

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ПЛОСКОЙ СТРУИ, РАЗВИВАЮЩЕЙСЯ В СПУТНОМ ПОТОКЕ

Э. ТИММА

Несмотря на многочисленные экспериментальные и аналитические работы по турбулентным струям, некоторые задачи, особенно для развития струй в движущейся среде, до сих пор не разрешены. Как показано в работах [1, 2], имеются существенные расхождения между аналитическими решениями задачи о развитии струи в спутном потоке. Главной причиной этих расхождений является отсутствие в настоящее время общей физически строго обоснованной теории, которая помогла бы аналитическим путем решить проблему свободной турбулентности. Даже при решении задач о турбулентных струях пользуются упрощенными предложениями, полностью не соответствующими действительности. Так, например, используются гипотезы о постоянстве коэффициента турбулентного обмена и длины пути турбулентного перемешивания по всему сечению струи, которые, как выяснилось при экспериментальном изучении Корсиным [3], Липманом и Лауфером [4], Кобашем [5] и др., не соответствуют действительности. Однако, несмотря на это, указанные гипотезы находят широкое применение в теории турбулентных струй, т. к. полученные решения более или менее согласуются с экспериментом.

Из аналитических работ, основанных на предположении о постоянстве коэффициента турбулентного обмена и пути смешения в поперечном сечении струи, можно отметить работы Трубчикова [10], Абрамовича [7, 8, 9, 6], Бородачева [11], Толмина [12], Кьюза [13], Гертлера [14], Сквайра и Троунсера [15], Бай [16] и др.

В настоящее время существуют физические строго обоснованные дифференциальные уравнения в частных производных для определения характеристик ламинарного течения. Это уравнения движения Навье-Стокса, неразрывности, энергии, а в случае движения сжимаемой жидкости, и уравнение состояния. Существующие уравнения для турбулентного течения являются приближенными. Это объясняется сложностью структуры и неясностью сущности турбулентности. Так как вследствие сложности пульсационного движения чисто теоретический расчет турбулентного потока в настоящее время еще невозможен, то будем искать закономерности лишь для осредненных по времени величин, характеризующих турбулентный поток жидкости. При помощи некоторых весьма вероятных полуэмпирических допущений можно вычислить осредненные характеристики турбулентного потока жидкости, которые соответствуют опыту. Из важнейших полуэмпирических теорий, которые дают возможность вычислить значения осредненных характеристик турбулентных струй, являются теория турбулентного перемешивания Прандтля, теория переноса вихрей Тэйлора, индуктивная теория турбулентности Рейхардта и др.

**1. Установление метода решения задач, связанных с развитием турбулентной струи в движущейся среде.** Даже в случае ламинарного течения жидкости аналитическое решение системы дифференциальных урав-

нений в частных производных, описывающих течение жидкости в пограничном слое, возможно найти лишь для отдельных частных случаев. Поэтому очень часто для решения проблемы пограничного слоя используется более простой метод, который состоит в решении интегральных уравнений количества движения, массы, энергии и диффузии с заданным профилем скорости. Профиль скорости в случае движения жидкости в трубе определяется при помощи полиномметода. На основании этого составим метод для решения проблемы свободной турбулентности, сущность которого заключается в следующем:

1. При решении проблемы свободной турбулентности используются интегральные уравнения количества движения, массы, энергии и диффузии, которые можно вывести при помощи интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений или составления баланса для наиболее подходящего элемента жидкости в каждом конкретном случае.

2. На основании экспериментальных данных делается допущение, по которому профили скорости, температуры и концентрации в поперечных сечениях пограничного слоя как осесимметричной, так и плоскопараллельной турбулентной струи подобны.

Под подобием понимаем возможность выразить соответствующие профили одной и той же зависимостью во всех поперечных сечениях

$$\begin{aligned}\frac{u - u_n}{u_m - u_n} &= f(\eta) \\ \frac{T - T_n}{T_m - T_n} &= g(\eta) \\ \frac{\kappa - \kappa_n}{\kappa_m - \kappa_n} &= h(\eta),\end{aligned}\quad (1)$$

где  $u$ ,  $u_n$ ,  $u_m$  — скорость в произвольной точке струи, в потоке и на оси струи;

$T$ ,  $T_n$ ,  $T_m$  — абсолютная температура в произвольной точке струи, в потоке и на оси струи;

$\kappa$ ,  $\kappa_n$ ,  $\kappa_m$  — концентрация в произвольной точке струи, в потоке и на оси струи;

$f$ ,  $g$ ,  $h$  — универсальные функции безразмерной избыточной скорости, безразмерной избыточной температуры и безразмерной избыточной концентрации.

Можно отметить, что в некоторых случаях виды этих универсальных функций в начальном и в основном участках струи различны.

В начальном участке безразмерная ордината

$$\eta = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}, \quad (2)$$

а в переходном и основном участках

$$\eta = \frac{y}{\delta}, \quad (3)$$

где  $y$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  — ординаты произвольной точки, внутренней и внешней границы зоны смешения;

$\delta$  — полуширина струи в переходном и в основном участках струи.

3. Виды универсальных функций  $f$ ,  $g$ ,  $h$  можно определить на основании экспериментальных данных или при помощи полиномиального метода, показанного в работе [17].

4. Используются соотношения между осредненными и пульсационными величинами, которые можно получить из соответствующих полупырических теорий свободной турбулентности. Так, например, соотношения для определения турбулентных касательных напряжений, представленных в работах [18, 19].

5. Для решения струевых задач используется схема турбулентной струи, состоящей из трех участков, которая позволяет применить для каждого участка дополнительные условия, облегчающие решение, особенно для струи во встречном потоке. По этой схеме, рассматриваемая турбулентная струя состоит из следующих трех характерных участков:

1) начальный участок, на котором имеется потенциальное ядро течения;

2) основной участок, на котором струя приобретает структуру, дающую возможность считать ее развивающейся из точки или из источника бесконечно малого размера;

3) переходный участок, заключенный между начальным и основным, на котором заканчивается перестройка структуры струи. Для случая турбулентной струи, развивающейся в спутном потоке, схема показана на рис. 1.

Описанный метод позволяет решать проблемы свободной турбулентности, используя только одну экспериментальную константу  $c$ , которая зависит от степени турбулентности  $k$ .

$$k = \frac{\sqrt{\overline{\varphi'^2}}}{\overline{\varphi}}, \quad (4)$$

где  $\overline{\varphi}$ ,  $\sqrt{\overline{\varphi'^2}}$  — значения, соответственно осредненной характеристики струи и ее среднеквадратичной пульсации.

Следует отметить, что методы решения задач о турбулентных струях при заданном скоростном профиле в сечениях струи успешно применены Абрамовичем, Бородачевым, а также Сквайром и Троунсером.

**2. Уравнения количества движения и массы.** Для того, чтобы вывести уравнение количества движения плоскопараллельной струи, рассмотрим контрольную поверхность 1—2—3—4—1, приведенную на рис. 1. Допустим, что отрезок контура 1—4 равен  $dx$ , а линейный размер контрольной поверхности в направлении, перпендикулярном к плоскости чертежа, — единице. Отрезки 1—2 и 3—4 проведены по нормальным к плоскости, на которой находится ось струи; в то же время эта плоскость параллельна плоскости сопла.

Будем считать, что по всей толщине струи режим движения ламинарный и неустановившийся, а жидкость несжимаема. На основании теоремы Эйлера об изменении количества движения, пренебрегая объемными силами, после простых преобразований получим

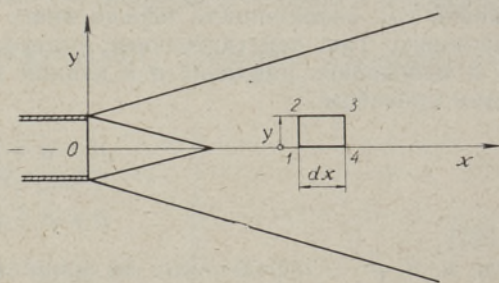


Рис. 1. Схема плоскопараллельной струи.

$$\int_0^y \rho \frac{\partial u}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho u^2 dy + \rho v u = \tau_n - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y p dy, \quad (5)$$

где

- $\rho$  — плотность жидкости;
- $u$  — проекция вектора скорости на ось  $x$  в произвольной точке;
- $v$  — проекция вектора скорости на ось  $y$  в произвольной точке;
- $\tau_n$  — касательное напряжение;
- $p$  — статическое давление.

Количество массы, которое проходит через рассматриваемую контрольную поверхность 1—2—3—4—1, постоянно, т. е. изменение массы

$$dm = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho u dy + \rho v = 0. \quad (6)$$

При турбулентном режиме уравнения (5) и (6) остаются справедливыми. Расчет турбулентного потока, как известно, производится по осредненным величинам. Поэтому в уравнения (5) и (6) необходимо ввести осредненные скорости и давление. Для описания турбулентного движения Рейнольдс [20] предложил рассматривать турбулентное движение как совокупность осредненного по времени движения и пульсационного. Так, действительные (актуальные) мгновенные скорости  $u$  и  $v$  и мгновенное давление  $p$  в данной точке можно определить следующим способом.

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} + u' \\ v &= \bar{v} + v' \\ p &= \bar{p} + p' \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{p}$  — осредненные во времени скорости и давление;  
 $u'$ ,  $v'$ ,  $p'$  — пульсационные скорости и давление.

Для квазистационарного турбулентного движения осредненные значения величин  $u$ ,  $v$ ,  $p$  являются только функциями координат. На основании правила осреднения Рейнольдса получим из соотношений (5) и (6) для описания квазистационарного турбулентного течения следующие уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho \bar{u}^2 dy + \rho \bar{v} \bar{u} = \bar{\tau}_n + \tau_\tau - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \bar{p} dy, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho \bar{u} dy + \rho \bar{v} = 0, \quad (9)$$

где

$$\tau_\tau = -\rho \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho \overline{(u')^2} dy. \quad (10)$$

В дальнейшем для простоты мы не будем писать знаков осреднения.

Изложенный выше метод позволяет решать задачи о развитии плоскопараллельной и круглой струи в движущейся среде и как частный случай в неподвижном пространстве. Покажем использование этого метода на примере решения задачи о развитии плоской струи в спутном потоке.

### Плоскопараллельная струя, развивающаяся в спутном потоке

Для того, чтобы аналитически решить поставленную задачу при помощи вышеописанного метода, надо знать связь между осредненными и пульсационными величинами турбулентного течения.

По новой теории свободной турбулентности Прайдтля, нужная связь дает следующее соотношение для описания турбулентного касательного напряжения.

$$\tau_{\tau} = \alpha \rho \delta (u_m - u_n) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (11)$$

где  $\alpha$  — экспериментальная постоянная;

$\delta$  — толщина пограничного слоя струи в начальном участке струи и полуширина струи в основном участке.

На основании формул (8), (9), (11) составим следующую систему уравнений, предполагая, что статическое давление  $p = \text{const}$  и жидкость несжимаема.

Касательным напряжением ламинарного движения пренебрегаем вследствие малости его.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho u^2 dy + \rho v u &= \tau_{\tau} \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho u dy + \rho v &= 0 \\ \tau_{\tau} &= \alpha \rho \delta (u_m - u_n) \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

По схеме струи определяется (см. рис. 2) внешняя граница как геометрическое место ближайших к оси точек, в которых скорость равна скорости потока  $u_n$ , и внутренняя граница как геометрическое место наиболее удаленных от оси точек, в которых скорость равна максимальной скорости струи  $u_{0m}$ . Очевидно, что на внешней границе струи турбулентные касательные напряжения равны нулю.

Решая в начальном участке струи систему (12) и используя формулу (1), в соответствии с методом Сквайра и Троунсера [15] сначала на границе струи, а потом на поверхности, в которой безразмерная скорость равна 0,5, получим нужные соотношения для определения границы струи и скоростного поля.

1) Начальный участок струи. В случае изотермического процесса истечения на основании системы уравнений (12) получим для начального участка турбулентной плоскопараллельной струи следующую систему уравнений:

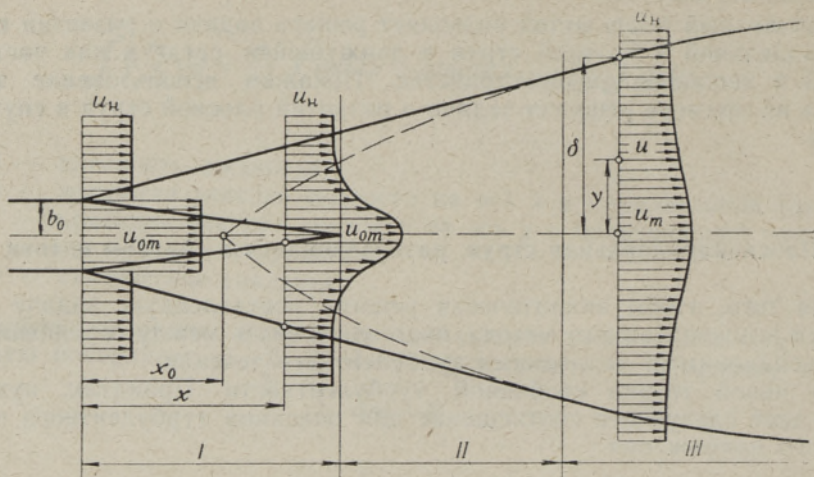


Рис. 2. Схема струи.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho u^2 dy - u \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho u dy &= \tau_\tau \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho u dy + \rho v &= 0 \\ \tau_\tau &= \alpha \rho (y_2 - y_1) (u_{0m} - u_n) \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Решаем эту систему уравнений сначала на границе струи несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ), а потом на поверхности, в точках которой безразмерная скорость  $\frac{u - u_n}{u_{0m} - u_n}$  равна 0,5, используя формулу (1), которая для начального участка выражается

$$\frac{u - u_n}{u_{0m} - u_n} = F(\eta), \quad (13a)$$

$$\eta = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}.$$

а) На границе струи  $u - u_n$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  и, следовательно,  $\tau_\tau = 0$ .

На основании этих условий из первого уравнения системы (13) получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_2} \rho u^2 dy - u_n \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_2} \rho u dy = 0$$

или короче

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_2} \rho u (u - u_n) dy = 0$$

и после интегрирования:

$$\int_0^{y_2} \rho u (u - u_n) dy = \text{const} = \int_0^{b_0} \rho u_0 (u - u_n)_0 dy_0 \dots \quad (14)$$

Считая, что в потенциальном ядре  $u = u_{0m}$  в результате замены переменной  $y$  на  $\eta$  и преобразований получим

$$y_1 + k_1 (y_2 - y_1) = k_0 b_0, \quad (15)$$

где

$$k_1 = \int_0^1 F^2 d\eta + \mu \left( \int_0^1 F d\eta - \int_0^1 F^2 d\eta \right) \quad (16)$$

и

$$k_0 = \int_0^1 \left( \frac{u}{u_{0m}} \right)_0 \frac{\left( \frac{u}{u_{0m}} \right)_0 - \mu}{1 - \mu} d \left( \frac{y}{b_0} \right)_0 \quad (17)$$

Индекс 0 у величин  $\left( \frac{u}{u_{0m}} \right)_0$  и  $\left( \frac{y}{b_0} \right)_0$  означает, что они изменяются только в пределах начального сечения струи.

б) В точке поверхности половинной безразмерной скорости

$$\frac{u - u_n}{u_{0m} - u_n} = 0,5 \quad \text{и} \quad \tau_r = -\alpha \rho (u_{0m} - u_n)^2 \left( \frac{dF}{d\eta} \right)_{0,5},$$

где  $\left( \frac{dF}{d\eta} \right)_{0,5}$  — значение функции в точке, на которой  $\eta = \eta_{0,5}$ , а

$$\eta_{0,5} = \frac{y_2 - y_{0,5}}{y_2 - y_1}. \quad (18)$$

Принимая во внимание вышесказанное, мы можем преобразовать первое уравнение системы (13) в следующий вид

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{2} y_1 + k_2 (y_2 - y_1) \right] = -k_3, \quad (19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} k_2 &= \int_{\eta_{0,5}}^1 \left[ \left( F^2 - \frac{1}{2} F \right) + \mu \left( -F^2 + \frac{3}{2} F - \frac{1}{2} \right) \right] d\eta \\ k_3 &= \alpha (1 - \mu) \left( \frac{dF}{d\eta} \right)_{0,5}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

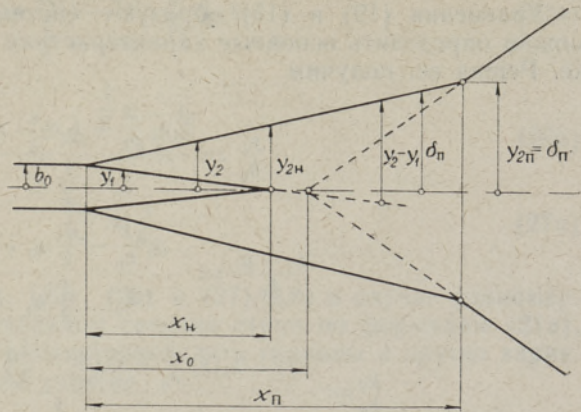


Рис. 3. Вспомогательный график обозначений схемы струи.

Уравнения (19) и (15) образуют систему, на основании которой можно определить основные характеристики струи на начальном участке. Решая ее, получим

$$\frac{y_1}{b_0} = \frac{k_1 k_3 \frac{x}{b_0} + k_0 k_2 - k_1 C}{k_2 - \frac{1}{2} k_1} \quad (21)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{b_0} = \frac{-k_3 \frac{x}{b_0} - \frac{1}{2} k_0 + C}{k_2 - \frac{1}{2} k_1} \quad (22)$$

$$\frac{y_2}{b_0} = \frac{-(1 - k_1) k_3 \frac{x}{b_0} + k_0 \left( k_2 - \frac{1}{2} \right) + (1 - k_1) C}{k_2 - \frac{1}{2} k_1}, \quad (23)$$

где константа интегрирования  $C$  определяется из условия, что при

$$x = 0 \quad \frac{y_2}{b_0} = 1, \quad (24)$$

т. е. скоростное поле потока в начальном сечении струи равномерное.

Тогда на основании формулы (23)

$$C = \frac{k_2 - \frac{1}{2} k_1 - k_0 \left( k_2 - \frac{1}{2} \right)}{1 - k_1}. \quad (25)$$

Из формул (21), (22) и (23) видно, что границы струи  $y_1$  и  $y_2$  и ширина зоны перемешивания  $y_2 - y_1$  в начальном сечении плоскопараллельной турбулентной струи, развивающейся в спутном потоке, являются прямыми.

На основании формул (21) и (22) для определения длины начального участка  $x_n$  и ширины переходного сечения струи  $y_{2n}$  получим следующие соотношения

$$\frac{x_n}{b_0} = \frac{(k_0 - k_1) \left( \frac{1}{2} k_1 - k_2 \right)}{k_1 k_3 (1 - k_1)} \quad (26)$$

$$\frac{y_{2n}}{b_0} = \frac{k_0}{k_1}. \quad (27)$$

В случае равномерного скоростного поля в начальном сечении струи, т. е.

$$\left( \frac{u}{u_{0m}} \right)_0 = 1 \quad \text{и} \quad k_0 = 1 \quad (28)$$

формулы (21), (22), (23), (26) и (27) упрощаются, и их можно представить в виде

$$\frac{y_1}{b_0} = \frac{k_1 k_3}{k_2 - \frac{1}{2} k_1} \cdot \frac{x}{b_0} + 1 \quad (21a)$$

$$\frac{y_2 - y_1}{b_0} = \frac{k_3}{\frac{1}{2} k_1 - k_2} \cdot \frac{x}{b_0} \quad (22a)$$



$$\frac{y_2}{b_0} = \frac{k_3(1-k_1)}{2} \cdot \frac{x}{b_0} + 1 \quad (23a)$$

$$\frac{x_n}{b_0} = \frac{1}{2} \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_3} \quad (26a)$$

$$\frac{y_{2n}}{b_0} = \frac{1}{k_1} \quad (27a)$$

По формулам (21), (22), (23), (26) и (27) или в случае равномерного скоростного поля в начальном сечении струи по формулам (21a), (22a), (23a), (26a) и (27a) можно определить границы и другие характеристики струи в начальном участке.

Составляющая скорость  $v$  определяется из второго уравнения системы (12).

2. Основной участок струи. В случае изотермического процесса истечения на основании системы уравнений (12) получим для основного участка турбулентной плоскопараллельной струи, развивающейся в спутном потоке, следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho u^2 dy - u \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho u dy &= \tau_\tau \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_0^y \rho u dy + \rho v &= 0 \\ \tau_\tau &= \alpha \rho (u_m - u_n) \delta \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Решаем эту систему уравнений вначале на границе струи несжимаемой жидкости ( $\rho = \text{const}$ ), а после этого на поверхности, в точках которой безразмерная скорость  $\frac{u}{u_{0m}}$  равна 0,5, используя формулу (1).

а) На границе струи  $u = u_n$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$  и, следовательно,  $\tau_\tau = 0$ .

• На основании этих условий первого уравнения системы (29) будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \rho u (u - u_n) dy = 0$$

и после интегрирования

$$\int_0^\delta \rho u (u - u_n) dy = \text{const} = \int_0^{b_0} \rho u_0 (u_0 - u_n) dy_0 \quad (30)$$

Так как  $\eta = \frac{y}{\delta}$  и  $d\eta = \frac{dy}{\delta}$  получим после замены переменной  $y$  на  $\eta$  и преобразований:

$$\frac{\delta}{b_0} [k_5 z^2 + k_4 z] = k_0, \quad (31)$$

где

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{u_m - u_n}{u_{0m} - u_n} \\ k_0 &= \int_0^1 \left(\frac{u}{u_{0m}}\right)_0 \frac{\left(\frac{u}{u_{0m}}\right)_0 - \mu}{1 - \mu} d\left(\frac{y}{b_0}\right)_0 \\ k_4 &= \mu \int_0^1 f d\eta \\ k_5 &= (1 - \mu) \int_0^1 f^2 d\eta. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

б) В точках поверхности половинной безразмерной скорости

$$\left. \begin{aligned} \frac{u_{0,5} - u_n}{u_m - u_n} &= 0,5 \\ \tau_r &= \alpha_0 (u_m - u_n)^2 \left(\frac{df}{d\eta}\right)_{0,5}, \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где  $\left(\frac{df}{d\eta}\right)_{0,5}$  — значение функции в точке, на которой  $\eta = \eta_{0,5}$  и  $y_{0,5}$  — ордината точки, где безразмерная скорость  $\frac{u - u_n}{u_m - u_n}$  равна 0,5.

Принимая во внимание выше сказанное, мы можем преобразовать первое уравнение системы (29) к следующему виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_{0,5}} u^2 dy - \frac{u_m + u_n}{2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{y_{0,5}} u dy = \alpha (u_m - u_n)^2 \left(\frac{df}{d\eta}\right)_{0,5}. \quad (34)$$

После замены переменной  $y$  на  $\eta$  и преобразований имеем

$$\frac{d}{dx} \delta (\alpha_3 z^2 + \alpha_4 z) - z \frac{d}{dx} \delta (\alpha_5 z + \alpha_6) = \alpha \alpha_2 z^2, \quad (35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_2 &= \left(\frac{df}{d\eta}\right)_{0,5} \\ \alpha_3 &= \int_0^{\eta_{0,5}} f^2 d\eta \\ \alpha_4 &= \frac{\mu}{1 - \mu} \int_0^{\eta_{0,5}} f d\eta \\ \alpha_5 &= \frac{1}{2} \int_0^{\eta_{0,5}} f d\eta \\ \alpha_6 &= \frac{1}{2} \frac{\mu}{1 - \mu} \eta_{0,5}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

На основании (31) получим из уравнения (35)

$$\frac{d}{d \frac{x}{b_0}} \frac{\alpha_3 z + \alpha_4}{k_5 z + k_4} = z \frac{d}{d \frac{x}{b_0}} \frac{\alpha_5 z + \alpha_6}{k_5 z^2 + k_4 z} = \frac{\alpha \alpha_2}{k_0} z^2. \quad (37)$$

После дифференцирования и преобразований будем иметь

$$\frac{(2\alpha_3 - \alpha_5) k_4 k_5 - (2\alpha_4 - \alpha_6) k_5^2}{k_4^3} \ln \frac{z + \frac{k_4}{k_5}}{z} + \frac{(\alpha_5 - \alpha_3) k_4 + (\alpha_4 - \alpha_6) k_5}{k_4^2} \left(z + \frac{k_4}{k_5}\right)^{-1} - \\ - \frac{\alpha_3 k_4 - \alpha_4 k_5}{k_4^2 z} - \frac{\alpha_6}{2k_4 z^2} = \frac{\alpha \alpha_2}{k_0} \frac{x}{b_0} + C_1. \quad (38)$$

Константу интегрирования  $C_1$  можно определить из условия, при

$$\frac{x}{b_0} = \frac{x_n}{b_0} \quad z \approx 1. \quad (39)$$

Это условие говорит о том, что скорость на оси струи в переходном участке струи изменяется мало.

3. Переходный участок струи. Как показывают экспериментальные данные, различие между скоростными профилями в переходном и основном участках струи практически небольшое и для переходного можно использовать формулы в таком же виде, как и для основного участка.

Для определения скорости на оси на переходном участке струи можно использовать метод Абрамовича [7, 8, 9], по которому изотаксами в переходном участке струи будут продолжения изотакс в начальном участке. Тогда скорость на оси определяется соответственно по точкам пересечения изотакс с осью струи.

Следовательно, безразмерная скорость  $\frac{u_m - u_n}{u_{0m} - u_n}$  на оси переходного участка

$$\frac{u_m - u_n}{u_{0m} - u_n} = F(\eta_m), \quad (40)$$

где

$$\eta_m = \frac{y_2}{y_2 - y_1}. \quad (41)$$

На основании формул (22), (23) и (25) будем иметь из соотношения (41)

$$\eta_m = \frac{k_2(1 - k_1) \frac{x}{b_0} + \frac{1}{2} k_1 - k_2}{k_3 \frac{x}{b_0} + \frac{\left(\frac{1}{2} k_1 - k_2\right) (1 - k_0)}{1 - k_1}}. \quad (42)$$

При равномерном начальном распределении скорости ( $k_0 = 1$ ) из формулы (42) получим

$$\eta_m = \frac{\frac{1}{2} k_1 - k_2}{k_3 \frac{x}{b_0}} + 1 - k_1. \quad (42a)$$

Для определения длины переходного участка запишем на основании рис. 3, что

$$\frac{x_n}{x_n} = \frac{\frac{y_{2n}}{b_0} - 1}{\frac{y_{2n}}{b_0} - 1}, \quad (43)$$

где  $y_{2n} = \delta_n$  — значение ординаты граничной точки струи в конце переходного участка.

На основании формулы (30) можно записать, что

$$\frac{\delta_n}{b_0} = \frac{k_0}{k_5 z_n^2 + k_4 z_n}, \quad (44)$$

где  $z_n$  — значение безразмерной скорости точки на оси струи в конце переходного участка.

Используя формулы (27) и (44), можем преобразовать выражение (43) следующим образом

$$\frac{x_n}{x_n} = \frac{\frac{k_0}{k_5 z_n^2 + k_4 z_n} - 1}{\frac{k_0}{k_1} - 1}. \quad (45)$$

Если предположить, что скорость на оси струи в переходном участке изменяется мало ( $z_n \approx 1$ ), то из формулы (45) можно получить

$$\frac{x_n}{x_n} = \frac{\frac{k_0}{k_5 + k_4} - 1}{\frac{k_0}{k_1} - 1} \quad (46)$$

и при равномерном начальном распределении скорости ( $k_0 = 1$ )

$$\frac{x_n}{x_n} = \frac{\frac{1}{k_5 + k_4} - 1}{\frac{1}{k_1} - 1}. \quad (46a)$$

На основании формулы (26) из соотношения (46) получим

$$\frac{x_n}{b_0} = \frac{\frac{1}{k_4 + k_5} - 1}{\frac{k_0}{k_1} - 1} - \frac{(k_0 - k_1) \left( \frac{1}{2} k_1 - k_2 \right)}{k_1 k_3 (1 - k_1)} \quad (47)$$

и при равномерном начальном распределении скорости ( $k_0 = 1$ )

$$\frac{x_n}{b_0} = \frac{\left( \frac{1}{2} k_1 - k_2 \right) \left( \frac{1}{k_4 + k_5} - 1 \right)}{k_3 (1 - k_1)}. \quad (47a)$$

4. Сравнение экспериментальных данных с полученными расчетными формулами. Как показано в работе [17], в основном и переходном участках струи самой лучшей формулой, хорошо совпадающей с экспериментальными данными, является полином

$$f(\eta) = 1 - 6\eta^2 + 8\eta^3 - 3\eta^4. \quad (48)$$

На основании (48) получено

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -1,747 \\ \alpha_3 &= 0,2587 & \alpha_4 &= 0,3101 \frac{\mu}{1-\mu} \\ \alpha_5 &= 0,1551 & \alpha_6 &= 0,1929 \frac{\mu}{1-\mu} \\ k_4 &= 0,4\mu & k_5 &= 0,2857 (1-\mu). \end{aligned} \quad (49)$$

В начальном участке струи подходящим профилем скоростного поля, как показано в работе [17], будет формула Шлихтинга в виде

$$F(\eta) = 1 - (1 - \eta^{3/2})^2. \quad (50)$$

На основании этой формулы имеем

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 0,4156 + 0,1344\mu \\ k_2 &= 0,1573 + 0,0193\mu \\ k_3 &= 1,409\alpha(1-\mu). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Используя значения констант (49) и (51), можно определить вышевыведенными формулами значения осредненных характеристик струи, зная еще значения экспериментальной константы  $\alpha$ .

Для определения экспериментальной константы  $\alpha$  можно при помощи сравнения формул Абрамовича [7]

$$\frac{y_2 - y_1}{b_0} = \frac{cx}{b_0} \frac{1-\mu}{1+\mu} \quad (52)$$

и (22а) получить в случае равномерного начального распределения скорости, что

$$c = 27,9\alpha,$$

а при сравнении с другими экспериментальными данными, приведенными в той же работе, в начальном участке плоскопараллельной струи  $c = 0,27$  и в основном участке  $c = 0,22$ . Следовательно, в начальном участке плоскопараллельной струи

$$\alpha = \frac{0,27}{27,9} = 0,0097, \quad (53)$$

в основном участке струи

$$\alpha = \frac{0,22}{27,9} = 0,0079. \quad (54)$$

Используя в начальном участке плоскопараллельной струи профили распределения скорости в виде

$$\frac{u - u_n}{u_{0m} - u_n} = 1 - \dot{f}_k, \quad (55)$$

где  $\dot{f}_k$  — обозначение формул (48) и

$$\dot{f}_1 = (1 - \eta^{3/2})^2, \quad (56)$$

$$\dot{f}_2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \pi \left( \frac{y_2 - y_1}{y_2 - y_1} \right) \right], \quad (57)$$

$$\dot{f}_3 = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \quad (58)$$

получим для определения ширины зоны перемешивания следующие соотношения:

а) По формуле Сквайра-Троунсера (57) и полиному (58)

$$\frac{y_2 - y_1}{b_0} = c \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \frac{x}{b_0}. \quad (59)$$

б) По формуле Шлихтинга (49)

$$\frac{y_2 - y_1}{b_0} = c \frac{1 - \mu}{1 + 0,95 \mu} \frac{x}{b_0} \quad (60)$$

и по полиному (48)

$$\frac{y_2 - y_1}{b_0} = c \frac{1 - \mu}{1 + 0,90 \mu} \frac{x}{b_0}. \quad (61)$$

Аналогично предыдущему можно определить экспериментальную константу  $\alpha$ .

Для начального участка плоскопараллельной струи:

$\alpha = 0,0078$ , по формуле Сквайра-Троунсера (57);  $\alpha = 0,0084$ , по полиному (58);  $\alpha = 0,0097$ , по формулам Шлихтинга (49);  $\alpha = 0,0067$ , по полиному (48). Из сравнений формул (59), (60) и (61) видно, что разница между ними небольшая, но между значениями  $\alpha$ , полученными по разным профилям скоростей, заметная.

На рис. 4 показано изменение границы плоскопараллельной струи в зависимости от значений параметра  $\mu$  для равномерного скоростного поля в начальном сечении. Кривые получены по расчетным формулам (21а) и (22а), константы определены по формуле Шлихтинга (50) (сплошная линия) и по полиному (48) и формуле (55) (пунктирная линия). Как видно, ширина зоны перемешивания в начальном участке плоскопараллельной струи мала, но длина начального участка существенно зависит от вида заданного скоростного профиля.

На рис. 5 приведено сравнение экспериментальных данных Ю. В. Иванова и Х. Н. Суя [1, 21] и автора с формулой (31), значение констант определено из формулы (49). Экспериментальные данные удовлетворительно совпадают с расчетной кривой. При заданных значениях параметра  $\mu$  и безразмерной осевой скорости  $z$  можно определить безразмерные ординаты точки  $\frac{y_{0,5}}{b_0}$  и затем полуширину плоской струи по формуле

$$\frac{\delta}{b_0} = 2,6 \frac{y_{0,5}}{b_0}, \tag{62}$$

которая получена из формулы (48).

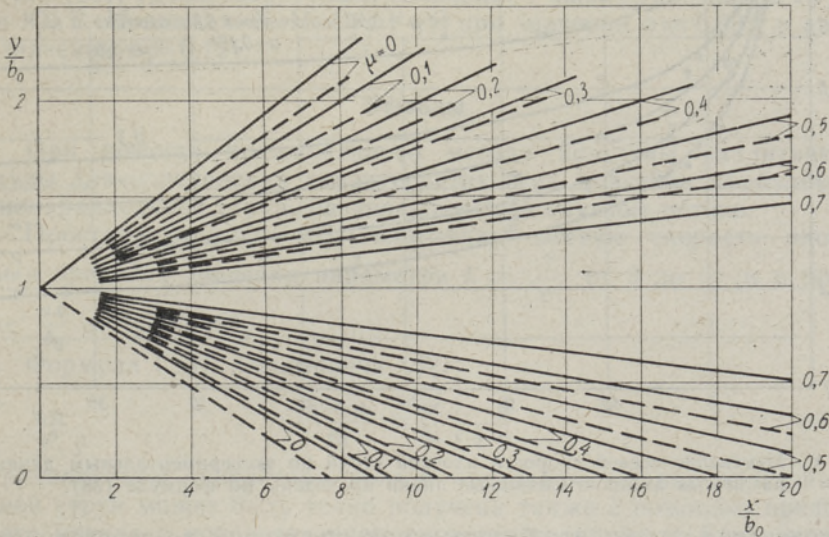


Рис 4. Изменение границы плоскопараллельной струи в зависимости от значений параметра  $\mu$ . Сплошные линии получены по формуле (21а) и (22а) (константы рассчитаны по формуле Шлихтинга (55)), а для пунктирных линий константы определены по полиному (48).

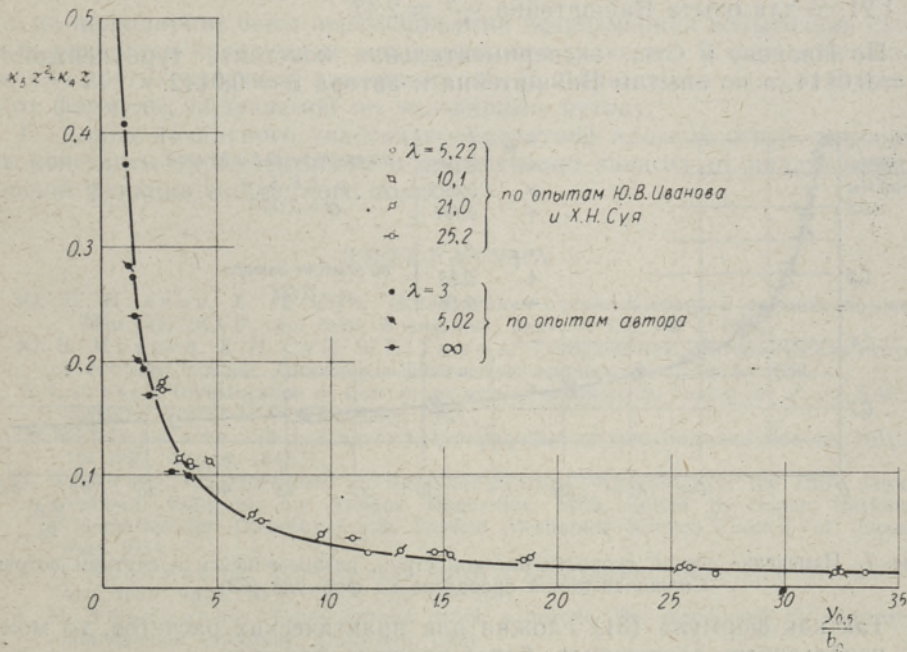


Рис 5. Сравнение экспериментальных данных Ю. В. Иванова и Х. Н. Суя [1, 21] и автора с формулой (31); значение констант определено по формуле (49).

На рис. 6 видно, что экспериментальные данные различных авторов удовлетворительно совпадают с кривыми, полученными по формуле (38).

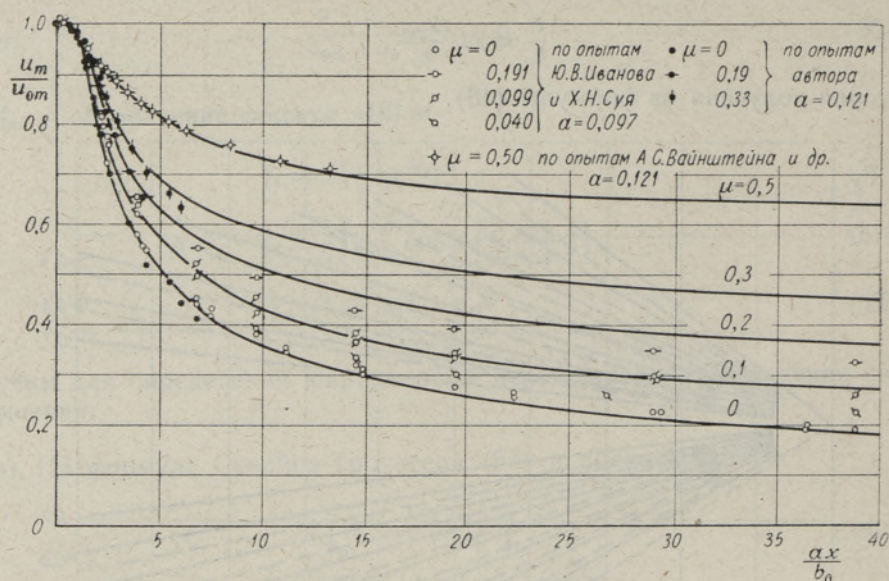


Рис. 6. Изменение осевой скорости плоской струи по экспериментальным данным различных авторов. Сплошные линии проведены по формуле (38).

При сравнении учтено, что безразмерное расстояние до переходного сечения  $\frac{x_n}{b_0}$  для опытов Ю. В. Иванова и Х. Н. Сую и автора равняется  $\frac{ax_n}{b_0} = 1,21$ , а для опыта Вайнштейна  $\frac{ax_n}{b_0} = 2,42$ .

По Иванову и Сую, экспериментальная константа турбулентности  $\alpha = 0,0114$ , а по опытам Вайнштейна и автора  $\alpha = 0,0142$ .

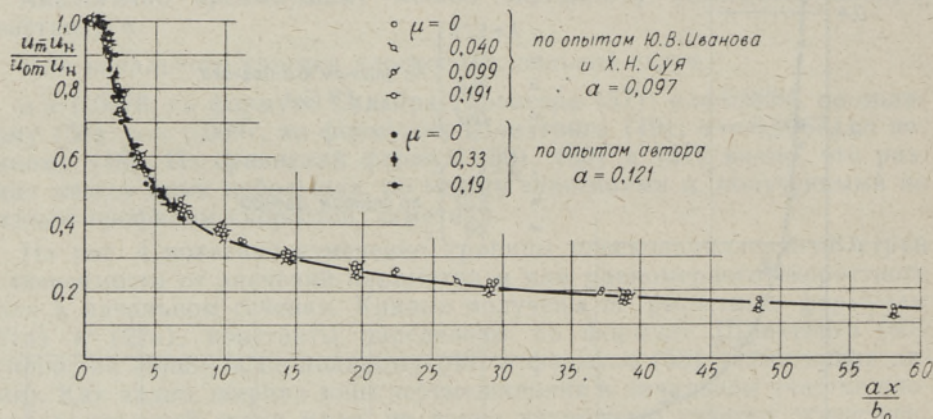


Рис. 7. Изменение осевой скорости плоской струи, развивающейся в спутном потоке. Сплошная линия проведена по формуле (63).

Так как формула (31) сложна для практических расчетов, то можно использовать следующую, более простую формулу

$$\frac{u_m - u_n}{u_{0m} - u_n} = \frac{1}{\sqrt{0,78 \frac{ax}{b_0}}} \quad (63)$$



На рис. 7 видно, что в пределах значений параметра  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  от 3 до  $\infty$ , и промежутке  $\frac{ax}{b_0}$  от 1,5 до 60. Сплошная линия, проведенная по формуле (63), удовлетворительно совпадает с экспериментальными данными Ю. В. Иванова и Х. Н. Суя [1, 21] при значении  $a = 0,097$ , и автора при значении  $a = 0,121$ .

### Выводы

1. При помощи предложенного метода получены аналитические формулы для определения характеристик всех участков турбулентной плоскопараллельной струи, развивающейся в спутном потоке.

2. Простая формула (63) определяет осевую скорость плоской струи в пределах значения параметра  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  от 3 до  $\infty$  и в промежутке  $\frac{ax}{b_0}$  от 1,5 до 60.

3. Формула Г. Н. Абрамовича (52)

$$\frac{y_2 - y_1}{b_0} = \frac{cx}{b_0} \frac{1 - \mu}{1 + \mu}$$

при равномерном скоростном поле в начальном сечении плоскопараллельной струи может быть точно получена также с помощью представленного метода с использованием скоростного профиля  $F(\eta)$ , который удовлетворяет условие

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

т. е. на полуширине зоны перемешивания безразмерная избыточная скорость равняется половине ее максимального значения. В случае использования других профилей зависимость Г. Н. Абрамовича мало отличается от формулы, получаемой по указанному методу.

4. Длина начального участка турбулентной плоской струи и значение константы турбулентности  $a$  существенно зависят от вида универсальной функции скоростного поля.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Иванов, Х. Н. Суя, Исследование развития струи в спутном потоке. Изв. АН ЭССР, сер. техн. и физ.-мат. наук, т. VII, № 2, 1958.
2. Ю. В. Иванов, Х. Н. Суя, Э. П. Тимма, Турбулентная изотермическая струя в спутном потоке. Инженерно-физический журнал, т. I, № 5, 1958.
3. S. Corrsin, Investigation of flow in an axially symmetrical heated jet of air, NASA Wartime Report W-94, December 1943.
4. H. W. Liepmann and J. Laufer, Investigation of free turbulent mixing. NASA TN 1257, August 1947.
5. Y. Kobashi, An experiment on turbulent mixing. Proceedings of the Third Japan National Congress for Applied Mechanics, 1953. Edited by Japan National Committee for Theoretical and Applied Mechanics Science Council of Japan, May 1954.
6. Г. Н. Абрамович, Турбулентная струя в движущейся среде. Изв. АН СССР, отд. техн. наук, № 6, 1957, стр. 98—101.
7. Г. Н. Абрамович, Турбулентная струя в потоке. Тр. совещания по прикладной газовой динамике, Алма-Ата, 1956.
8. Г. Н. Абрамович, О турбулентном смешении на границе двух плоскопараллельных потоков жидкости (при спутном и встречном движении). Сб. Теоретическая гидродинамика, № 19, под ред. Л. И. Седова, Оборонгиз, 1956.
9. Г. Н. Абрамович, Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
10. Б. Я. Трубочков, Тепловой метод измерения турбулентности в аэродинамических трубах. Тр. Центрального аэрогидродинамического ин-та, № 372, 1938.

11. В. Я. Бородачев, Распространение в попутном потоке осесимметричной турбулентной струи сжимаемой жидкости, 1960.
12. W. Tollmien, Berechnung turbulenter Ausbreitungsvorgänge. Ztschr. f. angewandte Mathematik und Mechanik, **6**, 6, 1926.
13. A. Kuethe, Investigations of the Turbulent Mixing Region Formed by Jets. J. of Applied Mechanics, **11**, 3, 1935.
14. H. Görtler, Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes. Ztschr. f. angewandte Mathematik und Mechanik, **6**, 6, 1926.
15. H. B. Squire and J. Truncer, Round Jets in a General Stream. Aeronautical Research Committee Reports and Memoranda, No. 1974. January, 1944, London. (Перевод с английского, М., 1947).
16. Pai Shih-I, Fluid dynamics of jets. D. Van Nostrand Company, inc., New York, 1954.
17. Э. П. Тимма, Ю. В. Иванов, Круглая и плоская турбулентные струи, развивающиеся в спутном потоке. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, т. XI, № 3, 1962.
18. G. J. Taylor, The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Proc. of Royal Soc. Series A, v. CXXXV, No. 828, 1932, p. 485.
19. L. Prandtl, Bemerkungen zur Theorie der freien Turbulenz, ZAMM, **22**, 5, 1942.
20. O. Reynolds, On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. Phil. Trans. of the Royal Society, 1895. Русский перевод см. в сборнике «Проблемы турбулентности», ОНТИ, 1936, стр. 185.
21. X. H. Суй, Исследование развития круглой и плоской струй во встречном и спутном потоке. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, т. X, № 3, 1961.
22. A. S. Weinstein, J. F. Osterle, W. Forstall, Momentum Diffusion from a Slot Jet into a Moving Secondary, J. of Applied Mechanics, September, **23**, 3, 1956, p. 437—444.

Институт энергетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
13. IV 1962

#### PÄRIVOOLOUSES LEVIVA TURBULENTSE LAMEDA JOA PROBLEEMI ANALÜÜTILINE LAHENDAMINE

E. Timma

*Resümee*

Turbulentsete jugade probleemi lahendamiseks esitatakse eksperimentaalselt leitud jugade nimeta suhtelise kiiruse profiilide sarnasusel baseeruva integraalse lähendimeetodi alused. Nende põhjal leiti analüütilised valemid lameda joa kiirusvälja ja joa äärjoonte määramiseks sõltuvalt vooluse ja joa algkiiruste suhte  $\mu$  väärtusest. Valemid on rahuldavas kooskõlas mitmete autorite eksperimentaalandmetega. Näidatakse, et joa alg- ja üleminekuosa pikkus oleneb kiirusvälja funktsiooni konkreetsest kujust; joa segutsooni paksus oma algosas ei sõltu praktiliselt nimeta kiiruste profiile kirjeldavate valemite kujust.

Eesti NSV Teaduste Akadeemia  
Energeetika Instituut

Saabus toimetusse  
13. IV 1962

#### AN ANALYTICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF A TURBULENT FLAT JET DEVELOPING IN A CO-STREAM

E. Timma

*Summary*

For the solution of the problem of turbulent jets, the author presents the fundamental principles of an approximate method based on the similarity of the profiles of the unnamed relative velocity of experimentally found jets. On the basis of these principles, analytical formulas have been derived for the definition of the velocity field and contours of the flat jet, in dependence on the value  $\mu$  of the relation between the stream and the initial velocities of the jet. The formulas are in fair accordance with experimental data of several authors. It has been shown that the length of the initial and transitional parts of the jet depend on the concrete shape of the function of the velocity field; the thickness of the mixture zone of the jet in its initial zone, however, does not practically depend on the shape of the formulas describing the profiles of unnamed velocities.

Academy of Sciences of the Estonian S.S.R.,  
Institute of Energetics

Received  
April 13th, 1962