NIGUL

## STRESS WAVES IN ELASTIC PLATES AND SHELLS

An attempt is made to give a survey of the world literature (355 references) on the linear theory of stress waves in elastic shells and plates. The bulk of the paper is focussed on transient wave propagation. Several theories and methods of analysis are considered, the most important results described, unsolved problems shown and the nearest prospects discussed.

The conditions under which it is important to investigate the transient wave propagation in finite plates and shells used in technical application, are pointed out in the introduction, where the difference of the problems of transient wave propagation in finite plates and shells from those in geophysics is concerned, and some other general problems dealt with.

Part I is devoted to approximate theories or "models". § 1 deals with methods of the derivation of approximate theories. Several analytic, asymptotic and energy methods are classified, described and discussed. The results concerning the estimation of the error of the Kirchhoff-Love theory, obtained by asymptotic methods, are mentioned. A generalization of the Timoshenko type theory for arbitrary shells is presented. In § 2, the approximate equations for plates, circular cylindrical shells and spherical shells are discussed.

Part II is devoted to wave propagation. In § 3, integration methods are described. The Fourier method is treated mostly from the point of conditions restricting the field of its practical application. Particular attention is paid to the one- and double-transform methods, particularly to the problems of an approximate evaluation of the contour integrals. The energy method as well as characteristics and networks methods are also concerned. The recent developments in using improved variations of the networks method are described in brief. § 4 is devoted to the modes of wave transmission. A survey of the investigation of Rayleigh-Lamb equation roots and group velocities is presented, and some information on displacements distribution in the thickness of the plate is given. The modes in approximate theories of plates are also dealt with. For the circular cylindrical shells, the results of the mode research on the basis of three-dimensional and two-dimensional theories are discussed. Some illustrations to § 4 are given in figures 1—8. § 5 is devoted to the results concerning transient wave propagation. The investigations on the basis of the approximate theories as well as on the basis of the exact theory are considered. Some numerical results are given in figures 9—16. Among them are recent results for the finite Timoshenko plate (figs. 10—13) and an illustration to the three-dimensional networks method (fig. 15). The critical conclusions on approximate theories and methods are made and the conditions restricting their application are shown. In § 6 an attempt is made to formulate and discuss the principal problems. Some generalizations of the known results are presented, a number of unsolved problems shown and the prospects discussed.