EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. XIII KÖIDE
FÜÜSIKA-MATEMAATIKA- JA TEHNIKATEADUSTE SEERIA. 1964, NR. 1

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ XIII
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК. 1964, № 1

https://doi.org/10.3176/phys.math.tech.1964.1.11

О СРЕДНЕКВАДРАТНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

Т. ТОБИАС

В своей работе [1] Н. Винер определил меру в пространстве непрерывных функций на отрезке [0,1]. Функции подчинены условию $x(0)=0$. Там же он сформулировал и понятие интеграла по этой мере. Позднее оказалось, что аппаратура Винера имеет важные приложения в теоретической физике и теории случайных процессов [2, 3].

В статье Дж. Ие [5] дано определение меры Винера в пространстве непрерывных функций двух переменных.

Идея о применении меры Винера в теории приближения линейных функционалов принадлежит Сульдину [4].

В настоящей работе определяется мера Винера в пространстве непрерывных функций n переменных и рассматривается среднеквадратное приближение линейных функционалов на этом пространстве.

1. Основные обозначения и определения

Пусть C_n — пространство всех непрерывных функций $x(s_1, \ldots, s_n)$ (в дальнейшем мы обозначим их также $x(s)$), определенные на n-мерном кубе $S_n=\{0 \leqslant s_1 \leqslant 1; \ldots; 0 \leqslant s_n \leqslant 1\}$ и удовлетворяющие условию

$$x(s_1, \ldots, s_{i-1}, 0, s_{i+1}, \ldots, s_n)=0 \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{1.1}$$

Разобьем S_n на части плоскостями $s_i=s_i^j \qquad (i=1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, m_i)$,

где

$$0=s_1^0<\ldots<s_1^{m_1}=1; \ldots; \qquad 0=s_n^0<\ldots<s_n^{m_n}=1 \tag{1.2}$$

и обозначим $m_1 \ldots m_n=M_n$. Пусть в M_n-мерном евклидовом пространстве R_{M_n} дано измеримое (в смысле Лебега) множество E. В пространстве C_n введем соответствующее цилиндрическое множество («квазиинтервал» по терминологии Винера)

$$I\{s_1^1, \ldots, s_1^{m_1}, \ldots, s_n^1, \ldots, s_n^{m_n}; E\}=$$

$$=\{x(s): x(s) \in C_n, [x(s_1^1, \ldots, s_n^1), \ldots, x(s_1^{m_1}, \ldots, s_n^{m_n})] \in E\}.$$

Его меру определим формулой

$$m(I)=\int\overset{(M_n)}{\cdots}\int_E W\{s_1^1,\ldots,\ s_1^{m_1},\ldots,\ s_n^1,\ldots,\ s_n^{m_n}\}\,du_{(1)}\ldots du_{(m)}, \tag{1.3}$$

где

$$W\{s_1^1,\ldots,\ s_1^{m_1},\ldots,\ s_n^1,\ldots,\ s_n^{m_n}\}=$$

$$=\left\{(2\pi)^{M_n}[s_1^1(s_1^2-s_1^1)\ldots(s_1^{m_1}-s_1^{m_1-1})]^{\frac{M_n}{m_1}}\ldots[s_n^1(s_n^2-s_n^1)\ldots(s_n^{m_n}-s_n^{m_n-1})]^{\frac{M_n}{m_n}}\right\}^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)}\frac{\left[\sum\limits_{(0)\leqslant(k)\leqslant(1)}u_{(i)-(k)}\cdot(-1)^{k_1+\cdots+k_n}\right]^2}{(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\ldots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})}\right\}. \tag{1.4}$$

В формулах (1.3) и (1.4) приняты следующие обозначения:

$$(m)=(m_1,\ldots,\ m_n),\ (i)=(i_1,\ldots,\ i_n),\ (k)=(k_1,\ldots,\ k_n),\ (0)=(0,\ldots,\ 0),\ (1)=(1,\ \ldots,\ 1),$$

$$u_{(i)}=u_{i_1,\ldots,i_n}\ (u_{i_1,\ldots,0,\ldots,i_n}=0)\quad\text{и}\quad(i)\pm(k)=(i_1\pm k_1,\ldots,\ i_n\pm k_n).$$

$\sum\limits_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)}$ означает $\sum\limits_{i_1=1}^{m_1}\cdots\sum\limits_{i_n=1}^{m_n}$.

Распространяя меру цилиндрических множеств на порожденное ими σ-кольцо, мы и получим меру Винера в пространстве C_n.

Так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\overset{(M_n)}{\cdots}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}W\,du_{(1)}\ldots du_{(m)}=1,$$

то мера Винера является вероятностной мерой.

Пусть $F(x)$ — функционал на пространстве C_n. Интеграл Лебега от функционала $F(x)$ по мере Винера назовем интегралом Винера и обозначим через $\int\limits_{C_n}F(x)\,d_Wx$. Пространство всех функционалов, суммируемые с квадратом (т. е. $\int\limits_{C_n}|F(x)|^2d_Wx<\infty$) обозначим через $L_2[C_n]$.

Отметим, что при определении меры и интеграла мы воспользовались вероятностными соображениями [1, 7]. Другая возможность определения интеграла на функциональном пространстве (при помощи схемы Даниэля) изложена Шиловым [6].

Вычислим некоторые интегралы, которые необходимы нам в дальнейшем.

Из определения меры следует, что приращение функции $\Delta x(s^{(i)})=$ $=\sum\limits_{(0)\leqslant(k)\leqslant(1)}x(s_1^{i_1-k_1},\ \ldots,\ s_n^{i_n-k_n})(-1)^{k_1+\ldots+k_n}$ имеет гауссовское распределение. Но тогда, по определению математического ожидания,

$$\int_{C_n}[\Delta x(s^{(i)})]^m d_W x = \frac{1}{\sqrt{2\pi(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\ldots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})}}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} u^m \exp\left[-\frac{u^2}{2(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\ldots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})}\right]du =$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{если } m \text{ нечетно} \\ [(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\ldots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})]^{\frac{m}{2}}(m-1)(m-3)\ldots 1, & \text{если } m \text{ четно.}\end{cases}$$

Допустим, что $s_1^1 < s_1^2$; ...; $s_n^1 < s_n^2$. Ввиду условия (1.1) $\Delta x(s^{(1)}) = x(s_1^1, \ldots, s_n^1)$. Так как различные приращения имеют независимые распределения, то

$$\int_{C_n} x(s^{(1)})x(s^{(2)})\,d_W x = \int_{C_n}\Delta x(s^{(1)})\Big[\sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(2)}\Delta x(s^{(i)})\Big]d_W x =$$

$$=\int_{C_n}[\Delta x(s^{(1)})]^2 d_W x = s_1^1\ldots s_n^1.$$

В общем случае

$$\int_{C_n} x(s)x(t)\,d_W x = \min(s_1, t_1)\ldots\min(s_n, t_n). \tag{1.5}$$

Пусть

$$\sigma_k(s)=\begin{cases} c, & \text{если } 0\leqslant s_1^1\leqslant s_1 < s_1^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & 0\leqslant s_n^1\leqslant s_n < s_n^2 \\ 0 & \text{в остальной части } S_n\end{cases}\qquad \sigma_l(t)=\begin{cases} d, & \text{если } 0\leqslant t_1^1\leqslant t_1 < t_1^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & 0\leqslant t_n^1\leqslant t_n < t_n^2 \\ 0 & \text{в остальной части } S_n\end{cases}$$

Без ограничения общности предположим, что $s_i^1\leqslant t_i^1\leqslant s_i^2\leqslant t_i^2$.
$(i=1, \ldots, n)$

Положим, по определению

$$\int_{S_n} x(s)\,d\sigma_k(s) = (-1)^n c\sum_{(0)\leqslant(l)\leqslant(1)}(-1)^{l_1+\ldots+l_n}x(s_1^{2-l_1}, \ldots, s_n^{2-l_n}) =$$

$$=(-1)^n c\,\Delta x(s^{(2)})$$

и вычислим скалярное произведение таких функционалов. Используя формулу (1.5), получим

$$\int_{C_n}\Big[\int_{S_n}x(s)\,d\sigma_k(s)\cdot\int_{S_n}x(t)\,d\sigma_l(t)\Big]d_W x = cd\int_{C_n}[\Delta x(s^{(2)})][\Delta x(t^{(2)})]d_W x =$$

$$=cd(s_1^2-t_1^1)\ldots(s_n^2-t_n^1)=\int_{S_n}\sigma_k(s)\sigma_l(s)\,ds.$$

Ясно, что полученная формула правильна также для ступенчатых функций, удовлетворяющих условию

$$\sigma_k(s_1, \ldots, s_{i-1}, 1, s_{i+1}, \ldots, s_n) = \sigma_l(t_1, \ldots, t_{j-1}, 1, t_{j+1}, \ldots, t_n) = 0. \tag{1.6}$$
$$(i, j = 1, \ldots, n)$$

Пусть теперь $\sigma(s) \in L_2[S_n]$ — любая функция, удовлетворяющая условию (1.6). Рассмотрим последовательность ступенчатых функций $\{\sigma_m(s)\}$, которая сходится в среднем к функции $\sigma(s)$. Тогда $\left\{\int\limits_{S_n} x(s)\,d\sigma_m(s)\right\}$ — сходящаяся в себе последовательность функционалов

$$\int\limits_{C_n} \Big[\int\limits_{S_n} x(s)\,d\sigma_m(s) - \int\limits_{S_n} x(s)\,d\sigma_{m'}(s) \Big]^2 d_W x = \int\limits_{S_n} [\sigma_m(s) - \sigma_{m'}(s)]^2 ds \to 0,$$

и ввиду полноты пространства $L_2[C_n]$ сходится. Предел последовательности обозначим через $\int\limits_{S_n} x(s)\,d\sigma(s)$ и назовем интегралом Пэли-Винера-Зигмунда [9]. Используя слабую сходимость, легко увидеть, что при любых $\sigma_k(s), \sigma_l(s) \in L_2[S_n]$ (при условии (1.6))

$$\int\limits_{C_n} \Big[\int\limits_{S_n} x(s)\,d\sigma_k(s) \cdot \int\limits_{S_n} x(t)\,d\sigma_l(t) \Big] d_W x = \int\limits_{S_n} \sigma_k(s)\sigma_l(s)\,ds. \tag{1.7}$$

Аналогично можно ввести интеграл $\int\limits_{S_n} \sigma(s)\,dx(s)$, но

$$\int\limits_{C_n} \Big[\int\limits_{S_n} \sigma_k(s)\,dx(s) \cdot \int\limits_{S_n} \sigma_l(t)\,dx(t) \Big] d_W x = \int\limits_{S_n} \sigma_k(s)\,\sigma_l(s)\,ds \tag{1.8}$$

и без условия (1.6).

2. Кубатурные формулы, наилучшие в среднеквадратном смысле

Пусть даны линейные функционалы $f(x) = \int\limits_{S_n} x(s)\,d\sigma(s)$ и

$$f_{i_1, \ldots, i_n}(x) = f_{(i)}(x) = \int\limits_{S_n} x(s)\,d\sigma_{(i)}(s).$$

Рассмотрим приближенную формулу

$$f(x) \approx \sum_{(1) \leqslant (i) \leqslant (m)} C_{(i)} f_{(i)}(x). \tag{2.1}$$

Поставим задачу: определить коэффициенты $C_{(i)}$ так, чтобы среднеквадратная ошибка формулы (2.1) была наименьшей, т. е.

$$I = \int\limits_{C_n} \Big[f(x) - \sum_{(1) < (i) < (m)} C_{(i)} f_{(i)}(x) \Big]^2 d_W x = \min. \tag{2.2}$$

Формулу, которая реализует этот минимум, мы назовем наилучшей.

Предположим, что система функционалов $f_{(i)}(x)$ образует ортонормированную систему, т. е.

$$(f_{(i)},\ f_{(j)}) = \delta^{j_1,\ldots,j_n}_{i_1,\ldots,i_n}.$$

Тогда известно, что выражение (2.2) достигает минимума, если $C_{(i)}$ являются коэффициентами Фурье, т. е.

$$C_{(i)} = (f,\ f_{(i)}) = \int_{S_n} \sigma(s)\,\sigma_{(i)}(s)\,ds. \tag{2.3}$$

Пусть R — конечномерное подпространство в C_n с базисом

$$\varphi_{(k)}(t) = (-1)^n \int_0^{t_1} \ldots \int_0^{t_n} \sigma_{(k)}(s)\,ds.$$

Тогда легко увидеть, что

$$\sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)} C_{(i)} f_{(i)}(\varphi_{(k)}) = f(\varphi_{(k)}),$$

т. е. наилучшая формула (2.1) является точной в подпространстве R.

Верно и обратное: исходя из базиса подпространства R можно при некоторых ограничениях определить функционалы $f_{(i)}(x)$ так, чтобы формула (2.1) была точной в подпространстве R [4].

Рассмотрим приближенную формулу

$$f(x) \approx \sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)} C_{(i)} x(s_1^{i_1},\ldots,s_n^{i_n}) = \sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)} C_{(i)}\, x(s^{(i)}). \tag{2.4}$$

Здесь

$$x(s^{(i)}) = f_{(i)}(x) = \int_{S_n} x(s)\, d\Theta_{(i)}(s), \tag{2.5}$$

где

$$\Theta_{(i)}(s) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{если } s_1 < s_1^{i_1};\ \ldots;\ s_n < s_n^{i_n}, \\ 0, & \text{если } s_k \geqslant s_k^{i_k} \text{ при любом } k = 1,\ldots,n. \end{cases} \tag{2.6}$$

Функционалы (2.5) не образуют ортонормированную систему, так как

$$\int_{S_n} \Theta_{(i)}(s)\Theta_{(j)}(s)\,ds = \min(s_1^{i_1},\ s_1^{j_1}) \ldots \min(s_n^{i_n},\ s_n^{j_n}).$$

Ортонормированную систему образуют функционалы

$$F_{(i)}(x) = \frac{\sum\limits_{(0)\leqslant(k)\leqslant(1)} f_{(i)-(k)}(x)(-1)^{k_1+\cdots+k_n}}{\sqrt{(s_1^{i_1} - s_1^{i_1-1})\ldots(s_n^{i_n} - s_n^{i_n-1})}}. \tag{2.7}$$

Действительно, у этих функционалов

$$\Theta_{(i)}(s)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\dots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})}}, & \text{если } s_1^{i_1-1}\leqslant s_1<s_1^{i_1};\dots;s_n^{i_n-1}\leqslant s_n<s_n^{i_n},\\ 0 & \text{в остальной части } S_n.\end{cases}$$

В приближенной формуле

$$f(x)\approx\sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)}C^*_{(i)}F_{(i)}(x) \tag{2.8}$$

наилучшие коэффициенты определяются по формуле (2.3)

$$C^*_{(i)}=\frac{1}{\sqrt{(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\dots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})}}\int\limits_{s_1^{i_1-1}}^{s_1^{i_1}}\dots\int\limits_{s_n^{i_n-1}}^{s_n^{i_n}}(-1)^n\sigma(s)\,ds. \tag{2.9}$$

Можно проверить, что коэффициенты формулы (2.4) выражаются через $C^*_{(i)}$ следующим образом:

$$C_{(i)}=\sum_{(0)\leqslant(k)\leqslant(1)}\frac{C^*_{(i)+(k)}(-1)^{k_1+\dots+k_n}}{\sqrt{(s_1^{i_1+k_1}-s_1^{i_1+k_1-1})\dots(s_n^{i_n+k_n}-s_n^{i_n+k_n-1})}}. \tag{2.10}$$

Здесь $C^*_{(\dots,m_k+1,\dots)}=0 \qquad (k=1,\dots,n).$

Пусть теперь

$$f(x)=\int\limits_{S_n}x(s)\,ds=\int\limits_{S_n}x(s_1,\dots,s_n)\,d[(s_1-1)\dots(s_n-1)].$$

Из формулы (2.9) получим

$$C^*_{(i)}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\dots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})}}\int\limits_{s_1^{i_1-1}}^{s_1^{i_1}}\dots\int\limits_{s_n^{i_n-1}}^{s_n^{i_n}}(s_1-1)\dots(s_n-1)\,ds_1,\dots,ds_n=$$

$$=\frac{(-1)^n}{2^n\sqrt{(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\dots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})}}(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\dots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})(s_1^{i_1}+$$

$$+s_1^{i_1-1}-2)\dots(s_n^{i_n}+s_n^{i_n-1}-2). \tag{2.11}$$

Коэффициенты $C_{(i)}$ вычислим по формуле (2.10). Предположим сначала, что $i_1<m_1,\dots,i_n<m_n$. Тогда

$$C_{(i)}=\frac{(-1)^n}{2^n}\sum_{(0)\leqslant(k)\leqslant(1)}(s_1^{i_1+k_1}+s_1^{i_1+k_1-1}-2)\dots(s_n^{i_n+k_n}+s_n^{i_n+k_n-1}-2)\times$$

$$\times(-1)^{k_1+\dots+k_n}=\frac{(-1)^n}{2^n}(-1)\sum_{k_1=0}^{1}\dots\sum_{k_{n-1}=0}^{1}(s_1^{i_1+k_1}+s_1^{i_1+k_1-1}-2)\dots(s_{n-1}^{i_{n-1}+k_{n-1}}+$$

$$+s_{n-1}^{i_{n-1}+k_{n-1}-1}-2)(s_n^{i_n+1}-s_n^{i_n-1})(-1)^{k_1+\dots+k_{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{2^n}(s_1^{i_1+1}-s_1^{i_1-1})\dots(s_n^{i_n+1}-s_n^{i_n-1}).$$

Если $i_k = m_k$, то соответствующий множитель $(s_k^{i_k+1} - s_k^{i_k-1})$заменится множителем $(2 - s_k^{m_k} - s_k^{m_k-1})$.

В результате

$$\int\limits_{S_n} x(s)\,ds \approx \frac{1}{2^n} \sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)} \gamma_{(i)}\, x(s^{(i)}), \tag{2.12}$$

где

$$\gamma_{(i)} = \begin{cases} (s_1^{i_1+1} - s_1^{i_1-1}) \dots (s_n^{i_n+1} - s_n^{i_n-1}), & \text{если } i_1 < m_1, \dots, i_n < m_n, \\ (s_1^{i_1+1} - s_1^{i_1-1}) \dots (s_{l-1}^{i_{l-1}+1} - s_{l-1}^{i_{l-1}-1})(2 - s_l^{m_l} - s_l^{m_l-1})(s_{l+1}^{i_{l+1}+1} - \\ - s_{l+1}^{i_{l+1}-1}) \dots (s_n^{i_n+1} - s_n^{i_n-1}), & \text{если } i_1 < m_1, \dots, i_{l-1} < m_{l-1}, \\ & i_l = m_l,\ i_{l+1} < m_{l+1}, \dots, i_n < m_n. \end{cases} \tag{2.13}$$

Итак, если заданы узлы (1.2)*, то для вычисления n-кратного интеграла мы получим наилучшую формулу (2.12) с коэффициентами (2.13). Но коэффициенты (2.13) зависят от узлов. Найдем теперь узлы так, чтобы формула (2.12) была наилучшей, т. е. найдем такие узлы, которые минимизируют среднеквадратную ошибку $I = (f, f) - \sum\limits_{(1)\leqslant(k)\leqslant(m)} (C^*_{(i)})^2$. Из (2.11) получим

$$I = (f, f) - \frac{1}{2^{2n}} \sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)}' (s_1^{i_1} - s_1^{i_1-1}) \dots$$

$$\dots (s_n^{i_n} - s_n^{i_n-1})(s_1^{i_1} + s_1^{i_1-1} - 2)^2 \dots (s_n^{i_n} + s_n^{i_n-1} - 2)^2.$$

Найдя $\frac{\partial I}{\partial s_l^{i_l}}$ и приравняя его нулю, получим следующую систему:

$$[(s_l^{i_l} + s_l^{i_l-1} - 2)^2 + 2(s_l^{i_l} + s_l^{i_l-1} - 2)(s_l^{i_l} - s_l^{i_l-1}) + 2(s_l^{i_l+1} + \\ + s_l^{i_l} - 2)(s_l^{i_l+1} - s_l^{i_l}) - (s_l^{i_l+1} + s_l^{i_l} - 2)^2] \times$$

$$\times \left\{ \sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)} \frac{(s_1^{i_1} - s_1^{i_1-1}) \dots (s_n^{i_n} - s_n^{i_n-1})(s_1^{i_1} + s_1^{i_1-1} - 2)^2 \dots (s_n^{i_n} + s_n^{i_n-1} - 2)^2}{(s_l^{i_l} - s_l^{i_l-1})(s_l^{i_l} + s_l^{i_l-1} - 2)^2} \right\} = 0$$

$$(i_l = 1, \dots, m_l - 1)$$

$$[(s_l^{m_l} + s_l^{m_l-1} - 2)^2 + 2(s_l^{m_l} + s_l^{m_l-1} - 2)(s_l^{m_l} - s_l^{m_l-1})] \times$$

$$\times \left\{ \sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)}' \frac{(s_1^{i_1} - s_1^{i_1-1}) \dots (s_n^{i_n} - s_n^{i_n-1})(s_1^{i_1} + s_1^{i_1-1} - 2)^2 \dots (s_n^{i_n} + s_n^{i_n-1} - 2)^2}{(s_l^{i_l} - s_l^{i_l-1})(s_l^{i_l} + s_l^{i_l-1} - 2)^2} \right\} = 0$$

Ввиду (1.2) все слагаемые в фигурных скобках положительны и поэтому выражения в квадратных скобках равны нулю, т. е.

$$\begin{cases} (s_l^{i_l} + s_l^{i_l-1} - 2)^2 + 2(s_l^{i_l} + s_l^{i_l-1} - 2)(s_l^{i_l} - s_l^{i_l-1}) + \\ + 2(s_l^{i_l+1} + s_l^{i_l} - 2)(s_l^{i_l+1} - s_l^{i_l}) - (s_l^{i_l+1} + s_l^{i_l} - 2)^2 = 0 \\ (s_l^{m_l} + s_l^{m_l-1} - 2)^2 + 2(s_l^{m_l} + s_l^{m_l-1} - 2)(s_l^{m_l} - s_l^{m_l-1}) = 0 \end{cases}$$

* Теперь можно считать, что $s_k^{m_k} \leqslant 1$.

После простых преобразований получим для определения узлов систему

$$\begin{cases} s_l^{i_l+1} = 2s_l^{i_l} - s_l^{i_l-1} \\ s_l^{m_l} = \dfrac{2 + s_l^{m_l-1}}{3}, \end{cases}$$

решением которой является

$$s_l^{i_l} = \frac{2i_l}{2m_l+1} \qquad (i_l = 1, \ldots, m_l). \tag{2.14}$$

Ввиду произвольности l мы нашли все искомые узлы (можно проверить, что они действительно минимизируют ошибку). Из формулы (2.13) видно, что при узлах (2.14)

$$\frac{1}{2^n}\gamma_{(i)} = \frac{2^n}{(2m_1+1)\ldots(2m_n+1)}.$$

Теперь из формулы (2.12) мы получим кубатурную формулу, наилучшую в среднеквадратном смысле

$$\int\limits_{S_n} x(s)\,ds \approx \frac{2^n}{(2m_1+1)\ldots(2m_n+1)} \sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)} x\left(\frac{2i_1}{2m_1+1}, \ldots, \frac{2i_n}{2m_n+1}\right). \tag{2.15}$$

В случае $n = 1$ формула (2.15) совпадает, конечно, с результатом Сульдина [4].

Отметим, что аналогично можно рассматривать и нахождение наилучшей формулы при вычислении интегралов с весом. Из формулы (2.8) видно, что

$$\int\limits_{S_n} x(s)p(s)\,ds = \int\limits_{S_n} x(s)\,d\left[\int\limits_0^{s_1}\cdots\int\limits_0^{s_n} p(t)\,dt - q(s)\right] \approx \sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)} C^*_{(i)}F_{(i)}(x),$$

где $F_{(i)}(x)$ определяются формулой (2.7), а $q(s)$ — слагаемое, обеспечивающее выполнение условия (1.6) (отметим, что $dq(s) = 0$).

Ввиду формулы (2.9)

$$C^*_{(i)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(s_1^{i_1} - s_1^{i_1-1})\ldots(s_n^{i_n} - s_n^{i_n-1})}} \int\limits_{s_1^{i_1-1}}^{s_1^{i_1}}\ldots\int\limits_{s_n^{i_n-1}}^{s_n^{i_n}} \left[\int\limits_0^{s_1}\ldots\int\limits_0^{s_n} p(t)\,dt - q(s)\right]ds.$$

Но для определения наилучших узлов получается (даже при очень простых весах) сложная нелинейная система, общее решение которой вряд ли удастся найти.

3. Среднеквадратное приближение δ-функций

Рассмотрим вопрос наилучшего среднеквадратного приближения δ-функций линейными комбинациями δ-функций, т. е. пусть

$$x(u) \approx \sum_{(1) \leqslant (i) \leqslant (m)} C_{(i)}\, x(s^{(i)}), \tag{3.1}$$

где u — фиксированная точка.

Отметим, что и в формуле (3.1) мы не требуем точного равенства для какого-то класса функций (например для полиномов определенной степени).

Очевидно, что

$$f(x) = x(u) = \int_{S_n} x(s)\, d\Theta_u(s),$$

где

$$\Theta_u(s) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{если } s_1 < u_1, \ldots, s_n < u_n, \\ 0, & \text{если } s_k \geqslant u_k \text{ при любом } k = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

а $x(s^{(i)})$ в формуле (3.1) определяются по формулам (2.5) и (2.6).

Приближаем опять формулой вида (2.8), где теперь

$$C^*_{(i)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{(s_1^{i_1} - s_1^{i_1-1}) \ldots (s_n^{i_n} - s_n^{i_n-1})}} \int_{s_1^{i_1-1}}^{s_1^{i_1}} \ldots \int_{s_n^{i_n-1}}^{s_n^{i_n}} \Theta_u(s)\, ds.$$

Предположим, что $s_1^{k_1-1} \leqslant u_1 \leqslant s_1^{k_1}, \ldots, s_n^{k_n-1} \leqslant u_n \leqslant s_n^{k_n}$.

Тогда легко проверить, что

$$\int_{s_1^{i_1-1}}^{s_1^{i_1}} \ldots \int_{s_n^{i_n-1}}^{s_n^{i_n}} \Theta_u(s)\, ds = \begin{cases} (-1)^n (s_1^{i_1} - s_1^{i_1-1}) \ldots (s_n^{i_n} - s_n^{i_n-1}), \\ \qquad \text{если } i_1 < k_1, \ldots, i_n < k_n, \\ (-1)^n (s_1^{i_1} - s_1^{i_1-1}) \ldots (s_{l-1}^{i_{l-1}} - s_{l-1}^{i_{l-1}-1})(u_l - \\ - s_l^{i_l-1})(s_{l+1}^{i_{l+1}} - s_{l+1}^{i_{l+1}-1}) \ldots (s_n^{i_n} - s_n^{i_n-1}), \\ \qquad \text{если } i_1 < k_1, \ldots, i_{l-1} < k_{l-1},\ i_l = k_l, \\ \qquad\qquad i_{l+1} < k_{(l+1)}, \ldots, i_n < k_n, \\ 0, \qquad \text{если } i_m > k_m \text{ при любом } m = 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Следовательно, $C^*_{(i)} = \sqrt{(s_1^{i_1} - s_1^{i_1-1}) \ldots (s_n^{i_n} - s_n^{i_n-1})}$, если $i_1 < k_1, \ldots, i_n < k_n$, и $C^*_{(i)} = 0$, если $i_m > k_m$ $(m = 1, \ldots, n)$. Из формулы (2.10) видно, что $C_{(i)} = 0$, когда $(i) < (k) - (1)$ или $(i) > (k)$. В формуле (3.1) остаются только коэффиценты $C_{k_1-1, \ldots, k_n-1}, \ldots, C_{k_1, \ldots, k_n}$. Для примера вычислим одну из них, например, $C_{k_1-1, \ldots, k_n-1}$. Используя формулу (3.2), имеем

$$C_{k_1-1, \ldots, k_n-1} = \sum_{(0) \leqslant (l) \leqslant (1)} \frac{C^*_{(k)-(1)+(l)} (-1)^{l_1 + \cdots + l_n}}{\sqrt{(s_1^{k_1-1+l_1} - s_1^{k_1-2+l_1}) \ldots (s_n^{k_n-1+l_n} - s_n^{k_n-2+l_n})}} =$$

$$= \sum_{(0)\leqslant(l)\leqslant(1)} \frac{(s_1^{k_1-1}-s_1^{k_1-2})^{1-l_1}(u_1-s_1^{k_1-1})^{l_1}\dots(s_n^{k_n-1}-s_n^{k_n-2})^{1-l_n}(u_n-s_n^{k_n-1})^{l_n}}{(s_1^{k_1-1+l_1}-s_1^{k_1-2+l_1})\dots(s_n^{k_n-1+l_n}-s_n^{k_n-2+l_n})}\times$$

$$\times(-1)^{l_1+\dots+l_n}=$$

$$=\left[\frac{s_1^{k_1-1}-s_1^{k_1-2}}{s_1^{k_1-1}-s_1^{k_1-2}}-\frac{u_1-s_1^{k_1-1}}{s_1^{k_1}-s_1^{k_1-1}}\right]\sum_{l_2=0}^{1}\dots\sum_{l_n=0}^{1}(-1)^{l_2+\dots+l_n}\times$$

$$\times\frac{(s_2^{k_2-1}-s_2^{k_2-2})^{1-l_2}(u_2-s_2^{k_2-1})^{l_2}\dots(s_n^{k_n-1}-s_n^{k_n-2})^{1-l_n}(u_n-s_n^{k_n-1})^{l_n}}{(s_2^{k_2-1+l_2}-s_2^{k_2-2+l_2})\dots(s_n^{k_n-1+l_n}-s_n^{k_n-2+l_n})}=$$

$$=\frac{(s_1^{k_1}-u_1)\dots(s_n^{k_n}-u_n)}{(s_1^{k_1}-s_1^{k_1-1})\dots(s_n^{k_n}-s_n^{k_n-1})}.$$

Аналогично можно вычислить и остальные коэффициенты. В результате мы получим следующую формулу интерполяции:

$$x(u_1,\dots,u_n)\approx\frac{1}{(s_1^{k_1}-s_1^{k_1-1})\dots(s_n^{k_n}-s_n^{k_n-1})}\times$$

$$\times\sum_{(0)\leqslant(l)\leqslant(1)}(s_1^{k_1}-u_1)^{1-l_1}\dots(s_n^{k_n}-u_n)^{1-l_n}(u_1-s_1^{k_1-1})^{l_1}\dots(u_n-$$

$$-s_n^{k_n-1})^{l_n}x(s_1^{k_1+l_1-1},\dots,s_n^{k_n+l_n-1}). \tag{3.3}$$

4. Разложение линейного функционала в ряд Фурье-Эрмита

Используя конечный отрезок разложения, можно построить различные формулы приближения. Сперва мы перенесем некоторые общеизвестные факты на случай функции n переменных.

Теорема: *Пусть $F(x)$ — суммируемый по Винеру функционал, определенный на пространстве C_n. Пусть $x_0(s)\in C_n$ и пусть $\frac{d}{ds}\,x_0(s)=$ $=\frac{\partial^n}{\partial s_1\dots\partial s_n}x_0(s_1,\dots,s_n)\in L_2[S_n]$. Тогда при замене переменных*

$$y(s)=x(s)+x_0(s)$$

интеграл Винера преобразуется по формуле

$$\int_{C_n}F(y)\,d_Wy=e^{-\frac{1}{2}\int_{S_n}\left[\frac{d}{ds}x_0(s)\right]^2ds}\int_{C_n}F(x+x_0)\,e^{-\int_{S_n}\left[\frac{d}{ds}x_0(s)\right]dx(s)}\,d_Wx. \tag{4.1}$$

Доказательство повторяет рассуждения в случае одной переменной [8], поэтому мы его пропустим.

Рассмотрим специальные функционалы

$$\int_{S_n}\varphi_k(s)\,dx(s), \tag{4.2}$$

где $\{\varphi_{(k)}(s)\}$ является ортонормированной системой в пространстве $L_2[S_n]$. Из формулы (1.8) видно, что

$$\int_{C_n}\Big[\int_{S_n}\varphi_k(s)\,dx(s)\Big]^2 d_W x = 1.$$

Можно доказать, что тогда и остальные моменты функционалов (4.2) совпадают с моментами гауссовского распределения, т. е. случайные величины (4.2) распределены по-гауссовски и имеют независимые распределения (что тоже можно доказать). Итак,

$$\int_{C_n} F\Big(\int_{S_n}\varphi_1(s)\,dx(s),\ldots,\int_{S_n}\varphi_m(x)\,dx(s)\Big)\,d_W x =$$

$$=(2\pi)^{-\frac{m}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}F(u_1,\ldots,u_m)\,e^{-\frac{u_1^2}{2}-\cdots-\frac{u_m^2}{2}}\,du_1\ldots du_m. \tag{4.3}$$

Отметим, что если $\{a_j(u)\}$ является полной ортонормированной системой в $L_2[0,1]$, то система

$$\{a_{k_1}(s_1)\ldots a_{k_n}(s_n)\} \tag{4.4}$$

является полной ортонормированной системой в $L_2[S_n]$.

Пусть $H_m(u)$ — частично нормированные полиномы Эрмита, определяемые формулой

$$H_m(u) = (-1)^m (m!)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{u^2}{2}}\frac{d^m}{du^m}\Big(e^{-\frac{u^2}{2}}\Big)\qquad m=0,1,\ldots.$$

Тогда система $\{(2\pi)^{-\frac{1}{4}}H_m(u)e^{-\frac{u^2}{4}}\}$ является замкнутой ортонормированной системой в $L_2[-\infty,+\infty]$.

Положим

$$\psi_{m_{(1)},\ldots,m_{(p)}}(x)=\prod_{(1)\leqslant(k)\leqslant(p)}H_{m_{(k)}}\Big[\int_{S_n}a_{k_1}(s_1)\ldots a_{k_n}(s_n)\,dx(s)\Big] \tag{4.5}$$

$$p_i=1,2,\ldots;\qquad m_{(k)}=0,1,\ldots.$$

Используя формулу (4.3), легко увидеть, что система функционалов (4.5) ортонормирована в пространстве $L_2[C_n]$. Можно доказать (ср. [10]), что (4.5) является и замкнутой системой, т. е. если $F(x)\in L_2[C_n]$, то

$$\lim_{(p)\to\infty}\int_{C_n}\Big|F(x)-\sum_{(0)\leqslant m_{(1)},\ldots,m_{(p)}\leqslant(p)}A_{m_{(1)},\ldots,m_{(p)}}\psi_{m_{(1)},\ldots,m_{(p)}}(x)\Big|^2 d_W x = 0,$$

где

$$A_{m_{(1)},\ldots,m_{(p)}}=\int_{C_n}F(x)\psi_{m_{(1)},\ldots,m_{(p)}}(x)\,d_W x.$$

Исходя из вышеизложенных фактов, установим следующую теорему

Теорема: *Пусть* $\{\alpha_{k_1}(s_1)\ldots\alpha_{k_n}(s_n)\}$ — *замкнутая ортонормированная система в пространстве* $L_2[S_n]$. *Обозначим*

$$\beta_{(k)}(t)=\int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_n}\alpha_{k_1}(s_1)\ldots\alpha_{k_n}(s_n)ds.$$

Пусть $F(x)$ — *линейный функционал. Тогда его разложение по системе* (4.5) *(разложение Фурье-Эрмита) содержит только члены первой степени. Именно*

$$F(x)=\sum_{(k)=(1)}^{\infty}F(\beta_k)\int_{S_n}\alpha_{k_1}(s_1)\ldots\alpha_{k_n}(s_n)dx(s). \tag{4.6}$$

Доказательство можно провести методом, изложенным [11].

Итак, любая система (4.4) определяет свое сходящее в среднеквадратном смысле разложение (4.6) линейного функционала. В качестве системы (4.4) можно использовать тригонометрическую систему или систему полиномов и т. д.

Изучим при помощи (4.6) сходимость формулы (2.8).

Из (4.6) следует, что система функционалов

$$\int_{S_n}x(s)d[\alpha_{k_1}(s_1)\ldots\alpha_{k_n}(s_n)] \tag{4.7}$$

образует в пространстве линейных функционалов всюду плотную сеть, причем весовую функцию можно считать непрерывной.

Докажем сходимость (2.8) к функционале (4.7) при условии непрерывности (4.4). Для этого проверим выполнение условия Парсеваля. Используя формулу (2.9), теорему о среднем (непрерывность!) и формулу (1.7), имеем

$$\lim_{(m)\to\infty}\sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)}(C^*_{(i)})^2=\lim_{(m)\to\infty}\sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)}\frac{1}{(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\ldots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})}\times$$

$$\times\Big[\int_{s_1^{i_1-1}}^{s_1^{i_1}}\ldots\int_{s_n^{i_n-1}}^{s_n^{i_n}}\sigma(s)ds\Big]^2=\lim_{(m)\to\infty}\sum_{(1)\leqslant(i)\leqslant(m)}\sigma^2(\tau_{(i)})(s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1})\ldots(s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1})=$$

$$=\int_{S_n}\sigma^2(s)ds=\|f\|^2$$

при условии, что

$$\max|s_1^{i_1}-s_1^{i_1-1}|\to 0,\ldots,\max|s_n^{i_n}-s_n^{i_n-1}|\to 0. \tag{4.8}$$

Итак, при условии (4.8) сходимость формулы (2.8), а также формул (2.15) и (3.3), установлена.

Замечание 1. Если в формуле (4.6) принять $F(x)=\int_{S_n}x(s)ds$, а в качестве системы (4.4) использовать систему Хаара, то соответствующий отрезок разложения (4.6) совпадает с формулой (2.12) при узлах $s_1^{i_1}=\frac{i_1}{2^{m_1}},\ldots,s_n^{i_n}=\frac{i_n}{2^{m_n}}$ $\quad(i_k=1,\ldots,2^{m_k})$.

Замечание 2 Интересно отметить [12], что формула (2.15) является наилучшей и в обычной смысле для класса функций, удовлетворяющих на S_n, кроме (1.1), еще условиям, что

$\frac{\partial^m}{\partial s_{k_1}\ldots\partial s_{k_m}} x(s_1,\ldots,s_n)$ ограничены (при $m=1,\ldots,n$), интегрируемы и

$$\int\limits_{S_n}\left[\frac{\partial^n}{\partial s_1\ldots\partial s_n}x(s)\right]^2 ds\leqslant M^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Wiener N. Differential space. Journ. Math. and Phys., No. 2, 1923, p. 131—174.
2. Гельфанд И. М., Яглом А. М. Интегрирование в функциональных пространствах..., УМН, XI, вып. 1 (67), 1956, стр. 77—114.
3. Ковальчик И. М. Интеграл Винера, УМН, XVIII, вып. 1(109), 1963, стр. 97—134
4. Сульдин А. В. Мера Винера и ее приложения к приближенным методам. Изв. вузов 6(13) 1959, стр. 145—158, Мера Винера... Изв. вузов 5(18) 1960, стр. 165—179.
5. Yeh J. Wiener measure in a space of functions of two variables, Trans. Am. Math. Soc., vol. 95, No. 3, 1960, p. 433—450.
6. Шилов Г. Е. Интегрирование в бесконечномерных пространствах и интеграл Винера, УМН, XVIII, вып. 2(110), 1963, стр. 99—120.
7. Винер Н. Нелинейные задачи в теории случайных процессов. М., ИЛ, 1961.
8. Sunouchi G. Harmonic analysis and Wiener integrals. Tôhoku Math. Journ., vol. 3, No. 2, 1951, p. 187—196.
9. Paley R. E. A. C., Wiener N., Zygmund A. Notes on random functions. Math. Zeitschr., No. 37, 1933, S. 647—668.
10. Cameron R. H., Martin W. T. The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. Ann. Math., vol. 48, No. 2, 1947, p. 385—392.
11. Cameron R. H., Graves Ross E. Additive functionals on a space of continuous functions I. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 70, No. 1, 1951, p. 160—176.
12. Левин М. Экстремальная задача для одного класса функций. Изв. АН Эст. ССР. Сер. физ.-матем. и техн. наук, № 2, 1963.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
25. IX 1963

LINEAARSETE FUNKTSIONAALIDE RUUTKESKMISEST LÄHENDAMISEST

T. Tobias

Resümee

Artiklis vaadeldakse Wieneri mõõtu pidevate n-muutuja funktsioonide ruumis ning lineaarsete funktsionaalide ruutkeskmist lähendamist.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia
Küberneetika Instituut

Saabus toimetusse
25. IX 1963

APPROXIMATION IN THE MEAN OF LINEAR FUNCTIONALS

T. Tobias

Summary

In this paper we consider Wiener measure in the space of continuous functions of n variables and the approximation in the mean of linear functionals.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,
Institute of Cybernetics

Received
Sept. 25th, 1963